POL
6062

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

12,229
Exchange.

March 19, 1903 – May 12, 1904.

MAY 12 1904

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE :

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR : S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.

Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie

sous la direction de M. Léon Marchlewski,

Mebre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1904. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

BULLETIN INTERNATIONAL

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER

DER

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

A CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITE
1904.

19 per mtl

Table des matières.

Page

C. Russjan. Quelques propositions sur les Dèterminants 1

L. Marchlewski. Sur les causes de l'inactivité optique des solutions aqueuses de l'acide antitartrique 7

B. Pawlewski. Sur la réaction entre les oximes et le chlorure de thionyle et sur quelques constantes physiques du camphéronitryle 8

G. Balicka-Iwanowska. Recherches sur la décomposition et la régénération des corps albuminoïdes dans les plantes 9

Vl. Kulczyński. Aranearum et Opilionum species in insula Creta a Comite Dre Carolo Attems collectae 52

Comptes-rendus de la Commission de Physiographie, vol. XXXVI . . . 58

Publications de la Classe 76

K. Dziewoński. Sur un nouveau hydrocarbure aromatique: le trinaphtylènebenzène ou décacyclène et sur un composé sulfuré rouge: le dinaphtylènethiophène 77

St. Dobrowolski. La flore du vagin 82

St. Zaremba. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs á la théorie de la viscosité 85

Publications de la Classe 93

J. Brzeziński. Le chancre des arbres, et ses symptômes 95

M. Smoluchowski. Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent 143

— Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs 182

Publications de la Classe 200

R. Gutwiński. De algis, praecipue diatomaceis a Dre J. Holderer anno 1898. in Asia centrali atque in China collectis 201

B. Pawlewski. Sur une nouvelle synthèse directe du α-phénylbenzimidazole 227

R. Załoziecki. Sur la nitration des fractions du pétrole de la Galicie dont le point d'ébullition est peu élevé . . 228

Séance publique annuelle du 12 Mai 1903 231

Éd. Janczewski. Essai d'une disposition naturelle des espèces dans le genre Ribes L. 232

Ch. Olszewski. Un appareil nouveau pour la liquéfaction de l'hydrogène . 241

Pag.

J. Puzyna. Sur les sommes d'un nombre infini de séries entières et sur le théorème de M. Mittag-Leffler 247
St. Dobrowolski. Sur les cytotoxines placentaires 256
Ph. Eisenberg. Sur les lois quantitatives de la réaction entre les toxines et les antitoxines 260
L. Natanson. Sur l'application des équations de Langrange dans la Théorie de la Viscosité 268
— Sur l'approximation de certaines équations de la Théorie de la Viscosité 283
Ém. Godlewski père. Sur la formation des matières albuminoïdes dans les plantes 313
St. Zaremba. Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité 380
— Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène 403
Publications de la Classe 423
C. Russjan. Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1e ordre. Première communication 425
L. Gorczyński. Etudes sur la marche annuelle de l'insolation 465
Ch. Reutt et **Br. Pawlewski.** De la condensation des oximes avec les hydrazines et des propriétés des hydrazones 502
G. Friedberg. Sur le bassin miocénique de Rzeszów . 504
F. Tondera. Contribution à la connaissance de la gaine d'amidon . . 512
M. Kowalewski. Études helmintologiques, VII-me partie 517
St. Maziarski. Sur les rapport des muscles et de la cuticule chez les Crustacés. 520
Ph. Eisenberg. Sur l'adaptation des microorganismes aux moyens de défense de l'organisme infecté 552
W. Heinrich. Sur la fonction de la membrane du tympan 536
L. Brunner et **St. Tołłoczko.** Sur la vitesse de dissolution des corps solides 555
S. Zaremba. Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation . 594
— Le principe des mouvements relatifs et les équations da la mécanique physique. (Réponse à M. Natanson) 614
N. Cybulski. Sur la théorie de l'origine des courants électriques dans les tissus des animaux et des plantes . . 622
L. Satke. De l'état hygrométrique à Tarnopol 629
K. Dziewoński. Sur un nouvel hydrocarbure aromatique: le décacyclène et sur un dérivé du thiophène de couleur rouge: le dinaphtylènethiophène 632
L. Marchlewski. Sur la phylloérythrine 638
C. Russjan. Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1-er ordre 643
W. Stekloff. Sur la théorie des séries trigonométriques 713
L. K. Gliński. Les glandes à pepsine dans la partie supérieure de l'oesophage 740

Page

A. Wrzosek. Recherches sur les voies de passage des microbes du tube digestif dans les organes internes à l'état normal . . . 759

L. Natanson. Remarques sur la théorie de la relaxation . . . 767

Ed. de Janczewski. La sexualité des Groseillers (Ribes L.) 788

J. Kowalski et **B. Zdanowski.** Nouvelle méthode pour la mesure des résistances électrolytiques liquides et plusieurs de ses applications . 793

J. Hetper et **L. Marchlewski.** Recherches sur la matière colorante du sang 795

K. Wójcik. La faune infraoligocène de Kruhel mały près de Przemyśl. (Couches de Clavulina Szabói). I. Les Foraminifères et les Mollusques. 798

T. Garbowski. Sur le développement parthénogénétique des Astéries . 810

T. Estreicher. Sur les points de fusion de l'oxygène et de l'azote . 831

Table par noms d'auteurs des matières 845

Errata 847

MAR 19

N° 1. 12,229 JANVIER 1903.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER
DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTÉ FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR: S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. STANISLAS SMOLKA.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 0 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de **M. Ladislas Natanson**,
Membre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

MAR 19 1903

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 1. **Janvier** **1903.**

Sommaire: 1. M. CÉSAR ROUSSIANE. Quelques propositions sur les Déterminants.
2. M. LÉON MARCHLEWSKI. Sur les causes de l'inactivité optique des solutions aqueuses de l'acide antitartrique.
3. M. BRONISLAS PAWLEWSKI. Sur la réaction entre les oximes et le chlorure de thionyle et sur quelques constantes physiques du camphéronitryle.
4. Mme GABRIELLE BALICKA-IWANOWSKA. Recherches sur la décomposition et la régénération des corps albuminoïdes dans les plantes.
5. M. VL. KULCZYŃSKI. Aranearum et Opilionum species in insula Creta a Comite Dre Carolo Attems collectae.
6. COMPTES-RENDUS DE LA COMMISSION DE PHYSIOGRAPHIE. vol. XXXVI.
7. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Séance du lundi 5 Janvier 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

1. M. CÉSAR ROUSSIANE. **Kilka twierdzeń z teoryi wyznaczników.** *(Einige Determinantensätze). (Quelques propositions sur les Déterminants).* Note présentée par M. C. Zorawski m. c.

Gegenstand dieser Abhandlung sind einige allgemeine Determinantensätze, welche sowohl für die symmetrischen sowie für die schiefen symmetrischen Determinanten richtig sind. Einige von diesen Sätzen gehen für die letztere Art der Determinanten in die Sätze über, die von G. Frobenius im Journal von Crelle (Bd. 82: „Ueber das Pfaff'sche Problem") aufgestellt worden sind.

Es ist leicht, aus diesen Sätzen zu ersehen, welchen Bedingungen man die symmetrische Determinante unterwerfen soll, damit sie die Eigenschaften besitze, die denjenigen der schiefen symmetrischen Determinante analog sind.

Es sei A_{ik} die Unterdeterminante in Bezug auf das Element a_{ik} der symmetrischen oder der schiefen symmetrischen Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ik} = a_{ki} \text{ oder } a_{ik} = -a_{ki}). \tag{1}$$

Es sei ferner A_{ijkq} die zweite Unterdeterminante, welche die i, j^{te} Zeilen und k, q^{te} Kolonnen der gegebenen Determinante Δ nicht enthält.

Satz I.

Wenn für die Determinante Δ

$$\sum_{i}^{n} {}^{i} A_{ii} = 0 \tag{2}$$

ist, so ist

$$\pm \Delta \sum_{i}^{n} {}^{r} A_{irir} = \sum_{i}^{n} {}^{s} A_{is}^{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{3}$$

Es ist hinreichend, diesen Satz nur für den Fall $i = 1$ zu beweisen, d. h. zu beweisen, dass, wenn

$$\sum_{i}^{n} {}^{i} A_{ii} = 0$$

ist, dann ist

$$\pm \Delta \sum_{1}^{n} {}^{r} A_{1r1r} = \sum_{1}^{n} {}^{s} A_{1s}^{2},$$

da man die i^{te} Zeile und i^{te} Kolonne immer an die Stelle der ersten Zeile und ersten Kolonne setzen kann, ohne die Bedingungen des Satzes zu verändern.

Wir können die Bedingung

$$\sum_{1}^{n} {}^{i} A_{ii} = 0$$

durch Entwickelung jeder Unterdeterminante $A_{22}, \ldots A_{nn}$ nach den Elementen der ersten Kolonne in der Form

$$A_{11} + \sum_{1}^{n} {}^{s} a_{s1} R_{s1} = 0 \tag{2'}$$

darstellen. Man hat offenbar

$$R_{11} = \sum_{1}^{n} {}^{r} A_{1r1r}.$$

Wir erhalten durch Multiplikation

$$-\Delta R_{11} = \begin{vmatrix} -a_{11} R_{11}, & -a_{12} R_{11}, & \ldots & -a_{1n} R_{11} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oder

$$-\Delta R_{11} = \begin{vmatrix} -\sum_1^n {}_s\, a_{s1} R_{s1}, & -\sum_1^n {}_s\, a_{s2} R_{s1}, & \ldots & -\sum_1^n {}_s\, a_{sn} R_{s1} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es folgt aus der Bedingung (2′), dass

$$-\sum_1^n {}_s\, a_{s1} R_{s1} = A_{11}$$

ist. Was aber die Ausdrücke

$$\sum_1^n {}_s\, a_{sk} R_{s1} \qquad (k \neq 1)$$

betrifft, so bekommt man dieselben aus der Summe

$$\sum_1^n {}_s\, a_{s1} R_{s1}$$

d. h. aus der Summe

$$A_{22} + \ldots\ldots + A_{nn}$$

durch Einsetzung der Elemente a_{sk} an Stelle der Elemente a_{s1} $(s = 1, 2 \ldots n)$. Jede Determinante A_{qq} $(q \neq k,\ q \neq 1)$ wird bei dieser Einsetzung gleich Null, da die erste und k^{te} Kolonne identisch werden; die Determinante

$$A_{kk}$$

nimmt den Wert an

$$\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{12} \ldots\ldots a_{1k-1} & a_{1k+1} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{2k} & a_{22} \ldots\ldots a_{2k-1} & a_{2k+1} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1k} & a_{k-12} \ldots a_{k-1k-1} & a_{k-1k+1} \ldots a_{k-1n} \\ a_{k+1k} & a_{k+12} \ldots a_{k+1k-1} & a_{k+1k+1} \ldots a_{k+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nk} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nk-1} & a_{nk+1} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k A_{kk}.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass

$$-\Delta R_{11} = \begin{vmatrix} A_{11}, & (-1)^3 A_{21}, \ldots\ldots & (-1)^{n+1} A_{n1} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist.

Da aber sowohl für die symmetrische als auch für die schiefe symmetrische Determinante ungeraden Grades $A_{ik} = A_{ki}$ und für die schiefe symmetrische Determinante geraden Grades $A_{ik} = -A_{ki}$ ist, so folgt

$$= \Delta R_{11} = \begin{vmatrix} A_{11}, & -A_{12}, & \ldots\ldots & (-1)^{n-1} A_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oder

$$= \Delta R_{11} = \sum A_{i1}^2$$

oder endlich

$$= \Delta \sum_{i=1}^{n} A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} A_{i1}^2.$$

Satz II.

Es folgt aus dem Satze I, dass, wenn $\Delta = 0$, $\Sigma A_{ii} = 0$, so ist $A_{is} = 0$, d. h. wenn die symmetrische oder die schiefe symmetrische Determinante Δ sowie die Summe der ersten Hauptunterdeterminanten derselben gleich Null ist, so sind alle ersten Unterdeterminanten der gegebenen Determinante[1]) gleich Null.

Die Bedingungen $\Delta = 0$, $\sum_i A_{ii} = 0$ stellen die kleinste Anzahl der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dar dafür, dass alle ersten Unterdeterminanten der symmetrischen oder der schiefen symmetrischen Determinante gleich Null sind. Aus diesem Satze folgt, dass, wenn die schiefe symmetrische Determinante geraden Grades gleich Null ist, alle ersten Unterdeterminanten der-

[1]) Die Anwendung dieses Satzes kommt in der Theorie der Flächen zweiten Grades $a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + \ldots = 0$ vor: wenn

$$f(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\varrho & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

und

$$f'(\varrho) = -\begin{vmatrix} a_{22}-\varrho & a_{23} \\ a_{23} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{13} \\ a_{13} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

ist, so sind alle ersten Unterdeterminanten der Determinante $f(\varrho)$ gleich Null.

selben gleich Null sind; und ferner dass, wenn die Summe der ersten Hauptunterdeterminanten der schiefen symmetrischen Determinante ungeraden Grades gleich Null ist, alle ersten Unterdeterminanten derselben gleich Null sind.

Satz III.

Der Satz II kann in folgender Weise verallgemeinert werden: wenn alle Unterdeterminanten $m+1$ Grades sowie die Summen der ersten Hauptunterdeterminanten jeder Hauptunterdeterminante $m+1$ Grades der symmetrischen oder der schiefen symmetrischen Determinante gleich Null sind, so sind alle Unterdeterminanten m^{ten} Grades der gegebenen Determinante gleich Null.

In der Tat sind in diesem Falle nach dem Satze II alle Hauptunterdeterminanten m^{ten} Grades der gegebenen Determinante gleich Null. G. Frobenius (l. c.) hat bewiesen, dass, wenn alle Unterdeterminanten $m+1^{ten}$ Grades sowie alle Hauptunterdeterminanten m^{ten} Grades der symmetrischen oder der schiefen symmetrischen Determinante gleich Null sind, alle Unterdeterminanten m^{ten} Grades gleich Null sind.

Satz IV.

Wenn der höchste Grad der nicht verschwindenden Unterdeterminanten der symmetrischen oder schiefen symmetrischen Determinante gleich m ist, so gibt es immer mindestens eine solche Hauptunterdeterminante $m+1^{ten}$ Grades der gegebenen Determinante, dass die Summe ihrer ersten Hauptunterdeterminanten von Null verschieden ist, da sonst nach dem Satze III alle Unterdeterminanten m^{ten} Grades gleich Null wären. G. Frobenius hat bewiesen, wie oben erwähnt ist, dass, wenn der höchste Grad der nicht verschwindenden Unterdeterminanten der symmetrischen oder der schiefen symmetrischen Determinante gleich m ist, es immer die nicht verschwindende Hauptdeterminante dieses Grades gibt. Unser Satz fügt noch eine weitere Eigenschaft dieser Hauptunterdeterminanten hinzu.

Satz V.

Wenn alle Hauptunterdeterminanten $m+2^{ten}$ Grades der symmetrischen oder der schiefen symmetrischen Determinante, welche durch Hinzufügung zur Matrix der nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante m^{ten} Grades der Elemente von je zweien aus den

übrigen Zeilen und Kolonnen der gegebenen Determinante gebildet sind sowie die Summen der ersten Hauptunterdeterminanten jeder dieser Hauptunterdeterminante $m+2^{ten}$ Grades gleich Null sind, so sind alle Unterdeterminanten $m+1^{ten}$ Grades der gegebenen Determinante gleich Null. In der Tat folgt aus dem Satze II, dass alle Unterdeterminanten $m+1^{ten}$ Grades der erwähnten Hauptunterdeterminanten $m+2^{ten}$ Grades gleich Null sind; es sind also alle Unterdeterminanten $m+1^{ten}$ Grades, welche durch Hinzufügung zur Matrix der nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante m^{ten} Grades der Elemente von den übrigen Zeilen und Kolonnen der gegebenen Determinante gebildet sind, gleich Null. Es folgt daraus nach dem bekannten Satze von L. Kronecker, dass alle Unterdeterminanten $m+1^{ten}$ Grades der gegebenen Determinante gleich Null sind.

Für den Fall der schiefen symmetrischen Determinante geht dieser Satz in den Satz von G. Frobenius über: wenn alle Hauptunterdeterminanten $2n+2^{ten}$ Grades, welche durch Hinzufügung zur Matrix der nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante $2n^{ten}$ Grades der Elemente von je zweien aus den übrigen Zeilen und Kolonnen der schiefen symmetrischen Determinante gebildet sind, gleich Null sind, so sind alle Unterdeterminanten $2n+1^{ten}$ Grades gleich Null (l. c.).

Satz VI.

Wenn alle Hauptunterdeterminanten $m+2^{ten}$ Grades der symmetrischen oder der schiefen symmetrischen Determinante sowie die Summen der ersten Hauptunterdeterminanten $m+1, m-1 \ldots^{ten}$ Grades jeder Hauptunterdeterminante $m+2, m, \ldots^{ten}$ Grades gleich Null sind, so sind alle Unterdeterminanten $m+1^{ten}$ Grades gleich Null. Wenn nicht alle Hauptunterdeterminanten m^{ten} Grades gleich Null sind, so ist dieser Satz nach dem Satze V bewiesen. Wenn aber alle Hauptunterdeterminanten m^{ten} Grades gleich Null sind, nicht aber alle $m-2^{ten}$ Grades, so sind nach dem Satze V alle Unterdeterminanten $m-1^{ten}$ und also $m+1^{ten}$ Grades gleich Null u. s. w.

Es geht dieser Satz für den Fall der schiefen symmetrischen Determinante in den Satz von G. Frobenius über: wenn alle Hauptunterdeterminanten $2n+2^{ten}$ Grades der schiefen symmetrischen Determinante gleich Null sind, so sind alle Unterdeterminanten $2n+1^{ten}$ Grades gleich Null (l. c.).

Wir sehen aus diesen Sätzen, dass die Bedingung, dass nämlich

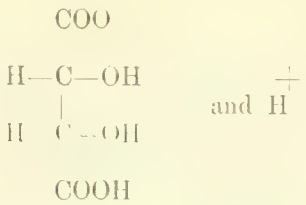
die Summe der ersten Hauptunterdeterminanten $2n-1^{ten}$ Grades jeder Hauptunterdeterminante $2n^{ten}$ Grades der symmetrischen Determinante gleich Null ist, derjenigen Beschaffenheit der schiefen symmetrischen Determinante aequivalent ist, dass alle Hauptunterdeterminanten $2n-1^{ten}$ Grades derselben gleich Null sind.

---

2. M. LÉON MARCHLEWSKI m. c. **Przyczyna bierności optycznej wodnych roztworów kw. antiwinowego.** ***(The cause of optical inactivity of aqueous solutions of antitartaric acid).*** *(Sur les causes de l'inactivité optique des solutions aqueuses de l'acide antitartrique).* Note présentée dans la Séance du 1 Décembre 1902.

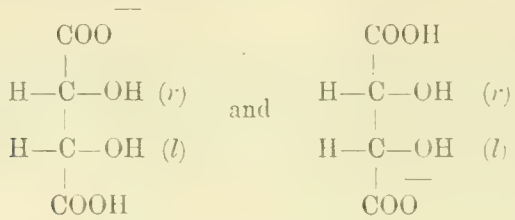
The optical inactivity of solutions of antitartaric acid has been explained hitherto by supposing that the actions on the polarised light of the two symmetrical halves of the molecule are diametrically opposed although numerically equal. There takes place, as the phrase goes, an internal compensation of the opposed actions of the right and left asymmetrical carbon atoms contained in the same molecule, as each half of the molecule is the mirrored image of the other.

Such an explanation may indeed hold good as long as we deal with solutions of antitartaric acid prepared by using solvents which do not cause electrolytical dissociation. For aqueous solutions however this explanation cannot be applied. Antitartaric acid, being a bibasic acid, will no doubt split up into the ions:



and considering that one of the conclusions to be drawn from the researches by Landolt, Oudemans, Eykman, Colson, Pribram, Krecke and others is that the ions of an active tartaric acid cause stronger rotation than the undissociated molecules, it follows that each of the two halves of the monovalent antitartaric acid ions is not a mirrored image of the other.

The inactivity of such solutions cannot therefore be caused by intramolecular, but must be due to extramolecular compensation. The chances of forming ions are of course equal for both halves of the molecule and a solution of the acid will always contain the same number of ions with opposed actions on polarised light, which might be formulated as follows:



---

3. M. BRONISLAS PAWLEWSKI. **O reakcyi między oxymami a chlorkiem tionilu i o niektórych stałych fizycznych kamforonitrylu.** ***(Sur la réaction entre les oximes et le chlorure de thionyle et sur quelques constantes physiques du camphéronitryle).*** Mémoire présenté par M. L. Marchlewski m. c.

Dans ce travail, l'auteur constate que le chlorure de thionyle réagit facilement à froid sur les aldoximes en donnant naissance aux nitryles correspondants. La réaction qui se produit alors peut s'exprimer par l'équation suivante:

$$R - CH : N\text{-}OH + SO\,Cl_2 = R - CN + SO_2 + 2HCl.$$

Le benzaldoxime, par exemple, se transforme facilement sous l'influence du chlorure de thionyle en benzonitryle, donnant seulement des quantités très petites d'un corps solide qui fond à 224°. Le chlorure de thionyle au contraire n'attaque pas les ketoximes, par exemple le méthyle-dibenzyle-oxime et le dibenzyle-oxime; il faut en excepter pourtant le camphéroxime qui se transforme totalement en camphéronitryle sous l'action du chlorure de thionyle.

On a trouvé la temp. 228·2° C pour le point d'ébullition du camphéronitryle à 760 mm.; la détermination de la densité a donné:

$$d_0 = 0{\cdot}9227$$
$$d_{20} = 0{\cdot}9113$$

$$d_{40} = 0{\cdot}8995$$
$$\text{et} \quad d_4^{20} = 0{\cdot}9098.$$

On a trouvé, pour les coefficients de dilatation cubique, les valeurs suivantes:

$$a_{0-20}{}^0 = 0{\cdot}000625$$
$$a_{20-40}{}^0 = 0{\cdot}000664$$
$$a_{0-40}{}^0 = 0{\cdot}000645.$$

La chaleur spécifique du camphéronitryle entre 16^0 et 40^0 est $c = 0{\cdot}476$; la réfraction spécifique de ce nitryle est

$$(n-1) / d = 0{\cdot}5158;$$

la réfraction moléculaire est

$$((n-1) / d).\ M = 76{\cdot}85,$$

la réfraction calculée $= 77{\cdot}01$.

Le pouvoir rotatoire du camphéronitryle est

$$\alpha_D^{20} = +4^0{\cdot}02.$$

---

4. Mme GABRIELLE BALICKA-IWANOWSKA. **O rozkładzie i odtwarzaniu się materyj białkowatych u roślin.** ***(Recherches sur la décomposition et la régénération des corps albuminoïdes dans les plantes).*** Mémoire présenté par M. E. Godlewski m. t.

C'est un fait avéré que l'on trouve dans les plantes légumineuses à l'état de germination, et surtout dans celles du lupin, même traitées par la méthode de réaction microscopique, des quantités considérables d'asparagine qui proviennent ici de la décomposition des corps albuminoïdes dont les graines de ces plantes sont si richement pourvues. Les recherches de Pfeffer[1]) ont démontré qu'au moment où la plante vient d'atteindre un certain âge et de former 6 à 7 feuilles, la réaction de l'asparagine devient graduellement plus faible et à la fin ne se laisse point démontrer à l'aide du microscope. De là Pfeffer a tiré la conclusion que, dans les phases ultérieures du développement de la plante, l'asparagine s'use de nouveau au profit de la reconstitution des corps albuminoïdes.

[1]) Pfeffer. Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik, Leipzig 1872.

Les résultats des recherches microscopiques de Pfeffer ont été pleinement confirmés par les analyses quantitatives des jeunes plantes de lupin et d'autres plantes légumineuses, à différentes périodes de leur développement. Ces analyses, surtout celles de Schulze et de Prianichnikoff, ont démontré ce qui suit: durant la période primaire de la croissance, la quantité des corps albuminoïdes diminue constamment, tandis que simultanément l'asparagine apparaît en quantité toujours plus considérable; ensuite, à mesure que la plante commence à former des matières organiques en plus grandes quantités, par le fait de l'assimilation de l'acide carbonique, la quantité des corps albuminoïdes s'accroît de nouveau, quand même la plante ne pourrait tirer du dehors aucune nourriture azotée. Parallèlement à cette régénération des corps albuminoïdes, la quantité d'asparagine dans ces plantes diminue en proportion. Tout ceci confirme pleinement les résultats des recherches microchimiques de Pfeffer. Mais, à côté de la confirmation des faits déjà en partie connus, ces recherches analytiques ont en outre élargi considérablement le rayon de nos connaissances sur les transformations que subissent les corps albuminoïdes dans les plantes. Sous ce rapport les travaux de E. Schulze et de ses élèves sont d'une importance toute particulière. Un grand nombre d'analyses chimiques, tant qualitatives que quantitatives, de diverses jeunes plantes aux différentes périodes de leur développement, ont notamment montré que l'asparagine est loin d'être l'unique corps azoté cristallin dont l'apparition se laisse observer dans les cellules végétales pendant la décomposition de leur matière albuminoïde. En premier lieu, Schulze vient de constater, sur certaines plantes, qu'à côté de l'asparagine ou à sa place apparaît souvent une substance très voisine, la glutamine dont le rôle semble être le même que celui de l'asparagine.

Dans le cours de ses recherches, Schulze a réussi ensuite à isoler des plantes en voie de germination, successivement: la leucine, la tyrosine, l'alanine, la phénylalaline, l'acide amidovalérianique et à la fin l'arginine, l'histydine et la lysine. Il est particulièrement important de faire remarquer que tous ces composés se forment aussi des corps albuminoïdes, lorsqu'on les soumet à l'action de la tripsine ou qu'on les fait bouillir avec des acides. Non moins digne d'attention est le fait que tous les composés qui se forment pendant la digestion tripsique des corps albuminoïdes

ont pu être découverts dans les plantes à l'état de germination. Il en résulte donc que la décomposition des corps albuminoïdes dans une plante au cours de son processus vital fournit les mêmes produits que la décoction de ces corps avec les acides ou leur digestion par la tripsine. Toutefois, une différence notable est à relever. Tandis qu'au nombre des produits de la digestion des corps albuminoïdes par la tripsine, l'asparagine et la glutamine n'apparaissent point, mais uniquement l'acide aspartique et l'acide glutamique et encore dans des quantités relativement insignifiantes. — pendant la décomposition de l'albumine au cours de la germination des graines, au moins dans les cas les plus fréquents, l'asparagine (plus rarement la glutamine) apparaît en quantité prépondérante relativement aux autres produits. Cette circonstance méritait une explication particulière. Ainsi l'examen des différentes possibilités capables de fournir cette explication, vient d'amener Schulze à la proposition suivante: l'asparagine, au moins dans sa quantité prépondérante, n'est pas un produit direct de la décomposition des corps albuminoïdes de la cellule végétale, mais elle se forme seulement dans la suite comme produit secondaire aux dépens des autres composés cristallins azotés mentionnés ci-dessus, que nous trouvons à côté d'elle dans les plantes pendant la germination. A l'appui de cette affirmation, Schulze allègue ce fait, qu'au cours de ses recherches analytiques il a observé des cas où, pendant les périodes successives du développement des jeunes plantes, aussi bien la quantité des corps albuminoïdes que celle de l'asparagine était en hausse et la quantité des acides amidés seule subissait une diminution. Il serait difficile d'expliquer ce fait autrement qu'en admettant la formation de l'asparagine aux dépens de ces acides amidés. Schulze trouve encore une confirmation de sa thèse en ce que certains acides amidés, tels que la leucine et la tyrosine, se sont laissés isoler uniquement dans les plantes très jeunes et jamais dans les plus âgées.

En se basant sur ces données, Schulze, surtout dans ses dernières publications, émet l'opinion que la formation de l'asparagine constitue déjà le début de la régénération des corps albuminoïdes aux dépens des produits de leur décomposition et que les produits propres de la décomposition sont ici, de même que pendant la digestion tripsique, divers acides amidés et hexobases. L'asparagine (éventuellement la glutamine), suivant Schulze, se prête mieux

à la régénération des corps albuminoïdes que les produits de leur décomposition immédiate, mentionnés plus haut; voilà pourquoi c'est en elle qu'ils se transforment en premier lieu.

Bien que Schulze et ses collaborateurs, ainsi que Prianichnikoff dans ces derniers temps, eussent exécuté un nombre suffisamment grand d'analyses quantitatives se rapportant aux transformations des matières azotées dans les plantes, cependant, vu l'importance du sujet, il m'a paru utile de reprendre encore une fois les investigations quantitatives sur le cours total de la décomposition et de la régénération des corps albuminoïdes, en prenant avant tout en considération les changements dans la quantité d'asparagine durant ce processus, pour pouvoir former par cette voie un ensemble plus complet de données numériques et apprécier à leur juste valeur les opinions de Schulze. Je me proposais en même temps un autre but, celui de rechercher dans quelle mesure les sels minéraux tirés du dehors, en leur qualité de partie constitutive d'une nourriture végétale ordinaire, exercent une influence sur la régénération des corps albuminoïdes aux dépens des produits de leur décomposition et, si cette influence se laissait constater, de découvrir quels sont ceux de ces éléments nutritifs qui jouent ici le rôle principal. Enfin j'ai consacré une série particulière d'expériences à la question suivante: quelle influence exerce la lumière sur l'accumulation de l'asparagine dans les plantes et sur son usure ultérieure au profit de la régénération des corps albuminoïdes?

On sait depuis longtemps, que les plantes élevées dans l'obscurité présentent une accumulation d'asparagine beaucoup plus considérable que les plantes soumises à l'action de la lumière: dans le premier cas, l'asparagine ne disparaît point, la plante fut-elle affamée jusqu'à dépérir complètement. Pfeffer[2], en élevant le lupin à la lumière dans une atmosphère privée d'acide carbonique, a trouvé, contrairement à ce qui se passe pour les plantes élevées dans l'air ordinaire, que la réaction microscopique de l'asparagine se maintient, tout comme dans l'obscurité, jusqu'au dépérissement de la plante. Il a conclu de ces résultats, que l'influence de la lumière sur l'emploi de l'asparagine pour la régénération des corps albuminoïdes est exclusivement indirecte, c'est-à-dire qu'elle se limite uniquement à rendre possible à la plante la production, par voie

[2]) Pfeffer. Monatsberichte der Berliner Akademie 1873 (December).

d'assimilation de l'acide carbonique, des hydrocarbures nécessaires pour la transformation de l'asparagine en corps albuminoïdes.

Indépendamment des objections soulevées par Prianichnikoff contre ces conclusions de Pfeffer, il importe d'observer que la réaction microscopique de l'asparagine ne peut pas servir de mesure précise pour déterminer les rapports quantitatifs dans lesquels elle apparaît dans la plante. Voilà pourquoi, s'il est incontestable que les expériences de Pfeffer démontrent que l'exclusion de l'assimilation empêche en général l'emploi de l'asparagine au profit de la régénération des corps albuminoïdes, elles sont loin de prouver qu'en empêchant l'assimilation de se produire, la formation de l'asparagine et sa disparition subséquente aient lieu, à la lumière comme à l'obscurité, avec une intensité égale. S'il en est effectivement ainsi, cette question ne peut être résolue qu'à la suite d'expériences quantitatives, et c'est justement ce que je me suis proposée de faire.

Ainsi le travail présent a pour but de fournir des données numériques à la solution de trois questions:

1⁰ L'asparagine n'est-elle réellement point, dans sa quantité prépondérante, un produit immédiat de la décomposition des corps albuminoïdes, mais se forme-t-elle seulement dans la suite, aux dépens des produits effectifs de cette décomposition?

2⁰ Les sels minéraux jouent-ils un certain rôle dans la régénération des corps albuminoïdes aux dépens des produits de leur décomposition au sein de la cellule végétale, et quels sont ceux d'entre eux qui jouent ici le principal rôle?

3⁰ Exclusion faite de l'assimilation, l'accumulation de l'asparagine dans les plantes est-elle la même à la lumière que dans l'obscurité, ou bien la lumière, même l'assimilation écartée, exerce-t-elle une certaine influence sur cette accumulation?

J'ai exécuté ce travail dans le laboratoire de l'Institut de Chimie Agricole de l'Université de Cracovie, en profitant des conseils précieux du Professeur E. Godlewski, pour lesquels je me fais l'aimable devoir de lui présenter ici mes remerciements.

Méthode.

Dans mes recherches, je me suis servie de la méthode suivante. Les graines de lupin jaune *(Lupinus luteus)*, assorties quant à leur

grandeur et à leur poids, ont été soumises à la stérilisation au moyen d'une solution de sublimé à $^1/_{500}$ et ensuite lavées à l'eau stérilisée. Après un lavage minutieux, chaque graine fut légèrement piquée avec une épingle, pour en faciliter le gonflement et ensuite laissée pendant 24 heures dans l'eau stérilisée. Les graines gonflées ont été semées sur de la ouate et, seulement au moment de la germination, plantées dans des vases. La ouate, les ustensiles pour semer, l'eau et les vases furent soumis préalablement à une stérilisation aussi soignée que possible. A chaque vase, on destinait 25 graines d'un poids strictement déterminé. Ensuite, chaque vase fut rempli de sable, préalablement calciné pour le dégager de tous les composés azotés, à quantité plus ou moins égale, de 8 à 10 kilogr. et au même degré d'humidité. Certains vases n'obtenaient que de l'eau distillée, d'autres un liquide nutritif minéral. Le liquide nutritif normal était composé de la manière suivante:

$KHPO_4$	1·6 gr.	par litre; de là on prenait 250 ctm. cb. par vase.
KCl	1·2 gr.	
$MgSO_4$	1 gr.	
$CaSO_4H_2O$	1 gr.	

Quand les graines en voie de développement se dégageaient de leurs téguments, on enlevait soigneusement ces derniers pour éviter leur putréfaction; l'arrosement s'opérait avec de l'eau distillée, libre d'ammoniaque. De cette manière, les plantes étaient complètement privées de toute nourriture azotée. Au moment de la récolte, on sortait les plantes, autant que possible avec leurs racines, et on tamisait ensuite le sable pour éviter la perte des moindres ramifications. Après avoir déterminé le poids des plantes fraîches, on les séchait dans une étuve de 60° à 80°, puis on les coupait en petits morceaux. Les plantes coupées et placées dans une cornue étaient infusées avec 150 ctm. cb. d'eau et maintenues dans un bain-marie pendant 5 heures à une température de 60° et ensuite le liquide était filtré, puis divisé en portions définies pour déterminer l'azote sous ses différentes formes.

Dans 25 ctm. cb. du liquide, on déterminait, par la méthode de Kjeldahl, l'azote complet des parties solubles dans l'eau. Dans la substance même, avec 25 ctm. cb. de liquide non filtré, on déterminait l'azote et, soustraction faite de l'azote répondant au liquide, on obtenait l'azote des parties insolubles. Dans 50 ctm. cb. du liquide

filtré, on déterminait l'azote de l'albumine soluble, par la méthode de Stutzer. Avant la précipitation de l'albumine, au moyen de l'hydroxyde de cuivre, on ajoutait au liquide de l'alun pour éviter la perte d'albumine qui pourrait provenir du fait qu'une partie de l'albumine risque de se dissoudre par l'action de l'hydroxyde de potasse. L'azote des corps albuminoïdes solubles ainsi trouvé, joint à l'azote des parties insolubles, donnait la quantité totale de l'azote d'albumine.

Dans le liquide filtré du précipité, obtenu par l'hydroxyde de cuivre, on déterminait l'azote d'asparagine par la méthode de Sachse, c'est-à-dire on invertissait l'asparagine au moyen de sa décoction avec l'acide sulfurique et ensuite on distillait l'ammoniaque dégagé avec MgO. La quantité d'azote de cet ammoniaque multipliée par deux donnait la quantité d'azote de l'asparagine. Par la soustraction de l'azote des corps albuminoïdes solubles et de l'azote d'asparagine, de l'azote total du liquide, on obtenait l'azote des autres composés azotés non-albuminoïdes, désigné comme azote des acides amidés.

Pour établir les tables, les résultats obtenus furent calculés d'une manière double: sur 100 plantes et sur 100 parties de l'azote total.

I Expérience (voir Table 1.).

Au mois d'octobre 1900, 17 vases furent ensemencés de la manière décrite ci-dessus et les plantes furent ensuite analysées par intervalles de dix jours dans l'ordre suivant: pour chaque récolte, on désignait deux vases contenant le liquide nutritif minéral et un vase arrosé uniquement avec de l'eau distillée. Pour cette expérience, on a fait venir d'une verrerie un sable purement siliceux, mais il ne s'est pas montré tout à fait approprié à ce but, à cause de sa trop grande finesse qui rendait le sol très compact et empêchait l'accès de l'air en quantité suffisante; c'est un fait connu que les racines du lupin sont particulièrement sensibles sous ce rapport. C'est à cette circonstance qu'il faut probablement attribuer le fait que les plantes commençaient déjà à jaunir après 55 jours, ce qui forçait d'interrompre l'expérience. Il est bien possible que le faible développement relatif des plantes était aussi en partie causé par l'insuffisance de l'éclairage dans la serre à cette saison de l'année, ainsi qu'à la température assez basse et peu constante, 18° en

Table 1 a. Pour 100 plantes.

	Poids des graines		Poids frais		Poids sec		N total		N d'albumine		N d'asparagine		N des ac. amidés	
	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau
Graines	—		—		—		0.9178		0.8063		0.0634		0.0481	
10 jours	10.136	9.968	194.05	118.31	10.418	9.968	0.8749	0.8007	0.2499	0.2547	0.4143	0.4102	0.2107	0.1355
20 jours	10.040 10.020	9.648	135.46 145.84	125.91	10.834 11.288	10.287	0.8205 0.8123	0.7919	0.3175 0.3276	0.2995	0.3791 0.3789	0.3465	0.1239 0.1058	0.1459
30 jours	9.980 10.088	9.980	144.06 159.75	133.23	17.980 16.529	18.461	0.8899 0.8719	0.8961	0.3946 0.4132	0.3922	0.3326 0.3708	0.2753	0.1627 0.0909	0.2286
40 jours	10.012 10.044	10.080	170.35 173.72	158.08	18.142 23.300	19.816	0.8592 1.0341	0.9232	0.4427 0.5610	0.4599	0.3179 0.3050	0.4199	0.0986 0.1681	0.0634
50 jours	10.056 10.136	10.080	183.30 131.81	143.75	21.043 24.168	17.247	0.8625 0.8843	0.8281	0.4872 0.5124	0.4212	0.2688 0.2781	0.3306	0.1067 0.0938	0.0763
55 jours	10.328 10.080	10.044	215.15 187.50	154.23	26.496 19.895	19.480	0.8900 0.8155	0.8453	0.5699 0.4200	0.3660	0.2061 0.2560	0.3677	0.1140 0.1395	0.1116

Table 1 b. Pour 100 d'azote total.

Graines	87.851		6.907		5.240	
10 jours	28.563	31.821	47.353	51.249	24.082	16.929
20 jours	38.674 41.078	37.792	46.203 46.078	43.727	15.100 12.878	18.410
30 jours	44.342 47.228	43.767	37.374 42.381	30.722	18.283 10.389	25.510
40 jours	51.524 44.316	47.649	36.999 29.494	45.485	11.475 16.159	6.867
50 jours	56.186 57.944	50.863	31.652 31.448	39.922	12.347 10.607	9.213
55 jours	64.033 51.502	43.298	23.157 31.391	43.499	12.808 17.106	13.203

moyenne. Malgré ces circonstances peu avantageuses, on a pu pourtant observer le processus de décomposition de l'albumine et une période assez considérable de sa régénération.

En comparant les analyses des plantes cultivées au liquide nutritif minéral et de celles arrosées avec de l'eau pure, on peut conclure des chiffres correspondants, que dans les premières la quantité d'albumine est plus grande, ce qui ressort surtout de l'étude des phases avancées où la régénération est plus forte.

II Expérience (voir Table 2.).

Au mois de mai 1901, on a ensemencé 24 vases en employant pour cette expérience un sable à gros grains, ce qui a permis de la prolonger pendant 70 jours, d'autant plus que le beau temps et une température moyenne de 26° ont facilité le développement des plantes.

Nous avons pu constater ici ce qui a été relevé à plusieurs reprises par E. Schulze [1]), à savoir que la décomposition primordiale des corps albuminoïdes produit en premier lieu des acides amidés. En effet, leur quantité dans les analyses de 1, 2, 3 et 4 jours est de beaucoup plus considérable que la quantité d'asparagine et ce n'est que dans les analyses de 5, 6 et 7 jours que la quantité d'asparagine commence à augmenter en laissant derrière elle celle des acides amidés. La décomposition des corps albuminoïdes progresse rapidement pendant à peu près 10 jours, ensuite la quantité des corps albuminoïdes reste durant plusieurs jours stationnaire et vers le 20e commence la régénération.

Dans les analyses de 15, 30 et 70 jours, nous constatons un accroissement simultané de l'albumine ainsi que de l'asparagine et en même temps la quantité des acides amidés diminue.

Tout ce processus de décomposition et de régénération des corps albuminoïdes, révélé par l'expérience ci-dessus, confirme la supposition de Schulze que l'asparagine est un produit subséquent qui ne provient pas directement des corps albuminoïdes, mais seulement des acides amidés, ces derniers s'étant formés avec les bases hexoniques surtout pendant la décomposition des corps albuminoïdes dans la cellule végétale vivante. En constatant que l'asparagine

[1]) E. Schulze „Ueber den Umsatz der Eiweissstoffe in der lebenden Pflanze". Zeitschrift für physiologische Chemie. Bd. XXIV.

Table 2 a. Pour 100 plantes.

	Poids des graines		Poids frais		Poids sec		N total		N d'albumine		N d'asparagine		N des ac. amidés	
	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau
Graines	10·106						0·9677		0·8490		0·0579		0·0608	
Germes	11·520		—		9·997		0·9731		0·8931		0·0381		0·0419	
1 jour	11·274		36·10		9·800		0·9189		0·7589		0·0355		0·1545	
2 jours	11·332		41·17		9·717		0·9298		0·7075		0·0543		0·1680	
3 „	11·278		47·70		10·263		0·9843		0·6734		0·0712		0·2397	
4 „	11·208		116·00		9·673		0·9599		0·5769		0·1800		0·2030	
5 jrs.	11·220		65·00		9·583		0·9638		0·5492		0·2346		0·1800	
	11·604		134·75		10·308		0·9740		0·4065		0·3499		0·2176	
6 jours	11·200		139·00		9·339		0·9501		0·5121		0·2214		0·2166	
7 „	11·048		140·00		9·486		0·9138		0·3118		0·3746		0·2274	
10 „	9·850	10·270	124·44	132·94	10·094	10·535	0·8088	0·8893	0·2626	0·3064	0·3723	0·4641	0·1739	0·1188
15 „	10·678	10·360	171·42	145·88	10·917	11·097	0·8221	0·8769	0·3271	0·3063	0·4614	0·4199	0·0336	0·1507
20 „	10·306	10·346	176·37	194·21	10·427	15·015	0·7215	0·9635	0·3147	0·4593	0·2747	0·3889	0·1321	0·1153
30 jrs	9·688	9·848	226·00	218·94	17·932	16·568	0·9215	1·0898	0·5015	0·4780	0·3[illegible]65	0·4773	0·1135	0·1337
	9·808	9·726	206·00	231·46	16·011	18·107	0·9635	1·2268	0·4342	0·4907	0·4399	0·4646	0·0894	0·2715
40 jours	9·684	-	388·00		32·286		1·0565		0·7825		0·2126	—	0·0614	
50 „	9·738	9·744	372·22	340·00	35·568	30·525	0·9804	1·1649	0·7610	0·7566	0·0838	0·2705	0·1356	0·1378
70 „	9·700	9·780	349·93	387·51	43·812	45·873	0·9761	0·9438	0·8105	0·7678	0·1050	0·0779	0·0606	0·0981

Table 2 b. Pour 100 d'azote total.

	N d'albumine		N d'asparagine		N des ac. amidés	
	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau
Graines	87·733		5·983		6 282	
Germes	91·778		3 915		4·305	
1 jour	79·976		3·741		16 282	
2 jours	76 091		5·839		18·062	
3 „	68·414		7·233		24·352	
4 „	60·100		18 731		21·148	
5 jrs.	56·982		24·341		18 676	
	41·735		35·924		22·340	
6 jours	53·899		23 302		22·797	
7 „	34·121		40·993		24·885	
10 „	32·467	34·454	46·031	52·187	21·500	13·358
15 „	39·788	34·929	56·124	47 884	4 087	17·185
20 „	43 617	47·669	38·073	40 363	18 309	11·966
30 jrs.	54·122	43 893	33·260	43 829	12·316	12·277
	45·064	39 998	45 656	37·870	9 278	22·130
40 jours	74·065	—	20·123	—	5 811	—
50 „	77·621	64 949	8·547	23·220	13·831	11·829
70 „	83·034	81·351	10 757	8·253	6 208	10·394

apparaît ici comme un produit secondaire de la décomposition des corps albuminoïdes, je ne veux pas par là trancher la question de savoir si l'asparagine est toujours un produit intermédiaire indispensable à la régénération des corps albuminoïdes par les produits primaires de leur décomposition, ou bien si ces derniers, c'est-à-dire les acides amidés et les bases hexoniques, peuvent aussi se transformer directement en corps albuminoïdes.

Prianichnikoff[1]) émet l'opinion que les corps albuminoïdes peuvent se régénérer directement aussi bien aux dépens de l'asparagine que des acides amidés et je ne vois pas de raison

[1]) Прянишниковъ „Бѣлковыя вещества и ихъ превращенія въ растеніи". Москва 1899.

suffisante pour nier d'une manière catégorique la justesse de cette assertion.

A côté de la constatation du caractère secondaire de l'asparagine pendant la décomposition des corps albuminoïdes, l'expérience ci-dessus démontre aussi d'une manière évidente l'influence des sels minéraux sur la régénération des corps albuminoïdes. En effet, depuis le 30me jour, la quantité des corps albuminoïdes dans les plantes cultivées avec le liquide nutritif est constamment plus grande que celle des plantes arrosées uniquement avec de l'eau distillée.

Dans quelques vases, au cours de cette expérience, les plantes furent cultivées dans du sable, avec un liquide nutritif minéral privé de certains éléments constitutifs. Les plantes de ces vases furent aussi soumises à l'analyse, mais comme les chiffres obtenus ne présentaient pas une régularité suffisante pour que l'on pût tirer de ces résultats une conclusion quelconque, j'ai omis ces chiffres dans les tables.

III Expérience (voir Table 3.).

Pour vérifier les résultats de l'expérience précédente, se rapportant à la phase primaire de la décomposition des corps albuminoïdes, on a semé de nouveau des graines de lupin, pour procéder aux analyses des plantes par intervalles d'un jour. Les chiffres obtenus cette fois diffèrent des analyses précédentes en ce qu'ils ne présentent pas un tableau suffisamment complet de la décomposition graduelle de l'albumine, en premier lieu au profit des acides amidés avec formation subséquente de l'asparagine, car cette dernière commence bientôt à prédominer; cependant ici aussi l'analyse faite au bout de deux jours démontre que tout de même les acides amidés constituent le produit primaire de la décomposition des corps albuminoïdes, leur quantité étant justement dans ce cas supérieure à la quantité d'asparagine. Probablement la rapidité avec laquelle les produits primaires de la décomposition se transforment en asparagine, doit dépendre de certaines circonstances extérieures p. ex. de la marche de la température.

Table 3 a. Pour 100 plantes.

	Poids des graines	Poids sec	N total	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
1 jour	9·480	8·444	0 8268	0·6880	0·0804	0·0584
2 jours	9·480	8·538	0 8404	0·6692	0 0817	0 0895
3 „	8 036	7·560	0·7216	0·5688	0·1072	0 0456
4 „	8·004	6·970	0·6993	0·4229	0·1729	0·1035
6 „	8 036	7·219	0 6760	0 3026	0·2611	0·1123

Table 3 b. Pour 100 d'azote total.

	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
1 jour	83·212	9 7243	7 0633
2 jours	79·628	9·7215	10 649
3 „	78·824	14 855	6 3192
4 „	60·474	24 724	14 800
6 „	44·763	38 624	16 612

IV Expérience (voir Table 4.).

Pour vérifier l'influence des sels minéraux sur la régénération des corps albuminoïdes, on ensemença, au mois de septembre 1901, 8 vases et ce n'est qu'au bout de 40 jours que l'on procéda à l'analyse de la première récolte, les expériences précédentes ayant démontré que ce laps de temps était nécessaire pour que les différences entre les plantes cultivées avec ou sans liquide nutritif minéral s'accentuassent suffisamment sous le rapport de la quantité de leur matière albuminoïde. Dans ce cas cependant, ni les analyses de 40 jours, ni celles de 50, n'ont réussi à faire ressortir ces différences, ce n'est que l'analyse de 65 jours qui s'est montrée à ce point probante, que malgré un accroisement plus considérable de la masse sèche des plantes arrosées avec de l'eau pure, en comparaison avec les plantes cultivées au liquide nutritif minéral, on y trouva cependant, relativement à l'azote total, moins d'albumine, que chez ces dernières. Les résultats moins clairs et précis obtenus

au cours de cette série engageaient à vérifier un point de l'expérience, à savoir, si le sable employé à cette expérience n'était pas différent sous le rapport du contenu des substances minérales du sable employé dans les IIe et IVe expériences. En effet, l'analyse dirigée sur ce point a montré les différences suivantes:

	Sable de la IIe exp.	Sable de la IVe exp.
Ca	0·005 %	0·0150 %
Ph	0·014	0·0192
S	0·0169	0·0269
Mg	0·0488	0·0597
K	0·021	0·0152

Ces chiffres prouvent que le sable employé pour la IVe expérience contenait plus de substances minérales que le sable de la IIe expérience, à la seule exception de la potasse, dont la quantité dans ce dernier cas était supérieure. La différence entre les deux sables était considérable, surtout pour la chaux. On est autorisé à admettre que c'est justement cette différence dans le contenu des substances minérales du sable qui a pu être la cause directe des résultats moins évidents de la IVe expérience.

Il importe d'attirer ici l'attention sur ce fait, que dans l'expérience présente et partiellement dans les expériences précédemment décrites, malgré la calcination du sable, malgré que l'on ait arrosé les plantes avec de l'eau distillée libre d'ammoniaque, malgré l'absence complète de toute tubérosité sur les racines des plantes, une certaine augmentation d'azote s'est laissée constater dans plusieurs analyses. Ainsi nous la trouvons déjà au cours de la I^e^ expérience dans deux analyses de 40 jours, dans la IIe expérience depuis les analyses de 20 jours, enfin dans la IVe expérience cette augmentation se présente dans toutes les 8 analyses. Quoique ce surcroît d'azote ne soit pas considérable, il ne peut être attribué à une faute commise dans l'analyse, il est donc probable qu'il faille admettre ici l'influence de certaines bactéries inconnues qui facilitent à la plante la consommation d'une certaine quantité d'azote, tiré par leur intermédiaire de l'air ambiant, circonstance relevée déjà par M. J. Stoklasa[1]).

[1]) Dr. J. Stoklasa. „Studien über die Assimilation elementaren Stickstoffes durch die Pflanzen". Landw. Jahrb. Berlin 1895.

Table 4 a. Pour 100 Plantes.

	Poids des graines		Poids frais		Poids sec		N total		N d'albumine		N d'asparagine		N des ac. amidés	
	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau	liq. nutr.	eau
Graines	10 016		—		—		0 9677		0 8490		0·0579		0 0608	
40 jours	10·558	10·666	181·66	243·41	21·011	21·012	1·573	1·0141	0·56[illegible]	0·6874	0·2940	0·2866	0·2033	0·0401
55 jours	10·250	10·[illegible]92	5[illegible]1·28	332·14	31·325	32·03	1·1620	1·1620	0·8[illegible]14	0·8470	0·1378	0·1710	0·1679	0·1440
65 jrs.	9·[illegible]64	10·902	5[illegible]3·57	3[illegible]5·00	31·475	36·130	0·964[illegible]	1·5076	0·7763	0·9[illegible]0	0·1014	0·2016	0·0872	0·1140
	10·[illegible]32	9·180	332·14	288·77	32·064	29·133	1·1368	1·1221	0·8847	0·8521	0·1435	0·1955	0·1086	0·0745

Table 4 b. Pour 100 d'azote total.

Graines	87·733		5·983		6·282	
40 jours	52·955	67·784	27·806	28·261	19·228	3·954
55 „	72·387	72·891	12·446	14·716	15·165	12·392
65 jrs	80·[illegible]3	75·864	10·508	15·417	9·037	8·718
	77·823	75·937	12·623	17·422	9·553	6·639

V Expérience (voir Table 5.).

L'expérience précédente a montré que, pour écarter toute conclusion douteuse quant à l'action des sels minéraux sur la régénération des corps albuminoïdes, il ne suffit pas d'employer pour les cultures du sable calciné, mais il est indispensable de le dégager des moindres traces de substances minérales; c'est ce que l'on a fait dans l'expérience présente. Le sable calciné fut soigneusement lavé avec de l'acide chlorhydrique, ensuite rincé à plusieurs reprises dans de l'eau ordinaire, puis avec de l'eau distillée, jusqu'à ce qu'il ne donnât plus de réaction acide, et enfin calciné encore une fois. L'expérience fut exécutée à 25° de chaleur, les plantes furent semées au mois de juillet et récoltées au mois d'août, au bout de 40 jours.

Déjà après une dizaine de jours on pouvait constater une différence dans l'aspect extérieur des plantes: celles qui étaient arrosées à l'eau distillée se distinguaient par un développement plus faible en comparaison des plantes nourries au liquide minéral. Au bout de 40 jours, toutes les plantes commencèrent à jaunir et à se dessécher. Il s'est montré à ce propos, que parmi les plantes arrosées au liquide nutritif minéral avec exclusion de certaines substances, les plantes privées de Ca ont été les premières à se faner, ensuite celles privées de Mg et de Ph, enfin les plantes sans K se sont conservées le plus longtemps. Les racines des deux premières catégories étaient faiblement développées, noirâtres; le même phénomène a pu être constaté sur les plantes arrosées uniquement à l'eau distillée, par conséquent privées de toute nourriture minérale.

L'analyse des plantes récoltées au cours de l'expérience dont les résultats sont exposés dans la Tab. V, confirme pleinement la supposition précédemment énoncée. Dans les quatre vases, les plantes cultivées sans nourriture minérale présentent une quantité moindre d'albumine que celles qui ont obtenu une nourriture minérale complète ou bien privée de certaines substances seulement. Il importe d'observer que la quantité d'albumine la plus petite se trouve dans les plantes cultivées au liquide nourricier privé de Ph et dans d'autres cultivées sans Ca. La plus faible influence est exercée par la privation de Mg, les résultats obtenus dans ce cas se rapprochant le plus de ceux que présente l'analyse des plantes à nourriture minérale complète.

Toutes les plantes cultivées sans sels minéraux présentent une quantité plus considérable d'asparagine. On pourrait en conclure que leur manque rend difficile la transformation de l'asparagine en albumine. Nous avons encore à noter dans ces mêmes cas une assimilation plus faible, ce qui est indiqué par un accroissement moins considérable de la masse sèche. Cette assimilation plus faible peut avoir une certaine influence sur la production plus faible de l'albumine, cependant elle ne peut être décisive, car en comparant la troisième analyse des plantes arrosées à l'eau distillée avec les analyses des plantes à nourriture minérale privée de Ca, nous trouvons dans ce dernier cas presque la même augmentation de la masse sèche et pourtant une quantité plus grande d'albumine. C'est ce qui apparaît d'une manière encore plus visible dans les analyses d'un vase sans Ph. Aussi bien le poids sec que le poids frais de ces plantes est manifestement plus élevé que celui des plantes à nourriture complète et cependant la quantité d'albumine y est inférieure, l'asparagine par contre s'y présente en quantité plus

Table 5 a. Pour 100 plantes.

	Poids des graines	Poids frais	Poids sec.	N total	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid
Graines	10·016	—	—	0·9677	0·8490	0·0579	0·0608
Liq. nutr.	10·374	219·44	24·627	0·8604	0·6754	0·1316	0·0534
	10·352	210·10	23·958	0·8981	0·6772	0·1370	0·0839
Eau	10·356	168·82	17·638	0·8640	0·5540	0·2747	0·0353
	10·356	131·57	16·223	0·8763	0·4794	0·3210	0·0759
	9·736	243·21	21·923	0·8878	0·4797	0·2678	0·1403
	9·744	184·11	18·716	0·8444	0·4322	0·2733	0·1389
Sans Ca	10·382	186·11	21·666	0·8955	0·6307	0·2031	0·0617
	10·352	177·85	21·675	0·8892	0·6042	0·2578	0·0272
Sans Mg	10·352	214·73	23·958	0·8981	0·6772	0·1370	0·0839
	10·369	218·12	23·915	0·8512	0·7174	0·1237	0·0101
Sans K	10·380	151·11	23·738	0·8936	0·6904	0·1955	0·0077
	10·362	227·70	22·352	0·8660	0·5904	0·2099	0·0657
Sans Ph	10·014	292·85	27·928	0·8705	0·6693	0·1364	0·0648
	10·382	286·60	27·323	0·8939	0·5879	0·2179	0·0881

Table 5 b. Pour 100 d'azote total.

	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
Graines	87·733	5·989	6·282
Liq. nutr.	78·498	15·295	6·206
	75·404	15·254	9·341
Eau	64·123	31·793	4·985
	54·707	36·745	8·661
	54·032	30·164	15·803
	51·184	32·366	16·449
Sans Ca	70·429	22·680	6·890
	67·948	28·992	3·058
Sans Mg	75·403	15·254	9·341
	84·269	14·532	1·198
Sans K	77·260	21·877	0·864
	68·175	24·237	7·586
Sans Ph	76·886	15·669	7·444
	65·767	24·376	9·855

grande, c'est-à-dire que la régénération de l'albumine est dans ce cas considérablement plus faible.

Nous avons donc ici probablement affaire à tout un ensemble de causes, qui sont toujours difficiles à démêler et à classer, quand il s'agit de recherches sur une question aussi complexe que le processus de transformation des corps albuminoïdes; pourtant dans tous les cas on peut constater que la présence de sels minéraux est un des facteurs occasionnant l'augmentation de la quantité d'albumine au cours de sa régénération. Dans les travaux relatifs à ce sujet, je n'ai trouvé qu'un chapitre du travail de D. Prianichnikoff[1]) traitant de l'influence accélératrice des sels calcaires sur le processus de décomposition de l'albumine.

En résumant les résultats des expériences ci-dessus, on peut répondre de la manière suivante aux deux premières questions, posées au début du présent travail:

1) L'asparagine qui se forme au cours de la décomposition des

[1]) Д. Пранишниковъ. „О распаденіи бѣлковыхъ веществъ при прорастаніи". Москва 1895.

corps albuminoïdes est un produit secondaire, les acides amidés et les bases hexoniques étant des produits primaires. 2) Les sels minéraux exercent une certaine influence sur la régénération de l'albumine aux dépens des produits de sa décomposition. Le défaut de Ca est la cause la plus importante influant sur la diminution de la quantité d'albumine produit.

La méthode, employée dans la série d'expériences ayant pour objet de déterminer l'influence de la lumière sur l'accumulation de l'asparagine dans les plantes et sur son emploi ultérieur pour la régénération des corps albuminoïdes, était la même qu'au cours des expériences précédentes, à cette différence près que toutes les plantes étaient pourvues de nourriture minérale et que les unes ont été cultivées à la lumière dans une atmosphère privée de CO_2, les autres dans l'obscurité, les troisièmes enfin, en vue de la comparaison, dans des conditions normales. Les vases des deux premières catégories ont été recouverts avec des cloches de verre; dans le premier cas, ces cloches étaient abritées contre la lumière par une enveloppe compacte en papier noir ; dans le second cas, où il s'agissait de priver les plantes de CO_2, les cloches étaient bouchées à leur sommet et à travers le bouchon passait un tube contenant de la chaux sodée, de manière à ce que l'intérieur de la cloche fût uniquement accessible à l'air dépourvu de CO_2. Les cloches elles-mêmes étaient placées dans des cuvettes remplies d'une solution de potasse étendue. Pour éviter une humidité trop grande de l'air, on avait placé, dans les deux cas, à l'intérieur des cloches, de petites coupes contenant du chlorure de chaux.

1 Expérience.

Au mois de novembre 1901 on a ensemencé 4 vases et au bout de 38 jours les plantes ont été récoltées. Dans le cas présent, comme dans tous les suivants, les expériences ont été interrompues aussitôt que le lupin cultivé à l'obscurité commençait à perdre sa vitalité. En général ces recherches sont rendues difficiles par le fait qu'on est souvent obligé d'interrompre l'expérience avant que les plantes, cultivées en vue de la comparaison dans des circonstances normales, commencent à manifester les symptômes de régénération des corps albuminoïdes. Cette expérience a été faite à une température de 11°

(voir Table 6.)

Table 6 a. Pour 100 plantes.

	Poids des graines	Poids frais	Poids sec	N total	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
Graines	11·055	—		0·9178	0·8063	0·0634	0·0481
Normal	11·060	—	8·093	0·8594	0·3071	0·3557	0·1966
	11·080	—	8·446	0·8645	0·1594	0·5251	0·1800
Sans CO_2	11·036	—	8·158	0·8561	0·2099	0·4374	0·2088
Obscurité	11·063	—	7·822	0·8016	0·1596	0·4432	0·2018

Table 6 b. Pour 100 d'azote total.

	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
Graines	87·851	6·907	5·240
Normal	35·734	41·270	22·995
	18·426	60·740	20·832
Sans CO_2	24·528	51·092	24·379
Obscurité	18·710	55·276	26·012

II Expérience.

Elle a duré 19 jours à une température de 26·5°

(voir Table 7.)

Table 7 a. Pour 100 plantes.

	Poids des graines	Poids frais	Poids sec	N total	N d'album.	N d'aspar	N des ac. amid.
Graines	10·339	—	—	0·8582	0·7539	0·0593	0·0450
Normal	10·268	109·30	11·131	0·9011	0·2449	0·5087	0·0769
	10·284	108·45	10·370	0·8356	0·2612	0·4871	0·0873
Sans CO_2	10·284	76·48	8·028	0·8361	0·2223	0·4881	0·1256
	10·456	89·00	8·170	0·7665	0·2285	0·4410	0·0970
Obscurité	10·304	106.21	8·460	0·8525	0·2136	0·4462	0·1927
	10·412	103·73	8·000	0·8272	0·2613	0·4638	0·1022

Table 7 b. Pour 100 d'azote total.

		N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
Graines		87·846	6·909	5·243
Normal		29·488	61·252	9·259
		31·258	58·329	10·411
Sans CO_2		26·587	58·367	15·045
		29·810	57·534	12·655
Obscurité		25·055	52·340	22·604
		31·584	56·061	12·353

III Expérience.

Elle a été entreprise au mois de mai de l'année suivante, à une température de 15°, les plantes ont été cueillies au bout de 24 jours (voir Table 8.)

Table 8 a. Pour 100 plantes.

		Poids des graines	Poids frais	Poids sec	N total	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
Graines		11·055			0·9178	0·8061	0·0634	0·0481
Normal		11·032	119·00	11·823	0·8740	0·4269	0·3705	0·0766
Sans CO_2		11·096	113·30	7·936	0·9130	0·2167	0·5083	0·1880
		11·052	121·87	8·621	0·9681	0·1884	0·5134	0·2666
Obscurité		11·044	108·38	7·917	0·9784	0·2378	0·5701	0·1705

Table 8 b. Pour 100 d'azote total.

		N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
Graines		87·851	6·907	5·240
Normal		48·844	43·534	7·620
Sans CO_2		25·550	55·673	18·755
		19·429	53·037	27·538
Obscurité		24·304	59·290	16·404

IV Expérience.

Au mois de juin de la même année, cette expérience a été faite à la température de 27° et les plantes récoltées après 30 jours de croissance. Elle peut être considérée comme la plus probante, car dans le cas présent les plantes cultivées dans les conditions normales se sont le mieux développées et sont déjà entrées en voie de régénération avancée des corps albuminoïdes.

(voir Table 9.).

Table 9 a. Pour 100 plantes.

	Poids des graines	Poids frais	Poids sec.	N total	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
Graines	10·091	—	—	0·8378	0·7358	0·0579	0·0439
Normal	9·688	206·00	16·011	0·9215	0·5015	0·3065	0·1135
	9·808	218·94	16·568	0·9635	0·4342	0·4399	0·0894
Sans CO_2	10·132	46·21	8·781	0·8941	0·2536	0·4642	0·1763
	10·621	52·00	8·841	0·8810	0·2240	0·4594	0·1976
Obscurité	10·070	49·55	8·414	0·8111	0·2058	0·3852	0·2201
	10·230	42·29	8·113	0·8421	0·1549	0·4149	0·2723

Table 9 b. Pour 100 d'azote total.

	N d'album.	N d'aspar.	N des ac. amid.
Graines	87·846	6·912	5·241
Normal	54·422	33·260	12·316
	45·064	45·656	9·278
Sans CO_2	28·363	51·918	19·718
	25·425	52·145	22·429
Obscurité	25·372	47·491	27·135
	18·394	49·269	32·335

Si l'on considère les chiffres homologues de ces expériences (table 6—9), on peut observer que, dans les expériences I et II (tab. 6 et 7), dans lesquelles il n'y a presque point d'accroissement

de la masse sèche dans les plantes cultivées à l'air libre, aucune différence notable n'apparaît non plus quant à la quantité relative des corps albuminoïdes, de l'asparagine et des acides amidés, entre les plantes cultivées dans des conditions différentes. Non seulement celles cultivées à la lumière sans CO_2, mais aussi celles élevées à l'air libre, contiennent presque autant d'asparagine que les plantes soumises à l'obscurité. Il n'en n'est pas de même des expériences III et IV. Ici les plantes élevées à l'air libre présentent, surtout dans la IVe expérience, un accroissement considérable de la masse sèche. Aussi la quantité des corps albuminoïdes y est presque deux fois plus grande, la quantité d'asparagine et des acides amidés par contre considérablement plus petite, que dans les plantes cultivées dans l'obscurité ou à la lumière, mais dans une atmosphère privée de CO_2. Entre ces deux dernières catégories de plantes, les analyses n'ont pas mis en évidence de différences notables. La quantité relative d'asparagine chez les plantes cultivées à la lumière sans CO_2 n'est pas moindre que chez les plantes qui ont poussé dans l'obscurité. Ces conclusions confirment par conséquent les résultats des recherches microchimiques de Pfeffer et démontrent avec un plein accord que l'exclusion de l'assimilation rend impossible l'utilisation convenable de l'asparagine et des autres produits de la décomposition des corps albuminoïdes pour la régénération de ces derniers.

Cependant, les résultats ci-dessus mentionnés n'excluent guère la possibilité de ce fait, que la lumière, à côté de son influence indirecte, en favorisant l'assimilation, exerce aussi sur la régénération des corps albuminoïdes une influence directe. Au contraire, les chiffres obtenus dans la IVe expérience semblent même parler en faveur de la probabilité d'une influence pareille, car dans les plantes cultivées à la lumière, dans une atmosphère privée de CO_2, on a trouvé aussi bien les corps albuminoïdes que l'asparagine en quantité plus grande que dans les plantes élevées à obscurité, et par contre dans ces dernières la quantité des acides amidés était plus considérable. Si nous admettons, avec Schulze, que la formation de l'asparagine est le début de la régénération des corps albuminoïdes, ce résultat serait favorable à l'hypothèse que la lumière exerce aussi une influence propice et directe sur la régénération des corps albuminoïdes aux dépens des produits de leur décomposition. On ne peut pas rejeter d'emblée, il est vrai,

l'hypothèse que les différences, trouvées par voie d'analyse, entre les plantes cultivées dans l'obscurité et celles cultivées à la lumière, mais sans CO_2, puissent être occasionnées dans une certaine mesure par l'assimilation à la lumière d'une portion de CO_2, qui se serait dégagé par suite de la respiration, cependant il est non moins possible que ces différences aient été provoquées surtout par l'influence directe de la lumière. La petitesse de ces différences peut être attribuée à cette circonstance, que les graines du lupin contiennent, relativement à leur teneur en azote, très peu de corps albuminoïdes et peut-être en expérimentant sur d'autres sujets eût-on trouvé des différences plus sensibles.

L'influence directe de la lumière sur la régénération des corps albuminoïdes trouve aussi une confirmation dans les expériences du Professeur E. Godlewski[1]) sur la formation des corps albuminoïdes dans le froment, au cours desquelles on a constaté un accroissement considérable des corps albuminoïdes à la lumière, aux dépens des nitrates, malgré l'exclusion de l'assimilation. Dans l'obscurité on n'a jamais pu constater une pareille augmentation, quoique ici aussi une certaine quantité de salpêtre ait été transformée en composés organiques non albuminoïdes.

Ainsi, la réponse à la troisième question posée au début de ce travail, sera la suivante: l'assimilation exerce une influence sur la régénération des corps albuminoïdes, cependant la lumière semble aussi exercer une action directe sous ce rapport.

---

5. M. VL. KULCZYŃSKI m. c. **Aranearum et Opilionum species in insula Creta a Comite Dre Carolo Attems collectae.**

(Accedit tabula I).

Illustrissimus Comes Dr. C. Attems in itinere, quod imprimis ad explorandam faunam Myriopodum insulae Cretae suscepit, oblatâ occasione species nonnullas Aranearum et Opilionum legit nobisque eas scrutandas commisit. Quamquam species hae paucae sunt numero, dignae tamen videntur, quae in lucem proferantur, quoniam

[1]) E. Godlewski. „Zur Kentniss der Eiweissbildung aus Nitraten in der Pflanze". Bulletin Int. de l'Académie des Sciences de Cracovie. Mars 1897.

fauna Opilionum insulae Cretae plane ignota est ad hoc tempus, Aranearum vero species Cretenses undeviginti modo (ex parte dubiae) innotuerunt, abhinc annos 50 a H. Lucasio publicatae[1]) et anno 1884 a Cel. E. Simonio, quantum fieri potuit, interpretatae[2]).

Araneae.

1. *Macrothele cretica* n. sp. Homalos, in altitudine 1000 m, mas adultus et femina iuvenis.

2. *Ciniflo pallidus* (L. Koch) (?). Askiphu, 13. V., femina adulta, contusa, probabiliter huius speciei.

3. *Ciniflo Erberi* Keys.?. Daphnaes, 27. V, exemplum non adultum, fortasse huius speciei.

4. *Loxosceles rufescens* (L. Duf.). Lakki, 9. V., femina adulta.

5. *Dysdera Westringi* O. P. Cambr. (?). Daphnaes, 27. V., femina adulta et exemplum non adultum. Femina adulta cephalothorace paullo minus fortiter impresso-punctato quam in exemplis Hungaricis, a quibus ceterum non differre videtur.

6. *Dysdera inc. sp.* Labyrinthus, exemplum non adultum.

7. *Harpactes inc. sp.* Galos, exemplum non adultum.

8. *Minotauria Attemsi* n. g., n. sp. Labyrinthus, mas adult., femina non adulta.

9. *Drassodes*[3]) *lapidicola* (Walck.). Galos, 20. V., femina cephalothorace 6·5 mm longo. Canea, mense Maio, mas formae typicae cephalothorace 5 mm, mandibulis 3·3 longis, in margine antico sulci unguicularis in angulo et ad eum denticulis duobus minutis ornatis. Askiphu, 13. V., exemplum non adultum et mas adultus formae typicae, cephalothorace 5·5 mm, mandibulis 3·6 longis, earum dentibus angularibus mediocribus.

10. *Drassodes lutescens* (C. L. Koch). Visari, 24. V., mas adultus. Exempli huius cephalothorax 4·5 mm, tibia cum patella IV. 5·4 longa est, pes IV. 17 mm (a basi femoris 15·8) longus; femora

[1]) H. Lucas, Essai sur les animaux articulés qui habitent l'île de Crète. (Revue et Magazin de Zoologie pure et appliquée, 1853).

[2]) E. Simon, Études arachnologiques. 16-e mémoire. XXIII. Matériaux pour servir à la Faune des Arachnides de la Grèce. (Annales de la Société entomologique de France, 1885).

[3]) Teste Cel. F. Cambridge (Ann. a. Magaz. Natur. Hist., ser. 7, vol. VII, pag. 58) genus hoc „*Gnaphosa*“ appellari debet.

I. in latere antico et tibiae anteriores et metatarsi I. subter aculeo 1. metatarsi II. aculeis 2. tibiae III. pone 1.1. tibiae IV. subter 2.2.2 ornatae. Area oculorum mediorum vix latior ante quam pone. circiter radio oculi antici longior quam latior. Mandibulae ut in *var. speculatore* Kulcz.[1]) armatae.

11. *Prosthesima cretica* n. sp. Homalos. in altid. 1000 m; Askiphu. 13. V. Feminae adultae duae.

12. *Pterotricha lentiginosa* (C. L. Koch). Canea. mense Maio femina subadulta. Askiphu, 13. V., femina adulta. (Cfr. Adnotationes).

13. *Palpimanus gibbulus* L. Duf. Canea. mense Aprili; Tsikalaria. 4. V.; feminae adultae.

14. *Holocnemus labyrinthi* n. sp. Labyrinthus, exempla adulta et pulli.

15. *Theridium redimitum* (L.) *(lineatum* Clerck, auct.). Galos, 20. V., ex. non adultum.

16. *Mangora acalypha* (Walck.). Galos, 20. V., femina adulta.

17. *Xysticus,* incertae species. Askiphu, 13. V.; Galos, 20. V.; ex. non adulta.

18. *Thanatus vulgaris* E. Sim. subsp. *cretica* n. Visari, 24. V., mares ad. duo.

19. *Sparassus* inc. sp. Visari, 14. V., ex. non adultum.

20. *Mesiotelus tenuissimus* (L. Koch). Canea, mense Aprili, femina adulta.

21. *Textrix cretica* n. sp. Canea, IV.; Homalos, in altid. 1000 m; Askiphu, 13. V.; Lakki, 17. V.; Galos, 20. V.; feminae adultae.

22. *Agelena labyrinthica* (L.)?. Visari, 24. V.; exemplum non adultum, probabiliter huius speciei.

23. *Pisaura rufofasciata* (De Geer) *(mirabilis* Clerck, auct.). Daphnaes, 27. V., femina adulta. (Cfr. Adnotationes).

24. *Tarentula radiata* (Latr.). Galos, 20. V.; Asomatos, 23, V., Visari. 24. V.; Daphnaes. 27. V.; exempla non adulta.

25. *Tarentula albofasciata* (Brullé). Tsikalaria. 4. V.; femina adulta.

26. *Tarentula (Trochosa) ruricola* (De Geer) var. *rustica* Thor. Rethymno, 21. V., mas ad.

[1]) Cfr. Arachnoidea opera Rev. E. Schmitz collecta in insulis Maderianis et in insulis Selvages dictis. pag. 29 (348), ubi tamen „Mandibulae... in latere postico" lapsus est pro „...latere antico".

27. *Cyrba algerina* (Lucas). Canea, mense Aprili, ex. non adult.; Asomatos, 23. V., mas ad.

28. *Heliophanus melinus* L. Koch. Asomatos, 23. V., femina adulta.

29. *Habrocestum latifasciatum* (E. Sim.). Askiphu, 13. V., feminae ad. (Cfr. Adnotationes).

30. *Euarcha iucunda* (Lucas) (*Ergane iucunda* auct.). Lakki, 7. V., mas adultus.

Opiliones.

1. *Liobunum Doriae* Can. Rethymno, 21. V., femina nuper adulta.

2. *Phalangium propinquum* Lucas. Visari, 24. V., femina adulta.

3. *Phalangium saxatile* (C. L. Koch). Sphakia, 12. V., femina ad.; Galos, 20. V., mas et feminae adultae. (Cfr. Adnotationes).

4. *Phalangium* inc. sp. Canea, mense Aprili, exemplum non adultum.

5. *Platybunus strigosus* (L. Koch)?. Sphakia, 12. V., femina; Askiphu, 13. V., mas. (Cfr. Adnotationes).

6. *Acantholophus coronatus* L. Koch. Canea, IV.; Askiphu, 13. V.; Galos, 20. V.; Visari, 24. V.; Daphnaes, 27. V.; exempla omnia non adulta.

Adnotationes et descriptiones specierum novarum.

Macrothele cretica n. sp.

Tab. I [illegible] 1

Mas.

Cephalothorax 6·4 mm longus, 5·0 latus, parte cephalicâ vix altiore quam thoracica, levissime in longitudinem convexâ; impressiones cephalicae prope margines cephalothoracis sat profundae et acutae, pone non procul a lineâ medianâ in foveam obliquam sat profundam sed diffusam dilatatae, ceterum parum distinctae; impressiones radiantes partis thoracicae utrimque binae bene evolutae, abbreviatae. Fovea cephalothoracis media profunda, rotundato-triangularis, apice anteriora versus directo. *Oculi* antici medii lateralibus multo minores: diametro diametrum minorem lateralium vix aequanti, inter se parum plus quam radio, a lateralibus circiter dimidio radio remoti; oculi antici laterales sescuplo saltem longiores quam latiores. *Mandibulae* 2·7 longae (desuper visae 1·6), ambae simul sumptae basi 2·4 latae. *Sternum* longius quam latius (3·05 longum, 2·75

latum), sigillis ad ipsum marginem sitis, sulciformibus, parum evolutis aut subnullis. *Labii* pars apicalis fere dimidia et *maxillarum* pars basalis interior abunde denticulatae. *Palpi* extensi apicem patellarum I fere attingunt; eorum pars femoralis 2·1 longa, patellaris 1·4 longa, 0·8 lata, tibialis 2·4 longa, 1·1 lata, tarsalis 1·05 longa, 0·75 lata. Pars tibialis desuper visa latere interiore maximam partem subrecto, exteriore leviter et inaequabiliter (basim versus fortius) convexo, apicem versus itaque leviter attenuata; a latere visa supra modice et paene aequabiliter convexa, subter longe (fere a basi) inaequabiliter (in dimidio apicali fortius) attenuata, apice duplo fere tenuior quam in parte latissimâ. Pars femoralis inermis videtur, patellaris supra in apice setâ longâ ornatur, tibialis in dimidio apicali lateris interioris supra aculeis mediocriter longis subadpressis 1.1, infra aculeo 1 longiore, praeterea in latere inferiore interiore setis fortibus, fere aculeiformibus, patentibus, 6 aut 8 instructa; pars tarsalis apice biloba, lobo interiore quam exterior paullo breviore, aculeis 2 (fortasse 3) non magnis ornato. Bulbus genitalis in embolum productus longum valde, apicem versus parum inaequabiliter attenuatum, marginem apicalem exteriorem partis patellaris attingentem. *Pedum* femora supra ad lineam medianam aculeis et setis aculeiformibus aliquot, praeterea anteriora in latere antico apicem versus aculeo 1, III. in lateribus supra utrimque aculeis 3 aut 4, IV. in utroque latere apicem versus aculeo 1, patellae subter aculeis et setis fortibus 3 aut 5, anteriores in latere antico aculeis 1.1.1. (aut 1.1), III. in latere antico 1.1.1, in postico 1.1. IV. in latere utroque 1 aut 0 (?) armatae; pedum anteriorum tibiae leviter incrassatae (II. paullo fortius quam I.), tibiae I. in latere antico aculeis 1.1 aut 1.1.1. subter et in laterum parte inferiore aculeis ca. 17, tibiae II. subter in dimidio apicali in longitudinem paullulo concavae, in dimidio basali ad latus exterius aculeis validis 3 et setis aculeiformibus paucis, in latere antico aculeis 1.1, tibiae III. subter aculeis 2.2.2. praeterea in utroque latere et in dorsi lateribus abunde aculeatae; tibiae IV. armaturâ simili (subter paullo magis abundâ); metatarsi I. in latere antico aculeo 1, subter aculeis fortibus, mediocriter longis, plerisque saltem paullo compressis et apice obtusiusculis, ca. 20, metatarsi II. in latere antico prope medium 1, subter in apice 3 et in dimidio apicali 1.1 aut 1.2.1 non magnis, metatarsi posteriores in omnibus lateribus abunde aculeati; tarsi I. aculeis parvis: subter 1 prope

medium, in utroque latere infra ca. 4, tarsi II. similem in modum aculeati aut subter inermes; tarsi III. subter utrimque aculeis 5—7 et in latere antico prope apicem 1, tarsi IV. armaturâ simili aut etiam supra prope apicem aculeo 1 ornati. Ungues principales pedum instructi serie fortiter sinuatâ dentium 10—11 in pedibus I., ca. 9 in IV., unguiculus impar inermis (?) in illis, denticulis minutis 2 ornatus in his. Tarsi soli, mediocriter quidem, scopulati. Pedes I. 15·5, II. 15·5, III. 15, IV. 19, pedum I. femur 4·7, patella 2·8, tibia 2·8, metatarsus 3·1, tarsus 1·85, pedum II. partes: 4·7, 2·65, 2·75, 3·4, 2·1, pedum III.: 4·3, 2·2, 2·6, 3·6, 2·3, IV.: 5·1, 2·6, 3·65, 4·9, 2·4 mm longae. *Abdomen* 6·7 longum, 3·7 latum, mamillae externae articulo basali 1·9, secundo 1·8, apicali 2·2 longo.

Cephalothorax cum mandibulis castaneo-niger, palpi parte femorali parum, apicem versus vero evidenter pallidiores; parte tibiali et tarsali obscure fusco-flavidis; pedes antici fere colore cephalothoracis, reliqui parum, apicem versus tamen evidenter pallidiores, tarsi posteriores fusco-flavidi; sternum, maxillae, labium, coxae flavido-fuliginea et fusco-flavida. *Abdomen* supra fuligineo-nigrum, ornatum—quum in spiritum vini immersa est aranea — serie duplici macularum parvarum, albidarum, utrimque 6, quarum anticae puncta sunt rotundata, reliquae vero lineolae paullo obliquae (foras et paullo retro directae), breves; venter fuligineus, epigastrium fusco-flavidum; mamillae externae flavido-fuligineae, articulo apicali flavido, mamillae internae fusco-albidae.

Femina (manifesto non adulta).

Cephalothorax 6·4 mm longus, 4·6 latus; pars cephalica leviter in longitudinem convexa; fovea media transversa. *Oculorum* anteriorum forma et magnitudo similes atque in mare, mediorum intervallum ca. $^2/_3$ diametri aequans, spatium, quo a lateralibus distant, radio minus. *Mandibulae* 3·5 longae, basi 3·1 latae. *Sternum* 2·8 longum, 2·4 latum; sigilla duo, adversus coxas III. sita, sulciformia, bene evoluta. *Palpi* extensi apicem tibiarum I. non attingunt; eorum pars femoralis 2·8, patellaris 1·4, tibialis 1·85, tarsalis (unguiculo excluso) 2·05 longa; haec desuper visa a basi usque fere ad apicem paene aequabiliter et modice attenuata, apice tamen sat late obtusa; unguiculus serie dentium 10 ornatus; pars tibialis subter in apice aculeis 2 aut 3 et in dimidio apicali lateris interioris aculeis 2 (supra et infra), pars tarsalis in latere inferiore aculeis ca. 8 ornata, ceterum palpi inermes sunt. *Pedes* I. 14·9, II.

13·9, III. 14·1, IV. 17·4, pedum I. femur 3·7, patella 2·45, tibia 2·5, metatarsus 2·4, tarsus 1·6, pedum II. partes: 3·35, 2·4, 2·2, 2·4, 1·6, pedum III.: 3·35, 2·0, 2·15, 3·2, 1·85, IV.: 4·1, 2·45, 2·9, 3·7, 2·1 mm longae. Pedum aculei in exemplo nostro fortasse nondum perfecte evoluti: femora supra setis modo aliquot fortioribus ornata (posteriora saltem), ceterum anteriora in latere antico prope apicem et posteriora in latere postico prope apicem aculeo 1 debili ornata, patellae I. in latere antico ad apicem aculeo 1, II. et III. in latere antico aculeis 1.1 (prope medium et ad apicem), III. et IV. in latere postico prope medium 1, tibiae I. et II. ante pone medium 1, subter illae in apice aculeis 2, hae setâ forti et aculeis 1.3, III. supra aculeo 1, in latere antico supra 1.1, infra 1.1, in latere postico 1.1 aut 1, subter in apice aculeis 2 (praeterea setis fortibus 1 aut 3), IV. supra nullo, in latere utroque 1.1, subter 1.3, metatarsi I. subter 2.2.3, II. subter 2.2.2, in latere antico 1, metatarsi posteriores dorso ad lineam medianam inermi, ceterum III. aculeis ca. 14, IV. ca. 19, tarsi I. subter apicem versus 2.2, II. subter ad latus anticum serie aculeorum ca. 5, ad posticum 3, III. et IV. subter utrimque 3 aut 5, aut III. etiam in latere antico aculeo 1 armati. Scopulis evidentioribus exemplum nostrum caret; unguiculi pedum similem in modum atque in mare adulto pectinati.

Color multo pallidior quam maris adulti, manifesto nondum perfecte evolutus; dorsum abdominis paribus 3 punctorum albidorum ornatum, in $^1/_5$, in $^1/_2$, in $^2/_3$ longitudinis sitis.

Ceterum in feminam quadrant ea, quae de mare diximus, mutatis mutandis.

A *Macrothele calpetana* Walck. (cuius feminam modo, benigne a Cel. E. Simonio communicatum novi) differt *M. cretica* embolo maris multo breviore, oculis anticis inter se insigniter minus remotis (in *M. calpetana* distare mihi videntur oculi antici medii inter se et a lateralibus spatiis subaequalibus, quam diameter paullo — ca. $^1/_6$ — minoribus); parte tarsali palporum feminae parum longiore quam pars tibialis (in *M. calpetana* pars patellaris palporum 2·0, tibialis 2·3, tarsalis 3·05 longa est). *Macrothelae luctuosae* Luc., cuius femina sola nota videtur, pars tarsalis palporum feminae partem tibialem cum patellari longitudine superat teste Cel E. Simonio[1])

[1]) Histoire naturelle des Araignées, edit. 2, vol. 1, pag. 184.

Minotauria n. gen.

Genus *Dysderearum* (E. Sim.), tibiis omnibus aculeatis *Stalitae* Schiödte et *Orsolobo* E. Sim. simile, ab eis oculis sex bene evolutis (paullo minus tamen quam in *Dysdera* Latr. aut *Harpacte* Temp.), quatuor posterioribus in lineam paullo procurvam dispositis, duobus ante eos sitis, distinctum.

Obs. Diagnosin generis *Stalitae* in opere, quod inscribitur „Histoire naturelle des Araignées" (edit. 2, vol. 1, pag. 319), Cel. E. Simon non secundum speciem typicam (*S. taenaria* Schiödte) sed secundum *Stalitam Schiödtei* Thor. potius conscripsisse videtur. Metatarsi I. *Stalitae taenariae* inermes sunt, maxillae mediâ fere formâ inter maxillas *Dysderae* et *Harpactis*, in latere exteriore apicem versus non dilatatae (ut in *Dysdera*), sed apice brevius quam in *Dysdera* et longius quam in *Harpacte* acuminatae, in latere exteriore paginae superioris serrulâ non ornatae. *Stalitae Schiödtei* maxillae formâ paullo propius ad *Harpactem* accedere videntur et serrulâ ornantur; eius metatarsi I. subter aculeis (3 aut 4) armati sunt. *Minotauria* maxillarum formâ et serrulâ evolutâ cum *Stalita Schiödtei*, metatarsis I. inermibus cum *Stalita taenaria* convenit. Labium eius apice levissime excisum (ut in *Stalita Schiödtei*, minus quam in *Harpacte rubicundo* (C. L. Koch) et multo minus quam in *Dysdera erythrina* Latr.). Mandibulae parum proiectae, apice modice oblique (aeque fere atque in *Harpacte rubicundo*, multo minus quam in *Dysdera erythrina*) truncatae, sulco unguiculari in margine antico ad angulum dentibus duobus et in margine postico dentibus duobus apici propioribus ornato.

Minotauria Attemsi n. sp.

Tab. I. fig. 2, 3.

Mas.

Cephalothorax 3·6 mm longus, 2·7 latus, lateribus supra basim palporum (circiter in $^1/_5$ longitudinis) modice sinuatis, fronte ca. 1·4 latâ, leviter rotundatâ, non altus, dorso a parte posticâ, quae modice declivis et modice arcuata est, anteriora versus sublibrato et subrecto (vix excavato), in parte anticâ oculos versus sat longe et modice descendenti et leviter arcuato. Sulcus medius vix cerni potest. Subtiliter et dense reticulatus est cephalothorax, mediocriter modo nitens, in parte cephalicâ anterius sat obsolete reticulatus et fortius nitens, pilis brevibus paucis ornatus, in parte cephalicâ an-

teriore et imprimis in clypeo longius et sat abunde pilosus, etiam in angulis posticis pilis aliquot longioribus instructus. *Oculi* pallidi, subaequales, aream 0·58 latam occupant, posteriores directo desuper visi lineam paullulo procurvam designant, a fronte adspecti lineam modice deorsum curvatam, subaequales videntur (in exemplo nostro oculus medius dexter reliquis minor), medii inter se radio saltem, a lateralibus paullulo minus quam diametro distant; spatium ab oculis anterioribus occupatum aeque circiter latum atque spatium, quo oculi posteriores laterales inter se distant; intervallum oculorum anteriorum circiter radio oculi minus quam spatium ab oculis posterioribus mediis occupatum; a posticis lateralibus distant oculi antici paullo plus quam radio, a posticis mediis paullulo minus quam diametro, a margine clypei circiter duplâ diametro. *Mandibulae* 1·5 longae, simul sumptae 1·3 latae, lateribus exterioribus maximam partem paene rectis et parallelis, sub clypeo leviter geniculatae, dorso ceterum fere recto (vix excavato in longitudinem), sat longe et mediocriter dense pilosae, pilis in granis nigricantibus insistentibus. *Sternum* dense subtiliter reticulatum, subopacum, pilis in maculis sublaevibus et nitidis sitis ornatum, margines versus sublaeve et nitidum. *Palporum* pars femoralis 1·65, patellaris 0.91, tibialis 0·99, tarsalis 0·81 longa, a latere visa ca. 0·26 lata; partes patellaris, tibialis, tarsalis gradatim tenuiores; aculeis carent palpi. Bulbus genitalis paullo ante medium parti tarsali subter innatus, corpore 0·74 longo, 0·35 crasso, 0·32 lato; ab imo visum corpus (quum apice retro directum est) elongato- et paullo oblique ovatum, apicem versus crassius, a latere visum supra leviter et fere aequabiliter convexum, prope apicem modo leviter sinuatum, subter in medio, ubi crassissimum est, late et obtuse angulatum, in dimidio anteriore deplanatum, in apicali praesertim apicem versus sat fortiter convexum; scapus parvus, subuliformis, compressus, foras sat fortiter curvatus, lineâ rectâ a basi ad apicem ductâ dimensus 0·24 longus; apex corporis ad basim scapi cristulâ curvatâ ornatur in marginem exteriorem scapi abeunti, ita, ut desuper adspectus scapus basi in latere exteriore in dentem obtusum dilatatus videatur. *Pedes* longi et graciles; femur I. in dimidio apicali lateris anterioris aculeis 7 aut 8 inordinatis, in lineâ medianâ dorsi serie aculeorum 4 in dimidio basali, in latere superiore posteriore serie aculeorum 6 aut 7, tibia I. in latere antico prope basim 1, subter aculeis 8 neque in series evidentiores neque per paria dis-

positis ornata, in parte apicali sat longâ inermis; pedum II. femur in latere antico fere toto aculeis 8 aut 9. supra basim versus 1.1 aut 1.1.1, in dimidio apicali lateris superioris exterioris 1.1 aut 0. tibia II. in exemplo nostro altera similem in modum atque I. aculeata (sed aculeis subter sitis modo 5), altera subter aculeis 4 et in latere antico prope medium et pone medium aculeo 1, metatarsus in latere inferiore antico ante medium aculeo 1 aut 1.1. pedum III. femur in latere antico aculeis 11 aut 12, ex parte dispersis. supra basim versus serie aculeorum 2 aut 3, in latere superiore postico serie aculeorum 4 aut 5 et infra eam aculeo 1 aut 3, patella ante 1.1 aut 1, pone 1, tibia supra inermis, subter et in lateribus aculeis 20 aut 22 (duobus in apice infra), metatarsus subter et in lateribus 15—17; femur IV. supra basim versus 5 aut 6 inordinatis, supra anterius serie 4 aut 6, supra posterius serie 7 aut 8, pone infra 1.1 aut 1, patella IV. in latere utroque supra et in latere inferiore 1, tibia et metatarsus similem in modum atque in pedibus III. aculeata, illa aculeis 25—28, hic ca. 17. Pedum unguiculi longi graciles, in pedibus I. principales dense pectinati, dentibus fere parallelis (11 in unguiculo exteriore, in interiore fortasse 9 aut 10, in exemplo nostro ex parte defractis), unguiculus impar bene evolutus, inermis; dentes unguiculorum posticorum 7, divergentes. Pedum I. coxa cum trochantere (quoad desuper conspiciuntur) 1·4, femur 3·8, patella 2·2, tibia 3·3, metatarsus 3·15, tarsus 0·8 (cum unguiculis 0·95), pedum II. partes respondentes: 1·1, 3·65, 2·05, 3·25, 3·15, 0·8 (ca. 1·0), pedum III.: 0·7, 2·95, 1·4, 1·9, 3·2, 0·75 (1·0), IV.: 1·0, 4·0, 1·8, 3·55, 4·6, 0·9 (ca. 1·2) mm. longae. *Abdomen* (paullo contusum) ca. 3·9 longum, 2·5 latum, formâ vulgari.

Cephalothorax fulvo-testaceus, margine angusto nigricanti, lineâ mediâ tenui abbreviatâ (sulco medio respondenti) badiâ ornatus, in parte anticâ obscurior quam in posticâ; mandibulae et palpi colore partis anticae cephalothoracis, pedes fere colore partis posticae eiusdem, anteriores posterioribus paullulo obscuriores; sternum colore pedum, obscure marginatum, maxillae et labium sterno saturatius colorata; *abdomen* avellaneum.

Femina.

Exemplum femininum, manifesto non adultum et colore non perfecte evoluto, pallidiore, his rebus differt a mare adulto: *Cephalothorax* subtilius reticulatus, 3·4 longus, 2·45 latus, fronte latiore: fere 1·4

latâ, areâ oculorum 0·47 latâ; sulcus medius nullus; oculi postici lineam modice (fortius quam in mare) procurvam designant, medii inter se minus quam radio, a lateralibus paullulo plus quam diametro distare videntur (etiam in hoc exemplo oculi medii postici inaequales sunt). *Mandibulae* 1·25 longae et latae, granulis vix ullis ornatae. *Palporum* pars femoralis 1·52, patellaris 0·84, tibialis 0·84, tarsalis 1·13 longa; unguiculus gracilis, denticulo uno ornatus. *Pedum* aculei minus numerosi (quod certo ex aetate exempli nondum adulti pendet), ex. gr. femur I. ante aculeis 5, supra 2 aut 3, pone 3, tibia I. ante 0 (aut 1?), subter 4 aut 5 ornata; metatarsus II., patella IV. ut in mare aculeata, patella III. utrimque aculeo 1. Pedum I. partes: 1·1, 3·2, 1·85, 2·8, 2·5, 0·65 (0·85), II.: 1·1, 3·0, 1·8, 2·6, 2·45, 0·6 (0·8), III: 0·6, 2·5, 1·2, 1·95, 2·55, 0·6 (0·85), IV.: 0·8, 3·5 1·6, 3·1, 3·8, 0·8 (1·1) longae. Dentes in unguiculis principalibus pedum I. 9, in exteriore pedum IV. 7, in interiore 6. *Abdomen* 4·7 longum, 2·6 latum.

Prosthesima cretica n. sp.

Tab. I., fig. 4.

Femina.

Cephalothorax 3·1 mm. longus, 2·3 latus, parum nitens, densissime, supra obsolete, margines versus subtiliter reticulatus, pilis non densis, mediocriter longis, subadpressis, et in dorso pilis non multis longis erectis ornatus. Frons ca. 1·2, area *oculorum* 0·54 lata; series oculorum posterior desuper visa circiter diametro oculi longior quam series anterior; huius oculi laterales mediis maiores, a margine clypei circiter diametro suâ minore remoti; oculi postici subaequales (fortasse medii paullulo maiores) et spatiis subaequalibus (medio fortasse paullulo minore quam lateralia et quam intervallum oculorum anticorum mediorum) remoti. *Mandibulae* pilis inaequalibus non densis instructae. *Pedum* I. et II. tibiae inermes, metatarsi subter pone basim aculeis 2, patellae III. in latere postico aculeo 1 ornatae, patellae IV. et dorsum tibiarum III. et IV. inermia. Pedum anteriorum tarsi et metatarsi sat abunde scopulati; pedes posteriores scopulâ carent. Pedum I. femur 2·05, patella 1·4, tibia 1·4, metatarsus 1·3, tarsus (unguiculis exclusis) 1·05, pedum II. partes: 1·9, 1·25, 1·3, 1·3, 1·0, pedum III: 1·7, 0·95, 1·1, 1·4, 1·0, IV.: 2·3, 1·35, 1·7, 2·3, 1·1 longae. *Abdomen* 4·0 longum (mamillis exclusis), 2·5 latum, formâ vulgari. Area *epigynae* (glabra, spatiis pilosis definita) ca. 0·9 longa,

ante 0·85—0·9 lata, posteriora versus insigniter angustata, margine antico paullulo elevato, in angulum latum obtusum anteriora versus fracto, pilis instructo longis, retro directis (pili, quibus margo hic medius et pars epigynae propriae anterior ornatur, insigniter pone mediam aream epigynae pertinent); anguli antici areae, margine corneo definiti, foveam formant mediocriter profundam, pone intus omnino apertam; pars epigynae anterior minor pallida, sulcis mediocriter densis, recurvatis, in medio paullo sinuatis, in lateribus retro flexis ornata; posterior pars epigynae cornea, obscurior, parum definita, paullulo elevata, sculpturâ non facili ad dignoscendum et certo paullo mutabili; areola epigynae parva, ca. 0·36 lata, in $^2/_3$ longitudinis sita, in lateribus modo bene definita sulcis ca 0·13 longis, paullulo incurvatis, inter se fere parallelis aut retro et paullo foras directis; sulcus, quo areola pone definitur, perparum expressus: in angulum fractus recto maiorem, apice retro directum, in latere utroque retro et foras curvatus et cum apice postico sulci lateralis in arcum sat brevem coniunctus; triloba est itaque areola pone, eius lobus medius apice non rotundatus, multo latior quam lobi laterales, qui rotundati et retro et paullo foras directi sunt et aeque longe atque lobus medius aut paullo minus retro producti.

Color niger, metatarsi anteriores colore rufo suffusi, tarsi omnes rufo-testacei.

Mas ignotus.

Fortasse femina maris cuiusdam iam descripti est haec aranea.

Pterotricha nov. nom.

Syn.: *Callilepis* E. Sim., Hist. nat. des Araignées, 1893, pag. 383, ad part. (non *Callilepis* Westr.)

Pythonissa Kulcz. in Chyzer & Kulczyński, Araneae Hungariae, vol. 2, pag. 189 (non *Pythonissa* C. L. Koch).

Pars illa generis *Pythonissae* (C. L. Koch) a Cel. E. Simonio in Les Arachnides de France, vol. IV., pag. 192, definiti, quam a *Callilepidibus* veris segregavimus l. c. et *Pythonissam* appellavimus, novo nomine notanda videtur: genus *Pythonissa* enim a C. L. Kochio a. 1837 institutum in „Uebersicht des Arachnidensystems", pag. 16, initio non nisi species generis *Gnaphosae* (Latr.) E. Sim. et *Callilepidis* Westr. continebat.

Pterotricha lentiginosa (C. L. Koch).

Tab. I., fig. 11.

Exemplum adultum, in insultâ Cretâ lectum, quod huic speciei subiungendum videtur, differt a descriptione a Cel. L. Kochio in „Die Arachnidenfamilie der Drassiden" prolatâ (pag. 41) his rebus: Maius est, cephalothorace 4·5 mm., pedibus I. (a basi femoris) 15, pedibus IV. 18·5 longis, tibiâ cum patellâ pedum IV. 5·8, pedum I. 5·0 longâ (evidenter itaque longiore quam cephalothorax); oculi antici medii inter se parum plus quam radio, a mediis posticis circiter diametro, a margine clypei duplâ diametro distant; series oculorum postica non multo minus quam latitudine oculi lateralis desuper visi longior est quam antica; oculi laterales antici fere rotundi; sternum paullulo longius quam latius (2·1 et 2·0 mm); pedum anteriorum tarsi et metatarsi in utroque latere infra scopulâ angustâ ornati; pedum II. tibiae et metatarsi non solum subter sed etiam in latere antico aculeata (illae aculeis 1.1 fortioribus infra, 1.1 tenuioribus supra, hi aculeo 1), patellae III. etiam in latere antico aculeo 1, tibiae III. in utroque latere aculeis 4, femur IV. in latere antico 1.1. patella IV. nullo, tibia IV. pone aculeis 4 ornata.

Differentiae hae ex parte quidem non leves sunt (praesertim quae oculorum situm attinent), nihilominus exemplum nostrum probabiliter vera est *lentiginosa,* quoniam oculorum situ et formâ non male convenit cum exemplo maris, quod nobis dono dedit Cel. E. Simon. In mare hoc series oculorum postica modo dimidiâ latitudine oculi lateralis desuper visi longior est serie anticâ, ceterum oculi eius non differunt ab oculis feminae in Cretâ lectae.

Epigyne exempli nostri similis figurae, quam dedit Cel. L. Koch l. c., minutiis quibusdam tamen distincta: septum et foveae latiores, tubera, quibus foveae ex parte replentur, magis asymmetrica, in parte posteriore a septo sulco modo vadoso angusto distincta, a marginibus exterioribus fovearum vero non distincta, hi enim paullo pone mediam partem fovearum intus curvati cum tuberibus coniunguntur et in eis evanescunt.

Holocnemus labyrinthi n. sp.

Tab. I, fig. 5, 6, 7.

Femina.

Cephalothorax 1·52 mm. longus (clypeo excepto modo 1·29 longus), 1·47 latus, sublaevis, nitidus, pilis longis dispersis ornatus;

fovea media valde profunda, transversa, sulcos emittit duos retro et paullulo foras directos, qui eminentiam obtusam, parum quam partes laterales adiacentes altiorem includunt; impressiones cephalicae profundae; secundum margines laterales cephalothorax sulco bene expresso ornatur. Clypeus 0·58 longus, declivis. Area *oculorum* 0·52 lata. Oculi medii postici inter se ca. $^5/_4$ diametri minoris, a posticis lateralibus dimidiâ hac diametro et triplo longius quam ab anticis lateralibus remoti; series oculorum antica leviter recurvata, marginibus inferioribus oculorum lineam parum deorsum curvatam designantibus; area oculorum mediorum pone $2^1/_2$ latior quam ante et dimidio latior quam longior. *Mandibulae* 0·52 longae, armaturâ ordinariâ [1]). *Palporum* pars patellaris 0·23, tibialis supra 0·34, subter modo 0·21 longa, apicem versus leviter incrassata, apice ca 0·18 crassa, pars tarsalis 0·50 longa, basi 0·15 crassa, apicem versus longe aequabiliter attenuata, conica, apice parum modo obtusa. *Pedes* (a basi femoris) I. 29, II. 21·5, III. 17, IV. 19·5 mm. longi. *Abdomen* 2·5 longum, 2·0 latum, in medio 2·0 altum, desuper visum late ovatum, a latere visum ventre retro et non parum deorsum directo, dorso a pedunculo usque fere ad mamillas fortiter et modo aequabiliter, modo in parte posteriore fortius arcuato, supra mamillas paullulo impendenti; mamillae apicem coni brevis deorsum fere directi occupant, epigyne autem tuber magnum obtusum format. Margo posticus epigynae $^2/_3$ aut medium fere spatii pedunculo et mamillis interiecti attingit. Aspectum paullo mutabilem praebet *epigyne:* in exemplis duobus, quae vidi, inter lamellam epigynae corneam et marginem ventris proprii (paullulo induratum et colore badio suffusum) partes quaedam molles membranaceae pallidae conspiciuntur et spatium plus minusve magnum occupant, quae — ni fallor — in certamine mortis prociderunt, sed in vivis absconditae sunt. Paries corneus epigynae circiter 0·9 latus, duplo circiter latior quam longior, rotundato triangularis, margine postico in parte mediâ et in lateribus leviter rotundato, non procul a medio utrimque le-

[1]) Margo posticus apicis mandibularum in lamellam compressus est corneam pellucidam, quae cum dente illo longo acuto nigro coniungitur, quo angulus apicalis interior mandibulae ornatur; prope a dente hoc margo lamellae modice sinuatus est, et in sinum hunc cadit unguis mandibulae clausae, ita, ut dens commemoratus ante unguem mandibulae clausae situs sit. — Similis est fabrica mandibularum non solum in *Holocnemo* sed etiam in Pholcidis aliis non paucis saltem (an in omnibus?)

viter sinuato (haec forma marginis postici paullo inconstans videtur); posteriora versus paries hic sat fortiter adscendit; pars postica media eius pallida est, reliquae partes fere omnes corneae et obscure coloratae. Tuberibus et foveis caret epigyne. Ad latus eius utrumque anticum eminentia conspicitur magna, humilis, diffusa, obliqua, parum expressa.

Cephalothorax pallide rufescenti-flavidus, eminentiâ posticâ et clypeo pallidioribus, flavido-albis, impressionibus cephalicis leviter infuscatis, vittâ mediâ brevi, impressionem mediam secanti, subfuscâ, parum expressâ ornatus; oculi cingulis nigris cincti, cinguli anticorum mediorum in vittas breves, medium clypeum non attingentes, sensim angustatas, deorsum producti. Mandibulae et maxillae pallide fulvae, in illis sutura partis connatae badia; labium maxillis paullo pallidius. Sternum dilute sordide flavidum, abunde minute fusco punctatum, vestigiis vittarum fuscarum angustarum, utrimque 3, radiantium ornatum. Palpi pallide sordide flavidi, parte tarsali, praesertim apicem versus, infuscatâ. Pedes fulvi, basim versus sordide flavidi, femoribus et tibiis apice obsolete pallide flavido annulatis. *Abdomen* pallide avellaneum, mamillae pallide fulvae; epigyne badia et latericia, parte mediâ posticâ decolore; margo ventris cum epigynâ contingens colore badio tinctus; partes membranaceae epigynae utrimque lineâ nigrâ leviter deorsum arcuatâ pictae, quae linea in altero exemplo (epigynâ minus patenti) sub margine postico areae corneae iacent et fere libratae sunt, in altero vero in lateribus partis membranaceae sitae, retro et foras directae.

Mas.

Feminae similis, ab ea his rebus distinctus: *Cephalothorax* 1·65 longus (clypeo excepto: 1·46), 1·62 latus. Clypeus 0·74 longus. Area *oculorum* 0·55 lata; oculi medii postici inter se $^5/_3$ diametri minoris, a posticis lateralibus $^1/_3$ eius diametri et duplo longius quam ab anticis lateralibus remoti. *Mandibulae* (in exemplo nostro retractae) 0·48 longae, dorso in parte externâ paullo infra medium dente ornato forti, deorsum et anteriora versus directo, paullo incurvato, apice paullulo uncato, in margine interiore, qui leviter concavus est, granulo uno alterove ornato; inter dentem hunc et marginem apicalem et partem mandibularum connatam dorsum mandibulae latissime deplanatum et paullulo excavatum est. *Palporum* pars femoralis ca. 0·52 longa, basi tenuis, apicem versus fortiter incras-

sata, pars patellaris annuli oblique truncati, apici partis femoralis impositi formam habet, supra ca. 0·32, subter modo 0·065 longa est; pars tibialis supra [1]) 0·92 longa, in longitudinem fortiter et aequabiliter convexa, subter 0·32 longa et paene recta, desuper visa elongato ovata, fere symmetrica, duplo fere longior quam latior; pars tarsalis 0·92 longa, a latere exteriore visa basi oblique truncata (supra longior), prope basim 0·37 crassa, in mediâ parte fortiter attenuata, inde apicem versus crassitudine subaequali, dorso itaque insigniter sigmoideo, latere inferiore verum paene recto: paullo pone medium tuberculo obtuso ornato; ad hoc tuberculum pars tarsalis processibus duobus instructa est (paullo mobilibus—ni fallor): in latere interiore infra aculeo gracili nigro, deorsum et anteriora versus et foras directo, complanato, extrinsecus sulcato, lexiter sursum curvato, aeque saltem longo atque spatium, quo ab apice partis tarsalis distat; alter processus, in latere exteriore infra parti tarsali innatus, ligula est elongata, minus dura, ex parte membranacea fere, ferruginea et decolor, deorsum et anteriora versus et foras directa, paullo deorsum curvata. Apex partis tarsalis insigniter inaequalis; latus eius exterius prope a margine superiore carinulâ ornatur nigrâ, modice deorsum curvatâ, infra vero carinulâ aliâ libratâ fere et rectâ; carinula superior in subulam desinit tenuissimam; inter carinulas excavatum est latus exterius. Desuper visa pars tarsalis in parte basali minore intus fortiter dilatata est in lobum rotundato quadrangulum, tum apicem versus longe et paene aequabiliter attenuata, apice vero ipso intus paullo dilatata in dentem latum triangulum sublibratum. Bulbi genitalis pars basalis parti tarsali paullo pone basim subter intus adnata, alba (maximam partem saltem, in latere exteriore vero ex parte cornea), crassa, paullo compressa, a latere interiore visa rotundato-trapezica, latere antico reliquis longiore; pars terminalis, cornea, ferruginea et badia, lateri exteriori prope apicem partis basalis adnata, lamella est compressa, deorsum directa, a basi apicem versus fortiter dilatata, latior quam longior, latere postico fortiter arcuato, antico recto, apice late et profunde rotundato-excisa, in dentes itaque desinens duos: anteriorem acutum, posteriorem rectangulum, quum a latere, breviter uncatum vero, quum a fronte adspicitur; ad fundum sinus

[1]) Partem palporum unamquamque describimus libratam et apice anteriora versus directam.

apicalis bulbus dentem emittit corneum, oblongo triangularem, intus et paullo sursum directum. *Pedum* I. femora in dimidio apicali lateris inferioris antici serie aculeorum ca. 20 ornata. Pedes I ca. 33·5, II ca. 25, III. ca. 20, IV, ca. 22·5 mm longi. *Abdomen* (desuper visum) 2·3 longum, 1·8 latum, 1·6 altum in medio.

Color idem atque feminae. Palpi sordide flavidi, pars tarsalis fulva, marginibus ex parte nigris, apicem versus obscurior, rufo-fuliginea.

Species haec imprimis *Holocnemo (Pholco) Forskali* Thor. affinis est, sed ab eo abunde distincta.

Thanatus vulgaris E. Sim. subsp. cretica n.

Tab. I. fig. 13.

Subspecies haec differt a *Thanato vulgari* typico imprimis pedibus longioribus et picturâ paullo aliâ. — *Cephalothorax* (desiccatus) obscure fulvus, colore fuligineo suffusus aut contaminatus, praesertim in parte posteriore vittarum lateralium et dorsi (sed non in declivitate posticâ). Pars cephalica anterior lineis fuligineis 3 aut 5 picta. Vittis albis quatuor ornatur cephalothorax; earum marginales pone latitudine patellas anticas fere aequant (multo itaque angustiores sunt quam vittae adiacentes fulvae), anteriora versus sensim angustiores fiunt, basim palporum attingunt, supra lineâ paene rectâ finiuntur; vittae dorsuales, a declivitate posticâ anteriora versus ductae, pone item circiter patellas I. latitudine aequant, inter se spatio angustiore distant, intus lineâ rectâ, extrinsecus lineâ paullo inaequali, obsolete dentatâ, definitae, anteriora versus insigniter angustatae et paullo a se discedentes, marginem interiorem oculorum posticorum lateralium attingunt et cum areâ oculorum, quae maximam partem albo pilosa est, coniunguntur. Vitta, quâ dorsum *abdominis Thanatorum* in parte anteriore ornari solet, nigro-fuliginea, lanceolata, prope medium non evidenter angulata, neque dilatata, apice acuto $^2/_3$ dorsi saltem attingens, utrimque lineâ albissimâ aequali limitata, quae lineae pone in lineam unam coniunguntur sensim angustatam, mamillas fere attingentem. In utroque latere dorsum abdominis lineâ albâ ornatur angustiore, paullo minus evolutâ et definitâ, paene aequabiliter arcuatâ, prope mamillas lineam mediam non plane attingenti, in dorsi parte anteriore autem cum limbo albo vittae mediae obscurae paullo confusâ; area dorsi enim lineis albis lateralibus definita in parte posteriore fuliginea, in an-

teriore vero paullo pallidior et pube albâ paullo contaminata est. Latera abdominis obscure fulva, supra paullo obscuriora quam infra, pube albâ contaminata, praesertim in parte posteriore. Venter fulvus, pube albâ, modice densâ tectus. *Pedes* et *palpi* colore simili, picturâ evidentiore carent. — Differt itaque *Th. vulgaris creticus* a typico (cuius exempla duo modo, paullo detrita, vidi) vittâ mediâ abdominis aequabiliter lanceolatâ, non dentata, et areâ abdominis obscurâ posteriore nusquam lobatâ.

Ad formam *Th. vulgaris creticus* a typico differt evidentius modo pedibus longioribus. Maris typici, quem dono nobis dedit Cel. E. Simon, cephalothorax 1·94 mm.

pedum partes: I. 2·14, 0·87, 1·78, 1·62, 1·20
II. 2·53, 0·94, 2·10, 1·84, 1·26
III. 2·27, 0·94, 1·78, 1·68, 1·13
IV. 2·49, 0·81, 2·10, 2·14, 1·29;

maris Cretici cephalothorax 2·27,

pedum partes: I. 3·14, 1·26, 2·65, 2·43, 1·55
II. 3·82, 1·39, 3·27, 2·85, 1·75
III. 3·34, 1·20, 2·59, 2·43, 1·42
IV. 3·72, 1·10, 2·91, 2·98, 1·62 mm longae.

Tibia IV. longior et quam cephalothorax quintâ parte patellae in formâ typicâ, tribus quintis partibus patellae in subsp. *creticâ;* pedes II. circiter $4^1/_2$ longiores cephalothorace in illa (8·67 longi), $5^3/_4$ in hac (13·08).

Differt etiam paullulo oculorum situs: series oculorum antica paullulo fortius sursum curvata est in *Th. vulgari* typico, linea per margines inferiores oculorum lateralium et per puncta media mediorum ducta manifesto sursum curvata in eo, recta vero in *cretico* mihi videtur (quam cephalothorax directo a fronte adspicitur); clypeus paullulo — ca. $^1/_6$ — humilior est quam area oculorum mediorum, area haec paullulo longior quam pone lata (0·37 et 0·35 mm) in *Th. vulgari* typico, clypeus non humilior (imo perparum altior) quam area et haec plane aeque lata atque longa in *Th. cretico.*

Probabile videtur, *Thanatum vulgarem* sat late diffusum esse per orbem terrarum et in subspecies dissolutum complures, pedum longitudine, oculorum magnitudine et situ, partium genitalium formâ, picturâ distinctas. Subspecies tales quatuor novimus: typicam,

quae Galliam incolit, Creticam, Maderianam [1]), Croatico-Hungaricam [2]).

Bulbi genitalis formâ conveniunt inter se aut parum differunt saltem subspecies *typica, maderiana, cretica*: margo anticus partis terminalis bulbi, niger, arcum format in eis recurvatum, inaequabilem, quum ab imo adspicitur, bis sinuatum: in parte interiore et ad basim emboli proprii [3]). Ambo sinus absunt plane in *Th. vulgari* Hungariam et Croatiam incolenti (quam subspeciem *brevipedem* apellabimus), margo anticus partis terminalis nusquam interruptus neque sinuatus abit in marginem anticum compressum emboli, in pariete emboli dorsuali (fundum alveoli spectanti) non continuatur (fig. 8); etiam a fronte visus embolus subspeciei huius cum limbo nigro partis terminalis in arcum aequabilem coniungitur, angulo in basi extrinsecus sito caret (fig. 10). In subsp. *typicâ, creticâ, maderianâ*, limbus corneus in parietem dorsualem emboli extenditur et in basi emboli a fronte adspecti dentem format plus minusve evidentem (fig. 9).

Pedum longitudine superat, ut diximus, subsp. *cretica typicam;* huius pedes longiores sunt quam subsp. *maderianae*, cuius cephalothorax aeque longus est atque tibia IV. aut eâ paullulo longior potius (ille: 2·36, 2·14, haec 2·27, 1·94, patella 0·97, 0·91 longa); subsp. *brevipes* discedit a reliquis subspeciebus tibiis IV. evidenter brevioribus quam cephalothorax (cephal.: 2·59, 2·07, tibia IV.: 2·17, 1·78, patella IV.: 1·10, 0·87 longa).

Oculorum situ *Th. vulgaris maderianus* cum typico convenit, clypeus eius paullulo altior est (circiter $^1/_{10}$ humilior quam area oculorum mediorum longa). *Thanati vulgaris brevipedis* puncta media oculorum mediorum anticorum cum marginibus inferioribus lateralium lineam designant rectam aut levissime deorsum curvatam, area oculorum mediorum aeque longa est atque pone lata aut paullulo longior, clypeus plerumque evidenter humilior quam haec

[1]) *Thanathus vulgaris* Kulcz. in „Arachnoidea operâ Rev. E. Schmitz collecta in insulis Maderianis et in insulis Selvages dictis".

Th. vulgaris Chyzer & Kulczyński in „Araneae Hungariae".

[3]) Cfr. figuras nostras 14 et 15. In figurâ 13, quae apicem bulbi subsp. *creticae* a parte inferiore simulque paullo a latere exteriore et a fronte visum repraesentat, sinus interior mediocriter expressus est, exterior plane non conspicitur: directo a parte inferiore visus bulbus huius subspeciei similis est fere atque in fig. 15.

area (ca. $^1/_4$), sed in exemplis staturâ magnâ minus humilis (modo $^1/_9$ humilior quam area). Differt haec subspecies a reliquis oculis anticis mediis evidenter minoribus (diametro ca. $^1/_6$ minore) quam laterales antici et circiter sescuplâ diametro inter se remotis, quum oculi hi aequali sint magnitudine et $^5/_4$ aut $^6/_5$ diametri inter se remoti in *Th. vulgari typico* et *cretico*, in *Th. vulgari maderiano* verum medii lateralibus parum minores et inter se $^4/_3$ aut $^3/_2$ diametri remoti. — An differentiae hae constantes sint, ulterius inquirendum videtur.

Picturâ abdominis, praesertim areâ posteriore obscurâ in lateribus lobatâ, conveniunt *Thanati maderianus* et *brevipes* cum *typico*.

Feminam subsp. *creticae* non novi, subsp. typicae unicam feminam vidi. Huius oculi antici medii lateralibus paullulo minores, inter se ca. sescuplâ diametro remoti; eorum puncta media cum marginibus inferioribus lateralium lineam designant paullo sursum curvatam; clypeus altitudine aream oculorum mediorum, quae paullulo longior quam latior est, aequat fere; cephalothorax aeque longus atque tibia IV. cum $^1/_4$ patellae (cephal. 2·4, tibia IV. 2·15, patella 1·05 longa). Fovea epigynae (fig. 16) 0·47 lata; septum epigynae basi, ubi cum marginibus foveae coniungitur, ca. 0·15 latum, in parte latissimâ 0·29 latum.

Th. vulgaris maderiani oculi antici medii lateralibus modo evidenter modo vix minores, inter se sescuplâ diametro aut $^7/_4$ diametri remoti, linea oculis designata, quam supra commemoravimus, paullulo sursum curvata aut recta, area oculorum mediorum modo paullulo longior, modo paullulo brevior quam latior, clypeus modo circiter $^1/_5$ humilior quam area haec (in exemplis minoribus), modo (in magnis) non humilior; cephalothorax tibiam IV. cum dimidiâ patellâ aut $^3/_4$ patellae longitudine aequat (cephal. 2·7, 2·3, 1·9, tibia IV. 2·2, 1·7, 1·5, patella IV. 1·0, 0·8, 0·7 longa). Fovea epigynae 0·42, 0·44, 0·45 lata, septum basi 0·14, 0·16, 0·13, in parte latissimâ 0·27, 0·26, 0·21 latum. — Parum itaque differt haec subspecies a typicâ.

Paullo melius distincta videtur femina *Th. vulgaris brevipedis*, formâ epigynae saltem. Etiam in ea variant paullo magnitudine oculi antici: mediorum diameter $^1/_6$ aut $^1/_7$ minor est diametro lateralium, puncta media mediorum cum marginibus inferioribus lateralium lineam designant paene rectam aut paullulo deorsum curvatam (quum cephalothorax directo a fronte adspicitur), clypeus

fortasse constanter humilior ($^1/_6$ aut $^1/_9$ parte) quam area oculorum mediorum, haec aeque circiter longa ac lata (parum longior aut parum brevior); cephalothorax longitudine tibiam IV. cum totâ patellâ (in exemplis minoribus) aut cum $^3/_4$ patellae (in maioribus) aequat (cephal. 2·2, 2·25, 2·5, tibia IV. 1·4, 1·6, 1·75, patella IV. 0·8, 0·85, 1·0 longa). Basis antica septi epigynae (fig. 12), sive spatium, quo interruptus est margo anticus foveae, latior est quam in prioribus: fovea epigynae 0·44, 0·44, 0·45 lata, basis septi 0·21, 0·26, 0·26, septi pars latissima (in fundo foveae) 0·29, 0·31, 0·32 lata; basis septi itaque dimidiam latitudinem foveae attingit fere aut superat, quum in prioribus eius tertiam partem non aut parum modo excedat.

Textrix cretica n. sp.

Tab. I., fig. 18.

Femina.

Cephalothorax 5·3 mm longus, 3·2 latus, parte cephalicâ 2·0 latâ, 1·9 longâ (a margine antico medio usque ad lineam tranversam sinus eos coniungentem, in quos excisa sunt latera cephalothoracis), anteriora versus levissime dilatatâ, lateribus leviter sigmoideis: supra basim palporum concavis, anterius convexis. Series *oculorum* antica leviter recurvata, eius oculi medii lateralibus paullo minores, inter se ca. $^2/_3$, a lateralibus ca. $^1/_6$ diametri, a clypei margine paullo plus quam duplâ diametro remoti; oculi laterales postici anticis minores (diametro quam horum diameter brevior paullo minore — ni fallor), ab eis radio saltem, a mediis posticis fortasse paullo longius distantes; oculi medii postici reliquis maiores, inter se ca. $^2/_3$ diametri et paullo longius quam a lateralibus remoti. *Mandibulae* sub clypeo geniculatae, 2·0 longae, armatae dentibus 2 in sulci unguicularis margine postico, tribus (medio lateralibus maiore) in antico. *Pedum* I. femur 3·1, patella 1·55, tibia 2·3, metatarsus 2·75, tarsus 1·55, pedum II. partes: 3·1, 1·55, 2·2, 2·75, 1·5, pedum III.: 3·1, 1·6, 2·1, 2·95, 1·5, IV.: 3·7, 1·6, 3·0, 4·0, 1·7 longae. *Abdomen* 5·5 longum, 3·0 latum. *Mamillae* supremae 2·3 longae. *Epigyne* foveâ ornatur paullo varianti; margo anticus foveae elevatus corneus acutus; in lateribus margines foveae pallidi, posteriora versus sensim humiliores fiunt, denique evanescunt; piriformis aut ovata dici potest fovea, pone latior, latitudine variat (0·45—0·57 lata est, eius margo anticus a margine postico epigastrii 0·57—

0·68 mm distat), profunda est; eius fundus, sulco optime circumscriptus, corneus, obscurior quam foveae margines, inaequalis: in longitudinem aut convexus aut in angulum fractus, partem modo anteriorem foveae occupat, posteriora versus latior fit, pone lineâ in angulum obtusum (apice retro directum) fractâ finitur; spatium fundo foveae et margini epigastrii interiectum, 0·24—0·32 longum, laeve, glabrum, nitidum, posteriora versus sensim adscendit et sulco non profundo dimidiatur.

Cephalothorax humefactus umbrinus, parte cephalicâ rufo-fuligineâ, summo margine nigricanti, vittâ mediâ abbreviatâ et vittis marginalibus mediocriter latis pallidioribus, parum expressis ornatus. Mandibulae rufo-fuligineae, labium et maxillae paullo pallidiora, apice albida; sternum castaneum aut rufo umbrinum, margine obscuriore; coxae sterno paullo pallidiores, pedes obscure fulvi aut rufescenti-umbrini, tarsis pallidioribus, femora subter fusco annulata, annulis ternis in pedibus posterioribus, binis in anterioribus, tibiae annulis fuscis binis, supra subterque late interruptis ornatae, tibiae I. aut etiam II. et metatarsi I. aut I. et II. infuscata, basi pallidiora, metatarsi posteriores apice obsolete annulati; tota haec pictura modice aut mediocriter expressa. Palpi obscure fulvi parte tibiali et praesertim tarsali castaneâ. *Abdomen* supra fuligineum, subter umbrinum, ornatum subter vittis pallidioribus duabus angustis, inter se approximatis et in lateribus ventris vittis latioribus, parum expressis; dorsum abdominis vittâ pictum rufescenti-umbrinâ, sat latâ, lateribus in parte anteriore rectis, in posteriore obtuse serratis; cuius vittae pars antica maculâ fuligineâ subquadratâ fere repletur, pars reliqua angulos fuligineos aliquot (primum crassum, reliquos sat angustos) continet: in exemplis obscure coloratis restant e vittâ pallidâ: in parte anticâ lineae duae parallelae, in longitudinem directae, pone eas, paullo ante medium dorsum, maculae sat parvae, subtriangulares, in dorsi dimidio posteriore paria circiter tria macularum minus expressarum, inter se plus minusve in angulos pallidos coniunctarum. Mamillae infimae rufo-fuligineae, articulus basalis supremarum colore eodem, articulus apicalis paullo pallidior.

Desiccatus *cephalothorax* vittâ mediâ albidâ aut cremeâ, abbreviatâ, e pube formatâ pictus est, *abdomen* pube albidâ ornatur, in dorsi lateribus dispersâ, in eius parte mediâ in picturam congestâ similem atque ea, quâ dorsum humefactum exemplorum obscure

coloratorum ornatur; e picturâ hac, parum definitâ, imprimis manifestae sunt maculae duae albae paullo ante medium dorsum sitae. (Exempla omnia, quae vidi, plus minusve detrita sunt).

Mas ignotus.

Pisaura rufofasciata de Geer.

Exemplum huius speciei in insulâ Cretâ lectum staturâ magnâ est: cephalothorace 5·0 mm longo, picturâ cum „*Oeyale murina*" C. L. Koch [1]) convenit. Epigynae forma paullo insolita: pars postica furcae corneae, quae partem anticam et mediam epigynae occupat, in lamellam dilatata est parvam, transversam, rectangulam, 0·32 latam, ca. 0·16 longam. Foveae epigynae pone et in lateribus rotundatae, 0·81 latae, 0·42 longae, partem modo parvam posticam mediam replet haec lamella; reliquas partes foramina occupant magna, rotundata, ca. 0·18 lata, quae carinis obtusis latiusculis circumscribuntur in angulis lamellae anticis initium capientibus, anteriora versus directis, tum foras et denique retro curvatis. Longitudo totius epigynae 1·14 mm.

Habrocestum latifasciatum (E. Sim.).

Tab. I., fig. 17.

Feminas *Habrocesti* cuiusdam in Cretâ lectas *Habrocesto latifasciato* (E. Sim.), Graeciam, Syriam, Palaestinam incolenti, (cuius mas modo descriptus est), subiungendas censeo, pedum enim picturâ conveniunt cum mare huius speciei, differunt autem a mare *H. papilionacei* (L. Koch [2]).

In mare *Habrocesti papilionacei* pedes (humefacti) fulvo- et rufoflavidi sunt, anteriores posterioribus paullo obscuriores; apex femorum anteriorum in latere antico inferiore niger; pedum I. patella, tibia, basis metatarsi, in latere antico et inferiore antico fusca; pedum II. patella in latere antico fere toto, tibia in eodem latere basi et apice fuscae aut nigrae; pedum posteriorum patellae in latere antico infuscatae, tibiae in eodem latere basi angustius, apice latius fusco annulatae, in latere postico apice anguste nigricantes; apex

[1]) Die Arachniden, vol. XIV., fig. 1348.

[2]) Mares *Habrocesti latifasciati* et *H. papilionacei* benigne nobiscum communicavit Cel. E. Simon

metatarsorum obsolete infuscatus. Ceterum carent pedes picturâ evidentiore.

Maris *Habrocesti latifasciati* femora omnia apice nigro annulata sunt, annulis subter late, supra anguste interruptis; in latere postico femoris II. cum annulo apicali umbra fusca coniungitur basim versus ducta, paullo abbreviata, in margine antico sinuata, basi profunde excisa; femora III. et IV. ornata basi subter maculâ fuscâ et supra eam maculâ paullo minus expressâ, quae cum annulo apicali umbris fuscis binis, paullo obliquis (in latera adscendentibus) coniunguntur (vitta posterior in pedibus IV. obsoleta). Pedum I. patella tibia metatarsus tarsus fusco-nigra, dorso tibiae et patellae et parte basali tarsi pallidioribus, badiis; patellae reliquae utroque latere et lineâ mediâ dorsuali (in pedibus II. brevissimâ) fuscis; tibiae utroque latere plus minusve fortiter infuscato, fuscedine basi et apice obscuriore et annulos plus minusve evidentes formanti; earum dorsum lineâ mediâ fuscâ incompletâ, parum expressâ ornatur; metatarsi basi latius, apice angustius, fusco aut nigro annulati.

Feminarum Cretensium femora I. et II. similem in modum picta atque femora II., femora posteriora similia femoribus respondentibus maris, fuscedine basali in pedibus III. et IV. magis aequabili (in maculas binas non divulsâ), umbris posticis eorundem pedum parum expressis aut obsoletis; patellae basi supra et in utroque latere puncto fusco ornatae, in lateribus apicem versus plus minusve manifeste (in pedibus IV. parum) fusco-maculatae; tibiae et metatarsi ornata annulis binis: basali et subapicali (in tibiis posterioribus) aut apicali, fuscedine inter se coniunctis et confusis modo in latere postico tibiarum I. et II. — Tota haec pictura plus minusve expressa.

Epigyne insigniter distincta videtur ab epigynâ *Habrocesti papilionacei:* e lamellâ constat leviter convexâ, albidâ, in parte postremâ corneâ, fulvâ (maculis duabus translucentibus magnis nigricantibus oblongis pictâ), glabrâ, subtilissime impresso-punctatâ, 0·4 longâ, 0·53 latâ; lamella haec in utroque latere margine corneo definitur, ad quem paullo impressa est; ambo margines, insigniter incurvati, pone evanescunt prope a margine postico epigynae, inter se non coëunt, ante vero intus et denique paullo retro directi debiliores quidem fiunt, sed non abbreviati in angulum obtusum coniunguntur; lamella itaque cordiformis dici potest, pone late truncata et in medio in sinum mediocrem obtusangulum excisa. Pars epi-

gynae in fronte lamellae descriptae sita, sat magna, paene levis (subtilissime modo rugulosa) et glabra est.

Cephalothoracis humefacti area oculorum nigra, reliqua pars dorsi badia, latera et declivitas postica obscuriora, haec supra vittâ paullo pallidiore ornata, clypeus latericius; mandibulae eo paullo obscuriores et laetius rufescentes; sternum umbrinum, posteriora versus plus minusve pallidius; coxae eo multo pallidiores: pallide fulvae. Palpi flavo-testacei, parte femorali in latere interiore et praesertim subter infuscatâ, parte tibiali basi supra vittâ brevi fuscâ ornatâ. *Abdomen* supra umbrinum fuligineo et nigro variegatum, colore fulvo aut fulvo-cinereo pictum: in parte anticâ fasciâ transversâ latâ, fuligineo punctatâ, mediocriter expressâ, in latera abdominis sat longe productâ ornatum; dimidium posterius macula magna occupat fulva, nigro limbata, bis dilatata: pars eius anterior transversa, in lateribus rotundata, pars posterior angustior, paullo oblonga, lateribus angulatis potius; macula haea angulos fuscos parvos circiter 6 continet; eius margo anticus medius paullo productus inter maculas duas oblongas, quibus dorsi dimidium anterius ornatur. Latera abdominis et venter cinereo-fulva, umbrino maculata, maculis plus minusve congestis in lateribus in vittas obliquas, in ventre in vittas angustas longitudinales quatuor. Mamillae umbrinae.

Cephalothorax pube tectus laete rufâ et albâ (praesertim in lateribus margines versus) desiccatus picturam evidentiorem non praebet; inter oculos posticos fasciâ diffusâ, parum expressâ, vittam brevem rufescentem continenti, in angulo inter dorsum et declivitatem posticam vittâ brevi albidâ, in declivitate posticâ, quae nuda est, utrimque vittâ albidâ sat longâ ornatur. Clypeus albo pilosus, cinguli oculorum anticorum albi, supra pube rufâ immixtâ. Mandibulae pilis tenuibus dispersis albidis ornatae. Palpi albo pubescentes. *Abdomen* supra laete fulvum, nigro punctatum, praeter maculam in dimidio posteriore sitam, in utroque latere (neque in fronte) nigro limbatam, subunicolorem, picturam evidentiorem nullam ostendit; venter cinerascens.

Cephalothorax 3·0 mm longus, 2·1 latus, area oculorum (directo desuper visa) 1·3 longa, quadrangulus oculorum 1·1 longus, pone 1·75, ante 1·85 latus, abdomen 3·4, cum mamillis 4·1 longum, 2·5 latum; pedum III. femur 2·1, patella 1·13, tibia 1·23, metatarsus

1·17, tarsus (cum unguiculis) 0·81, pedum IV. partes: 1·6, 0·78, 1·10, 1·20, 0·84 longae.

Phalangium saxatile (C. L. Koch).

Maris huius speciei in Cretâ lecti truncus fere 5 mm longus est, supra evidenter granulatus, margines cephalothoracis laterales denticulati, tibia palporum spiculis paucis et parvis ornata, pedum omnium tibiae supra inermes, metatarsus I. mediocriter (fere ut in *Phalangio parietino* De Geer esse solet) incrassatus, patella II. subter spiculis minutis non multis ornata, patella IV., tibiae et metatarsi pedum II. et IV. inermia. — Feminarum truncus ad 6·5 mm longus, vix evidenter granulatus, in segmentis anterioribus saltem obsolete denticulatus.

Phalangia: saxatile et *parietinum* adeo variant notis, quibus ab auctoribus distinguuntur, ut vix pro speciebus propriis haberi possint. Occurrunt exempla *Phalangii saxatilis* maiora quam *Phalangium parietinum;* forma metatarsi I., armatura palporum et pedum inconstans est, tibiae feminarum in utraque „specie" eâdem formâ mihi videntur. Reliquis notis, quae ad distinguendas has formas adhibentur, melior mihi videbatur sculptura trunci: granulati in *Ph. parietino,* granulis carentis in *Ph. saxatili* [1]; sed non desunt specimina (ex. gr. ea, quae in insulâ Cretâ lecta sunt) etiam in hac re media inter *Phalangium parietinum* et *Ph. saxatile.*

Platybunus strigosus (L. Koch).

Non sine haesitatione exempla in Cretâ lecta *Platybuno strigoso* subiunxi, quoniam tibiae eorum manifeste angulatae sunt; ceterum parum differunt ea a descriptione *Platylophi strigosi,* quam protulit Cel. Dr. L. Koch [2]): pallidius colorata sunt (probabiliter nuper adulta), tuberculum oculorum denticulis paullo paucioribus (ca. 8) ornatur, pars tibialis palporum dente subter sito caret. Cephalothorax inter tuber oculorum et marginem anticum denticulis 16—22 ornatur. — Feminae truncus 7 mm, femur + patella + tibia + metatarsus pe-

[1]) In utraque specie truncus tectus est granulis minutissimis, valde confertis, inter quae in *Phalangio parietino* adulto — non vero in iuveni! — granula maiora non pauca conspiciuntur, in *Ph. saxatili* autem nulla aut perpauca.

[2]) Zur Arachniden- und Myriapoden-Fauna Süd-Europas. (Verhandl. d. k. k. Zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien, 1867).

dum I. 11·5 mm, pedum II. 20·5, III. 12, IV. 17·5, maris truncus 6 mm, pedum I. partes commemoratae 13·2, II. 23, III. 14·5, IV. 20·5 mm longae.

Explicatio tabulae I.

1. *Macrothele cretica* n. sp., partes patellaris, tibialis, tarsalis palpi dextri maris.

2. *Minotauria Attemsi* n. sp., partes tibialis et tarsalis palpi sinistri maris.

3. Eiusdem speciei bulbus genitalis sinister a fronte visus.

4. *Prosthesima cretica* n. sp., epigyne.

5. *Holocnemus labyrinthi* n. sp., bulbus genitalis sinister a latere interiore visus.

6. Eiusdem speciei palpus sinister maris a latere exteriore visus, bulbo genitali omisso.

7. Eiusdem speciei epigyne.

8. *Thanatus vulgaris* E. Sim. subsp. *brevipes* n., apex bulbi genitalis sinistri ab imo visus.

9. *Thanatus vulgaris* E. Sim. subsp. *maderiana* n., apex bulbi genitalis sinistri a fronte visus.

10. Eadem pars *Thanati vulgaris brevipedis.*

11. *Pterotricha lentiginosa* (C. L. Koch), epigyne.

12. *Thanatus vulgaris brevipes*, epigyne.

13. *Thanatus vulgaris* E. Sim. subsp. *cretica* n., apex bulbi genitalis sinistri a parte inferiore, simulque paullo a latere exteriore antico visus.

14. *Thanatus vulgaris maderianus*, apex bulbi genitalis sinistri ab imo visus.

15. Eadem pars *Thanati vulgaris typici.*

16. *Thanatus vulgaris typicus*, epigyne.

17. *Habrocestum latifasciatum* (E. Sim.), epigyne.

18. *Textrix cretica* n. sp., epigyne.

---

6. **Sprawozdanie Komisyi fizyograficznej, tom XXXVI.** ***(Comptes-rendus de la Commission de physiographie, vol. XXXVI).*** *(Bericht der physiographischen Kommission, Bd. XXXVI.)*

1. **Berichte:** I. Bericht über die Tätigkeit der physiographischen Kommission im J. 1900/1901. (S. V—XXI). II. Verzeichnis der Mitglieder der physiographischen Kommission. (S. XXI—XXV). III. Kassa-Bericht für das Jahr 1900/1901. (S. XXVI—XXVIII).

2. **Nekrologe:** Dr. Daniel Wierzbicki von Prof. Dr. Karliński (S. XXVIII—XXXI); Graf Franz Mycielski von Dr.

W. Klecki (S. XXXII—XXXV); Kasimir Bobek von W. Kulczyński (S. XXXVI—XXXVIII).

3. **Materialien zur Physiographie des Landes.** (S. [1—208]. 1—85 und 1—145):

I. Von der meteorologischen Sektion gesammelte Materialien.

Wypadki spostrzeżeń meteorologicznych dokonanych w Galicyi w r. 1900, zestawione w c. k. Obserwatoryum astronomicznem krakowskiem pod nadzorem Prof. Dra Karlińskiego. (***Meteorologische Beobachtungen in Galizien im J. 1900,*** zusammengestellt von der k. k. Sternwarte in Krakau unter der Aufsicht von Prof. Dr. Karliński). (*Résultats des observations météorologiques effectuées en Galicie en 1900*, réunis par l'Observatoire de Cracovie sous la direction de M. Karliński). S. [3—191].

Die Namen der einunddreissig im Jahre 1900 tätig gewesenen meteorologischen Stationen werden nebst deren geogr. Lage und Seehöhe sowie auch den Namen der betreffenden Beobachter in der Tabelle S. [3—4] aufgeführt. Auf Grund des von den Stationen gelieferten Beobachtungsmaterials werden auf S. [8—191] folgende Mittelwerte. resp. Summen u. s. w. angegeben: S. [8—55] Lufttemperatur: arithmetische Tages- und Monatsmittel, beobachtete Minima und Maxima (absolut nur von: Bielitz, Krakau, Lemberg, Dublany und Tarnopol); S. [56—71] Luftdruck: arithmetische Tages- und Monatsmittel, beobachtete Minima und Maxima (absolut nur von Bielitz und Krakau); S. [72—107] Windrichtung: Tagesmittel, Summen der beobachteten Windrichtungen und - Stillen; S. [108—143] Bewölkung: Tages- und Monatsmittel; S. [144—197] atmosphärischer Niederschlag: Tages- und Monatssummen. Für die während des ganzen Jahres tätig gewesenen Stationen wurden berechnet (S. [6]): korrigierte Jahresmittel der Lufttemperatur, Jahressumme des Niederschlages, Jahresmittel des Luftdruckes. Die Lufttemperatur war durchschnittlich um 0·6° C höher als im Jahre 1899 (die Differenz beträgt für Saybusch, Pilzno, Łomna +1·1° C, für Sambor 0°, für Dolina —0·2° C); der Niederschlag war im allgemeinen geringer, sonst aber sehr ungleichmässig verteilt (in Zakopane 513 mm weniger, in Łomna 173 mm mehr als im J. 1899); das Jahresmittel des Luftdruckes weist (mit Ausnahme von Krynica: —1·3 mm) im Vergleich mit dem J. 1899 nur geringe Unterschiede auf.

J. ZAJĄCZKOWSKI. **Grady w roku 1900.** ***(Die Hagelschläge im J. 1900).*** *(Les grêles en 1900).* S. [192—195].

Die vorliegende Zusammenstellung beruht hauptsächlich auf Angaben der Assekuranzgesellschaften: „Towarzystwo wzajemnych ubezpieczeń" in Krakau und „Phönix" in Wien. Die Hagelperiode des J. 1900 umfasste wie in den vorigen Jahren vier Monate: Mai bis August. Ausgedehnte Hagelschläge fanden am 16. Mai, am 8., 15. und 27. Juni, am 7., 23. und 30. Juli, am 5., 6., 10. und 11. August statt, sonst wurden 38 Tage mit sporadischen Hagelschlägen notiert, u. zw. im Mai 5 Tage (vom 1. angefangen), im Juni 10, im Juli 11 und im August 11 (bis zum 28. VIII). Die Zahl der von der Kalamität betroffenen Gemeinden beträgt 330; 36 Gemeinden wurden je zweimal und 7 Gemeinden je dreimal heimgesucht.

J. ZAJĄCZKOWSKI. **Pioruny w roku 1900.** ***(Blitzschläge im J. 1900).*** *(La foudre en 1900).* S. [196].

Nach Zeitungsberichten wurden in Galizien vom Blitz 38 Menschen getötet, 26 gelähmt, 59 Wohnhäuser und Wirtschaftsgebäude in Brand gesetzt.

Spostrzeżenia pojawów w świecie roślinnym i zwierzęcym w r. 1900. ***(Zoo- und phytophänologische Beobachtungen im Jahre 1900).*** *(Observations zoologiques et phytophénologiques faites en 1900).* S. [196—208].

Phänologische Beobachtungen wurden auf drei Stationen: Czernichów, Jaćmierz und Ożydów vorgenommen. Als Resultat dieser Beobachtungen werden aufgeführt: die auf zwei oder allen drei Stationen notierten Zeiten der Belaubung, des Aufblühens, des Fruchtreifens und des Laubfalles (S. [196—202]), der Ankunft und des Wegzuges der Vögel (S. [204—205]), des ersten Erscheinens einiger Säugetiere, Kriechtiere, Lurche und Insekten (S. [206—207]). Die betreffenden, auf je nur einer Station beobachteten Zeiten werden auf S. [203—204] und [208] angegeben.

II. Von der zoologischen Sektion gesammelte Materialien.

T. DYDUCH. **Materyały do fauny krajowych równonogów (Isopoda).** ***(Materialien zu einer Isopodenfauna Galiziens).*** *(Contribution à la connaissance de la faune des Crustacés Isopodes de la Galicie).* S. 3—10.

Die in diesem Beitrage angeführten Isopodenarten bilden keineswegs ein vollständiges Verzeichnis der galizischen Fauna. Es unterliegt keinem Zweifel, dass man mit der Zeit noch vieles in dem Gebiete finden und die Artenzahl zumindest verdoppeln wird, zumal die Untersuchungen auf verhältnismässig wenige Lokalitäten beschränkt werden mussten. Das zusammengebrachte Material dürfte indessen genügen, um die Isopodenfauna des Landes im allgemeinen zu charakterisieren. Gesammelt hat der Verf. vorwiegend in der Umgebung von Krakau und in gebirgigen Gegenden Westgaliziens, teilweise aber auch in Zentral- und Ostgalizien. Das in jeder Rücksicht interessante Tatragebirge blieb leider fast unberührt; im Gebiete der Babia Góra, des höchsten Gipfels der westgalizischen Karpaten (1725 Meter), den der Verf. mehrmals und gründlich zu durchsuchen Gelegenheit hatte, wurde merkwürdigerweise kein einziges Exemplar gefunden, obschon alles dafür spricht, dass auch dort, zumal die Waldregion (Buchenbestände) von Isopoden bewohnt wird.

Die Sammlung enthält 13 Arten der Landisopoden und eine einzige in ganz Europa bekannte Süsswasserform: *Asellus aquaticus* L. Die meisten der gefundenen Arten dürften in ganz Galizien verbreitet sein; auch lassen sich keine speziell für Laub- Nadelwälder, Sandstein- und Kalkfelsen, Gebirge und Flachland charakteristischen Formen nachweisen; die meisten sind überall zu finden, nur die Häufigkeit ist verschieden.

Die Feststellung der verzeichneten Arten wie auch alle wertvollen Anmerkungen über sonstige geographische Verbreitung derselben verdankt der Verf. dem Herrn A. Dollfus, Korrespondenten des Museums in Paris, einem der besten Kenner der Isopoden, der die Kollektion sehr gründlich durchmustert und für manche in zahlreichen Exemplaren gesammelte Species, deren systematische Merkmale nach den bisherigen Beschreibungen zweifelhaft waren, neue charakteristische Kennzeichen angegeben hat.

Es wurden folgende Arten vom Verf. gesammelt:

1. *Armadillidium pictum* Brandt (selten).
2. *Cylisticus convexus* De Geer sp. *(Oniscus)* (sehr zahlreich).
3. *Porcellio Ratzeburgi* Brandt (selten).
4. *P. Rathkei* Brandt (zahlreich).
5. *P. affinis* Koch (zahlreich).
6. *P. conspersus* Koch (sehr selten).
7. *P. scaber* Latreille (zahlreich).
8. *P. pictus* Brandt (besonders zahlreich in Schlossruinen).
9. *P. politus* Koch nec Budde-Lund (ziemlich selten).
10. *Metoponorthus major* Dollfus = *M. orientalis* Budde-Lund pro parte, nec Uljanin (in Wohnungen gemein).
11. *Oniscus asellus* L. (zahlreich).
12. *Trichoniscus viridus* Koch sp. *(Itea)* = *Philoscia notata* Waga = *T. viridus* BL. pro parte. (selten).
13. *Ligidium hypnorum* Cuvier (nicht selten).
14. *Asellus aquaticus* L. [1]) (gemein).

Herr A. Dollfus hat, wie es schon oben erwähnt wurde, für manche zweifelhafte Species neue, genaue Kennzeichen angegeben. Die Bemerkungen betreffen vor allem *Porcellio Rathkei* Brandt und *P. affinis* Koch, *P. politus* Koch und *P. Gallicus* Dollfus, *Metoponorthus major* Dollfus und *M. orientalis* Uljanin.

P. Rathkei und *P. affinis* sind sehr ähnlich, wenn man dieselben oberflächlich betrachtet, und wurden oft als eine Art beschrieben. Der Unterschied zwischen beiden besteht darin, dass *P. Rathkei* mehr konvex und seitlich gedrungen ist, als *P. affinis*, beim ♀ ist am Rücken unter kleinen Fleckchen immer ein länglicher, hellerer Streifen bemerkbar, der bei *P. affinis* entweder vollkommen verschwindet oder nur schwach angedeutet ist; beim ♂ der ersteren Art befindet sich am Exopodit des ersten Pleopodenpaares ein kurzer Fortsatz, der dagegen beim ♂ *P. affinis* sehr deutlich und verhältnismässig viel länger ist. (Fig. 1 und 2 nach A. Dollfus).

Dasselbe ist über *P. politus* Koch und *P. Gallicus* Dollfus zu bemerken. Budde-Lund hat unter dem Namen *P. politus* eine andere in Süd- und Westeuropa verbreitete Form zusammen mit

[1]) Über die Verbreitung dieser Art haben W. Kulczycki und Z. Fiszer bereits früher berichtet. Hier sei bloss bemerkt, dass Asellus neuerdings auch im Tatragebirge gefunden wurde, und zwar in einem ziemlich niedrig gelegenen Tale (ca. 1000 Meter), wogegen er in der alpinen Region des Gebirges zu fehlen scheint.

dem echten *P. politus* beschrieben; dem allgemeinen Habitus nach stimmen wirklich die beiden Arten überein, der Bau der Abdomi-

Fig. 1. *Porcellio Rathkei* Brandt, ♂
Exopodit des 1. Pleopodenpaares.

Fig. 2. *Porcellio affinis* Koch, ♂
Exopodit des 1. Pleopodenpaares.

nalfüsschen hat jedoch Herrn A. Dollfus Anlass gegeben, die südeuropäische Form von dem *P. politus* Koch zu trennen und als *P. Gallicus* Dollfus zu beschreiben. *P. Gallicus* ♂ hat am 1. Pleo-

Fig. 3. *Porcellio Gallicus* Dollfus, ♂
a Exo-, *b* Endopodit
des 1. Pleopodenpaares.

Fig. 4. *Porcellio politus* Koch, ♂
a Exo-, *b* Endopodit
des 1. Pleopodenpaares.

podenpaare einen langen und glatten Endopodit, am Exopodit dagegen einen deutlichen Einschnitt, während bei *P. politus* der Einschnitt fehlt und der Endopodit an der Spitze mit zwei Fortsätzen versehen ist, einem apicalen und einem seitlichen (Fig. 3 und 4 nach Dollfus.)

Eine genaue Untersuchung der Pleopoden bei Männchen der galizischen Isopoden wurde auch von Herrn A. Dollfus bei der Art *Metoponorthus major* Dollfus vorgenommen, die wahrscheinlich zusammen mit *M. orientalis* Uljanin aus Turkestan und dem diesem gleichenden *M. sinensis* aus China beschrieben wurde. *M. major* Dollfus dürfte eine Form umfassen, die in Rumänien, Königreich Polen und Russland, gewissermassen auch in Zentralasien ziemlich verbreitet und mit *M. orientalis (sensu lato)* leicht zu ver-

Fig. 5. *Metoponorthus major* Dollfus, ♂
Exopodit des 1. Pleopodenpaares.

Fig. 6. *Metoponorthus orientalis* Ulj., ♂
Exopodit des 1. Pleopodenpaares.

wechseln wäre. Die Figuren 5 und 6 stellen die Unterschiede im Bau der Exopodite bei Männchen der beiden Arten am besten dar und erlauben dieselben als ganz verschiedene Formen zu betrachten. *M. orientalis* Uljanin aus Turkestan ist vor allem viel kleiner als *M. major* Dollfus und ist ausserdem durch die in den Figuren 5 und 6 ausgeprägten Formenunterschiede der Pleopodenexopodite genau charakterisiert.

In dem oben angeführten Verzeichnis dürfte besonders der vollständige Mangel mehrerer sonst in ganz Europa verbreiteten Formen auffallen; es fehlen z. B. *Philoscia muscorum* Scop., *Armadillidium vulgare*, das in Böhmen ziemlich häufige *Ligidium amethystinum* Schöbl u. a. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass alle diese Arten auch in Galizien vorkommen. Andererseits wäre das überraschend häufige Auftreten von *Cylisticus convexus* De Geer hervorzuheben.

Im allgemeinen stimmt der Charakter der Isopodenfauna Galiziens mit demjenigen von Zentral-Europa überein, es kommen aber gewisse Arten, wie *Porcellio affinis* und *Metoponorthus major* vor, die sonst östlichen Distrikten Europas angehören. Als eine für Galizien (und für Böhmen) charakteristische Art ist *Porcellio politus* zu nennen.

J. L. M. ŁOMNICKI. **Elater Wiśniowskii, nov. sp.** S. 11—12.

In den miocänen Tonen bei Myszyn, südlich von Kolomea in Ostgalizien wurde von Dr. Wiśniowski unter Abdrücken von Blättern auch ein Teil der rechten Flügeldecke eines neuen Schnellkäfers gefunden. Das dem Verfasser mitgeteilte Unicum, obwohl nicht besonders gut erhalten, liess doch eine Determination zu.

Das Tier gehört zu einer dem recenten *Elater ferrugatus* Lac. verwandten Art, von welcher es doch durch mehr ebene Streifenzwischenräume abweicht. Es bewohnte wahrscheinlich die Laubwälder am Strande des obermiocänen Mittelmeeres. Die lateinische Beschreibung des Bruchstückes lautet:

E. elytris elongatis, subdepressis, apicibus subacutis, angulis humeralibus et scutellaribus obtusis et rotundatis; unaquaque striis punctatis bene adhuc serratis septem ornata; striis prima et secunda usque ad apicem liberis, tertia et quarta ante apicem, quinta cum sexta etiam propius ad apicem coniugatis; striarum interstitiis planis et paribus, irregulariter rugulosis. Long. elytrae: 9 mm., lat.: 2·25 mm.

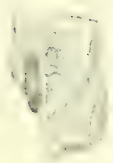


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Explicatio figurarum.

1. Elytrae in argilla vestigium verae magnitudinis.
2. Elytra separatim delineata. Diam. × 6·3.
3. Imago reficta. Diam. × 5.

J. L. M. ŁOMNICKI. **Otiorrhynchus bisulcatus F., gatunek chrząszcza nowy dla fauny galicyjskiej. (*Otiorrhynchus bisulcatus F., eine für die Käferfauna Galiziens neue Art*).** *(Otiorrhynchus bisulcatus F., une espèce de coléoptère nouvelle pour la faune de la Galicie).* S. 13.

Von der genannten Art fand Verf. am 31. Mai 1900 einige Exemplare auf Haselsträuchern in Sadzawka (westlich von Kolomea in Ostgalizien). Später hat es sich herausgestellt, dass der Käfer an jener Stelle gar nicht selten ist und in grösserer Anzahl etwas früher im Mai erscheint. Von Dalmatien, Illyrien und Kroatien früher bekannt, gehört dieser Rüsselkäfer zu den südlicheren Elementen unserer Fauna.

F. SCHILLE. **Fauna lepidopterologiczna doliny Popradu i jego dopływów. Część V. *(Die Lepidopterenfauna des Poprad-Tales und seiner Zuflüsse. V. Teil).*** *(La faune des lépidoptères de la vallée du Poprad et de ses affluents. 5-e mémoire).* S. 14—17.

Verf. führt folgende im J. 1900 gesammelte Lepidopteren als neu für die Gegend von Rytro auf: *Erebia medusa* F., *Epinephele lycaon* Rott., *Pleretes matronula* L. ab. *haliciaca* Schille. *Harpyia erminea* Esp., *Plusia gutta* Gn., *Hibernia marginaria* Brkh., *Ematurga atomaria* L. ab. *unicoloraria* Stgr., *Cidaria truncata* Hfn. ab. *ochreata* Schille, *C. quadrifasciaria* Cl. ab. *atrofasciaria* Schille. *C. viridaria* F. ab. *derasaria* Schille. *C. trifasciata* Brkh. ab. *obsoletaria* Schille. *Cledeobia angustalis* Schiff., *Odontia dentalis* Schiff., *Scirpophaga praelata* Sc., *Crambus alpinellus* Hb., *Teras hastiana* L. ab. *mayrana* Hb., *T. lipsiana* Schiff., *Tortrix musculana* Hb., *Grapholitha solandriana* L. v. *trapezana* F., *Dichrorampha cacaleana* H. S., *Blabophanes ferruginella* Hb., *Cerostoma nemorella* L., *C. dentella* F., *Lita vicinella* Dgl., *Oecophora similella* Hb., *Oe. schaefferella* L. — Im Gebirge bei Sołotwiny fand Verf.: *Mesagona oxalina* Hb.

S. SMRECZYŃSKI. **Zapiski ortopterologiczne z roku 1900. *(Orthopterologische Notizen aus dem J. 1901).*** *(Notices orthoptérologiques se rapportant à l'année 1901).* S. 18—20.

Der Verfasser führt zuerst 23 Arten von Dermatopteren und Orthopteren auf, die er in Gorce, einer Gebirgsgegend im Bezirk Limanowa in Galizien, gesammelt hat.

Weiter notiert er eine für Galizien neue Art: *Tettix Kraussi* Saulcy und eine für das Grossherzogtum Krakau neue Art: *Meconema varium* Fab.

Endlich korrigiert er die Anmerkung, welche er vorher in seinem „Przyczynek do fauny galicyjskich szarańczaków“ 1901. bei den Arten *Stenobothrus biguttulus* L. und *bicolor* Charp. gemacht hatte und die er auch später im Werke Dr. Tümpel's „Die Geradflügler Mitteleuropas“ fand, es seien dies nämlich erst neu entstehende Arten oder sogar nur durch zahlreiche Übergänge verbundene Formen einer sehr veränderlichen Art. Verf. hat nämlich beobachtet, dass die Stridulationsart bei diesen zwei Arten wesentlich verschieden ist und dass sich Männchen dieser Arten durch dieselbe und durch die Kennzeichen, welche Prof. Redtenbacher in seinem Werke: „Die Dermatopteren und Orthopteren von Österreich-Ungarn“ gibt, gut von einander unterscheiden lassen.

M. KOWALEWSKI. **Materyały do fauny helmintologicznej pasorzytniczej polskiej, III.** *(Materials for polish helminthological parasitic fauna, III). (Contribution à la connaissance de la faune helmintologique parasitaire de la Pologne).* (S. 21—30).

The present third list of parasitic worms contains 5 species of Trematoda, 8—of Cestoda and 10—of Nematoda found by the author in various animals in Dublany (Galicia), during the last 5 years. Among them are two species determined by Dr. O. von Linstow as new: Filaria rotundicaudata v. Linst. (1902) from the thoracal cavity of Garrulus glandarius L. and Agamonema Bembidii v. Linst. (1902) from the body-cavity of Bembidium fasciolatum Duft. — Taenia Conardi Zürn (1898) is cited as a very common parasit of chickens in Dublany. For Echinostoma spathulatum Rud. (1819) a new generic name: Sodalis is proposed. In the preface the author gives a synoptic table of all the parasitic worms found by him during the years 1894—1901. There are 42 species of Trematoda, 35 of Cestoda, 23 of Nematoda and 4 of Acanthocephali; total: 105 species of adult worms and 7 of larval forms. More than 300 specimens of various animals, especially of birds, were examined.

E. L. NIEZABITOWSKI. **Materyały do fauny os (Vespidae) Galicyi.** *(Materialien zur Vespiden-Fauna Galiziens. (Contribution à la connaissance de la faune des Vespides de la Galicie).* (S. 31—35).

Verfasser gibt ein Verzeichnis von 39 Vespiden-Arten, welche in Galizien teils von ihm selbst, teils von Prof. W. Kulczyński, J. Cieślik, Prof. K. Bobek, Prof. J. Łomnicki, Prof.

A. Wierzejski, Prof. B. Kotula und Ing. St. Stobiecki gesammelt worden sind. Neu für Galizien sind 7 (resp. 9) Arten, so dass die Zahl der in Galizien bisher gefundenen Arten 41 beträgt. Diese Liste stellt sich gegenwärtig so vor: *Discoelius zonalis* Latr., *Eumenes arbustorum* Panz., var. *dimidiata* Brullé, *E. coarctata* Latr., *pomiformis* Fabr., *Odynerus antilope* Wasm., *bifasciatus* H. Schaeff., *callosus* Thom., *crassicornis* Wesm., *debilitatus* Sauss., *fuscipes* Herr. Schaeff., *gazella* Wesm., *germanicus* Sauss., *gracilis* Brullé, *helvetius* Sauss., *Herrichii* Sauss., *levipes* Schuck., *melanocephalus* Wesm., *minutus* Lep., *nidulator* Sauss., *parietum* Latr., *parvulus* Lep., *quadrifasciatus* Herr. Schaeff., *reniformis* Wesm., *simillimus* Mor., *sinuatus* Spin., *spinipes* Spin., *trimarginatus* Zett., *Pterocheilus phaleratus* Klug. *Polistes biglumis* Panz., *gallica* Latr., *Vespa austriaca* Panz., *crabro* L., *germanica* Fabr., *media* Retz., *norvegica* Fabr., *rufa* L., *saxonica* Fabr. *silvestris* Scop., *vulgaris* L.

F. SCHILLE. **Fauna lepidopterologiczna doliny Popradu i jego dopływów. Część VI.** ***(Die Lepidopterenfauna des Poprad-Tales und seiner Zuflüsse. VI. Teil).*** *(La faune des lépidoptères de la vallée du Poprad et de ses affluents. 6-e mémoire).* S. 36—39.

Als neu für die in der Aufschrift genannte Gegend werden aufgeführt: *Lymantria monacha* L. ab. *eremita* O., *Polia chi* L., *Cucullia lucifuga* Hb., *Epione parallelaria* Schiff., *Hybernia defoliaria* Cl. ab. *obscurata* Stgr., *Nudaria mundana* L., *Crambus tristellus* F. ab. *culmella* Hb., ab *paleella* Hb., ab. *fuscelinellus* Stph. und ab. *aquilella* Hb., *Nymphula nymphaeata* L., *Scoparia murana* Curt., *Cacoecia piceana* L., *Tortrix paleana* Hb., *Olethreutes capreana* Hb., *O. ericetana* Westw., *Gelechia atriplicella* F. R., *Chrysopora stipella* Hb., *Ypsolophus juniperellus* L., *Borkhausenia stroemella* F., *Coleophora chamaedryella* Z., *Lithocolletis emberizaepennella* Bouché, *Tinea lapella* Hb., *Nemotois auricellus* Rag.

S. KLEMENSIEWICZ. **O nowych i mało znanych gatunkach motyli fauny galicyjskiej. Przyczynek trzeci.** ***(Über neue und wenig bekannte Arten der galizischen Schmetterlingsfauna, 3-ter Beitrag).*** *(Lépidoptères de la Galicie nouveaux ou peu connus. 3-me supplément).* S. 40—76.

In diesem Beitrage werden über 200 seltenere Arten samt Varietäten und Aberrationen galizischer Schmetterlinge bezüglich ihrer Verbreitung im Lande sowie mancher wichtigeren morphologischen

und biologischen Erscheinungen in systematischer Reihenfolge besprochen. In der Einleitung wird unter anderem über die im letzten Jahre erschienene einschlägige Literatur sowie über die Zahl der in Galizien bisher vorgefundenen Schmetterlingsarten unter Zugrundelegung der im neuesten Staudinger-Rebel'schen Kataloge eingeführten Einteilung berichtet.

Neu für Galizien sind folgende, grösstenteils in der Umgebung von Lemberg beobachtete Formen:

Argynnis Niobe L., *ab. Pelopia* Bkh., *Thecla Ilicis* Esp. *ab. Delineata nov. ab.*, *Zephyrus Quercus* L. *ab.* ♀ *Bellus* Gerh., *Lycaena Icarus* Rott. *ab. Icarinus* Scriba, *ab.* ♀ *Caerulea* Fuchs. *Agrotis Polygona* F., *Punicea* Hb., *Xanthographa* F., *Bryophila Algae* F. *v. Mendacula* Hb., *Luperina Zollikoferi* Frr. Diese seltene Art wurde in Białohorszcze bei Lemberg anfangs September 1896 am Köder entdeckt. Der Schmetterling saugt den Honig nach Art der Schwärmer, indem er in der Luft schwebend seinen langen Rüssel in denselben einführt. *Nonagria Geminipuncta* Hatchett., *Tapinostola Hellmanni* Ev. Bisher in 3 Exempl. bei Lemberg gefunden. *Leucania Impudens* Hb., *Calpe Capucina* Esp. Viele Exemplare gefunden in Białohorszcze bei Lemberg; der Schmetterling fliegt von Anfang Juli fast bis Ende August. *Herminia Cribrumalis* Hb., *Anaitis Plagiata* L. *ab. Pallidata* Stgr., *Lobophora Halterata* Hufn. *ab. Zonata* Thnbg., *Larentia* Tr. *Tristata* L. *ab. Luctuolata ab. nov.*, *Hydrata* Tr., *Tephroclystia Actaeata* Wald., *Millefoliata* Rössl., *Pygmaeata* Hb., *Chloroclystis Rectangulata* L. *ab. Cydoniata* Bkh., *Biston Hirtaria* Cl. *v. Hanoviensis* Heym., *Strataria* Hufn. *ab. Terrarius* Weym., *Gnophos Ambiguata* Dup. *v. Vepretaria* Spr. Diese interessante Art wurde in mehreren Exemplaren in Brzuchowice bei Lemberg am Licht gefangen; sie scheint hier nur in der seltenen Form *v. Vepretaria* vorzukommen. *Zygaena Achilleae* Esp. *ab.*, eine der *v. Arragonensis* Stgr. nahe kommende Form. *Meliloti* Esp. *v. Stentzii* Frr., *Ephialtes* L. *ab. Coronillae* Esp., *Angelicae* O. *ab. Doleschalli* Rühl, aufgefunden bei Lemberg in einem Exemplar mit vollkommen citrongelben Hinterflügeln und Flecken der Vorderflügel, *Carniolica* Sc. *v. Berolinensis* Stgr. Ein Exemplar mit rotem Hinterleibsgürtel. *Rebelia Plumella* H. S., *Scoparia Zelleri* Wck., *Pterophorus Distinctus* H. S., *Acalla Cristana* F. *ab. Desfontainana* F., *ab. Psorana* Froel., *ab. Costimaculana* Wck., *Ferrugana* Tr. *ab. Selasana* H. S., *Contaminana* Hb. *ab. Dimidiana* Froel., *Pandemis Corylana* F. *ab. „unicolor“*, *Tortrix Rolandriana* L., *Evetria Posticana* Zett., *Si-*

derana Tr., *Epiblema Pusillana* Peyer., *Nisella* Cl. *ab. Dorsimaculana ab. nov.*, *Grapholitha Microgrammana* Gn., *Pamene Gallicolana* Z., *Rhopobota Naevana* Hb. *v. Geminana* Stph., *Argyresthia Dilectella* Z., *Cerostoma Radiatella* Don. *ab „alba“*, *Metzneria Metzneriella* Stt., *Gelechia Oppletella* H. S., *Lita Sesteriella* H. S., *Teleia Luculella* Hb. *ab. Dealbella ab. nov.*, *Aystophora Conspersella* H. S. bei Brody. anfangs Juni 1898, *Anacampsis Vorticella* Sc. *ab.* ♂ *Destrigella ab. nov.* bei Lemberg, *Aristotelia Brizella* Tr., *Apodia Bifractella* Dgl., *Depressaria Scopariella* Hein., *Borkhausenia Augustella* Hb., *Borkhausenii* Z., *Epermenia Scurella* H. S., *Scythris Dissimilella* H. S., *Coleophora Badiipennella* Dup., *Solitariella* Z., *Ballotella* F. R., *Ibipennella* Z., *Lineolea* Hw., *Expressella spec. nov.*, *Elachista Luticomella* Z., *Dispilella* Z., *Gracilaria Limosella* Z., *Ornix Insperatella* Nick. Entdeckt bei Lemberg in der Nähe von Weissbuchen. Ahornen und Traubenkirschen. *Lithocolletis Cydoniella* F., *Cerasicolella* H. S. *ab. Mahalebella* Mühl., *Blancardella* F., *Mespilella ab. Schiltei ab. nov.*, *Junoniella* Z., *Bucculatrix Maritima* Stt., ? *Humiliella* H. S. *ab. nov.*, *Nepticula Septembrella* Stt., *Catharticella* Stt., *Tinea Angustipennis* H. S.

Die Diagnosen der neuen Formen sind folgende:

Thecla Ilicis Esp. *ab. Delineata ab. nov. „Alis anter. et poster. subtus lineis albis nullis“*; nicht *v. Esculi* Hb., bei der sich stets noch eine verloschene weisse Querlinie auf der Unterseite, wenigstens der Hinterfl. vorfindet.

Larentia L. *ab. Luctuolata ab. nov. „Alis fusco nigris, area media non albo signata, fasciis albis nigro punctatis angustioribus terminata“*; gefunden in Muszyna am Popradflusse.

Epiblema Nisella Cl. *ab. Dorsimaculana ab. nov.* (Fig. 1) *„Alis anter. dilute cinereis, macula dorsali magna flammaeformi nigra“*. Ausgezeichnet durch den grossen sammetschwarzen Dorsalfleck; gezogen in mehreren Exemplaren in Lemberg.

Teleia Luculella Hb. *ab. Dealbella ab. nov. „Major, alis anter. griseis, in medio macula rotundata saturate ochracea“*. Vielleicht eigene Art, von *Luculella* unterschieden durch bedeutendere Grösse (Länge des Vorderfl. 6 mm.), hellere graue Grundfarbe und gänzlichen Mangel weisser Stellen auf den Vorderflügeln. Gezogen ex l. auf *Salix caprea* in zwei ganz gleichen Exemplaren.

Anacampsis Vorticella Sc. *ab.* ♂ *Destrigella ab. nov. „Alarum anter. loco fasciae macula costali punctoque opposito albidis“*. Eine durch sexuellen Dimorphismus ausgezeichnete, vielleicht neue Form. Gefunden

bei Lemberg in zwei vollkommen gleichen Paaren *in copula*. Das ♀ stimmt recht gut mit *Vorticella* Sc.

Coleophora Expressella spec. nov. (Fig. 2). *„Alis anterioribus fusco ochraceis, dense nigro inspersis, dimidio dorsali multo dilutioribus, striga costali alba, strigis latis discoidali, plicae et dorsali albis, dense grosseque nigro irroratis; l. al. ant 8½ mm.“* Der *Directella* Z. nahe, von ihr durch andere Form und Farbe der Vorderfl. unterschieden.

Lithocolletis Mespilella Hb. *ab. Schillei ab. nov.* (Fig. 3). *„Alae anteriores in medio margine anteriore atque interiore una solum macula alba oblonga, quarum dorsalis major irregularisque cum stria basali*

Fig. 1. *Epiblema Nisella Cl.*
ab. Dorsimaculana ab. nov.

Fig. 2. *Coleophora*
Expressella spec. nov.

Fig. 3. *Lithocolletis? Mespilella Hb.*
ab. Schillei ab. nov.

Fig. 4. *Bucculatrix*
? Humiliella H. S.

juncta; ceteroquin hamuli albi nulli; striga nigra interapicalis crassa et longa“. Eine prächtige Aberration eher zu *Mespilella* Hb. als zu *Sorbi* Frey. gehörig. Die weissen Zeichnungen sind nicht schwarz gesäumt. Gezogen in Lemberg auf Blättern von *Sorbus aucuparia*.

Bucculatrix? Humiliella H. S. (Fig. 4). Eine der *Bucc. Humiliella* H. S. fig. 859. nahe kommende Form. Von den drei Vorderrandsflecken ist der zweite sehr gross und mit dem ihm gegenüberliegenden Dorsalfleck zu einer unregelmässigen Querbinde vereint.

Von den übrigen Arten wären noch als besonders interessant folgende zu erwähnen:

Dichonia Aprilina L., *Amphipyra Livida* F., *Cucullia Tanaceti* Schiff. S. V., *Hypenodes Taenialis* Hb. (bei Lemberg und Stanislau), *Tholomiges Turfosalis* Wck. (Brody, Lemberg, Stanislau), *Tephroclystia*

Indigata Hb., *Pumilata* Hb., *Collix Sparsata* Tr., *Scoparia Murana* Curt., *Pterophorus Lithodactylus* Tr., *Conchylis Richteriana* F. R., *Grapholitha Nigricana* H. S., *Janthinana* Dup., *Pamene Populana* F., *Theristis Mucronella* Sc., *Gelechia Peliella* Tr.; *Continuella* Z., *Lita Kiningerella* H. S., *Leucomelanella* Z., *Apodia Gerronella* Z., *Mompha Lacteella* Stph., *Coleophora Directella* Z., *Elachista Rufocinerea* Hw., *Nepticula Argentipedella* Z.

F. SCHILLE. **Materyały do fauny owadów siatkoskrzydłych i szarańczaków doliny Popradu.** (***Materialien zur Neuro- und Orthopterenfauna des Poprad-Tales***). (*Contribution à la connaissance de la faune des Névroptères et des Orthoptères de la vallée du Poprad*). S. 77—85.

Verf. gibt ein Verzeichnis der von ihm in den J. 1900 und 1901 in der Gegend von Rytro gesammelten Neuropteren (42 Arten), Orthopteren (26 Arten) und Pseudoneuropteren (incl. Thysanoptera: 59 Arten). Neu für Galizien sind von Neuropteren: *Hydroptila sparsa* Curt. und *Hemerobius orotypus* Wallgr. — Aus der bisher in Galizien vernachlässigten Abteilung der Thysanoptera führt Verf. folgende Arten auf: *Melanothrips fusca* Sulz., *Aeolothrips fasciata* L., *Sericothrips staphylinus* Halid., *Physopus vulgatissima* Halid. und var. *adusta* Uzel. *Ph. atrata* Halid. und var. *adusta* Uzel. *Ph. pallipennis* Uzel. *Ph. ulicis* Halid., *Anaphothrips ferruginea* Uzel, *Parthenothrips dracaenae* Heeg. nebst var. *concolor* Uzel (in Warmhäusern des Krakauer Botanischen Gartens). *Thrips physopus* L. u. var. *adusta* Uzel, *Th. communis* Uzel u. var. *pulla* Uzel, *Th. valida* Uzel. *Th. flava* Schrk. u. var. *obsoleta* Uzel. *Anthothrips statices* Halid.

III. Von der agronomischen Sektion gesammelte Materialien.

S. 1—145.

S. KRZEMIENIEWSKI. **Łąki w okolicach Liszek i Mnikowa.** (***Die Wiesen in der Gegend von Liszki und Mników***). (*Les prairies des environs de Liszki et de Mników*). S. 3—23.

Als Fortsetzung seiner im 35. Bande der Berichte der physiographischen Kommission erschienenen Arbeit über die Wiesen des Sanka-Tales in der Gegend von Liszki und Mników (Grossherzogtum Krakau) führt der Verf. 18 Heuanalysen auf.

S. KRZEMIENIEWSKI. **Łąki podgórskie w Rabie Wyżniej, Zakopanem i Kościeliskach.** (***Die Wiesen in Raba Wyżnia, Zakopane und Kościeliska***). (*Les prairies de Raba Wyżnia, de Zakopane et de Kościeliska*). S. 24—28.

Vorliegende Arbeit enthält die Resultate einer floristischen Analyse von 6 Heuproben, u. zw. 2 von Raba Wyżnia in den westlichen Karpaten, 2 von Kościeliska am Nordfusse der Tatra und 1 von Zakopane ebenda.

K. MOŚCICKI. **Przyczynek do fizyografii jęczmienia.** (***Contribution à la physiographie de l'orge***). S. 29—40.

Profitant d'une exposition locale d'orge de brasserie qui eut lieu à Cracovie en 1898, l'auteur a soumis à l'analyse les 32 exemplaires exposés, appartenant à 11 variétés diverses (Hanna, Chevalier, Goldfoail, Probst, Hongrois, Golden-Melon, Suédois, Impérial, Gros-grain, Bolesta et celle du pays). Il a déterminé le contenu d'eau, le poids absolu de 1000 graines en gr., le poids d'un hectolitre en kg., le pouvoir germinatif, la pureté des graines, les proportions de farine et d'écorce, les proportions d'azote et d'acide phosphorique dans les graines et de potasse dans la paille.

La table suivante donne un aperçu des résultats obtenus.

N.-d'ordre		Moyenne	Limites des oscillations
1	Poids de 1000 graines en gr. . . .	42·3	34·3 —50·10
2	Poids d'un hectolitre en kg. . . .	69·3	64·10 —73·30
3	Pouvoir germinatif en %	94	78 —99
4	Pureté	99·63	99·12 —99·99
5	Contenu d'eau	11·84	10·92 —15·22
6	Contenu d'écorce	11·69	8·80 —13·67
7	Richesse en farine	49	34 —82
8	Contenu de corps albumineux . . .	11·09	8·37 —13·77
9	Contenu de P_2O_5	1·025	0·849— 1·218
10	Contenu de SiO_2	2·90	1·64 — 6·45
11	Contenu de K_2O . dans la paille . .	1·30	0·770— 3·303
12	Contenu de cendres dans la paille . .	6·02	4·18 —10·32
13	Relation de N à P_2O_5 dans les graines	0·581	0·419— 0·725

S. GÓRAL. **Florystyczna analiza łąk.** ***(Floristische Heu-Analysen).*** *(Analyses du foin).* S. 41—50.

Als Resultat einer im Auftrage der physiographischen Kommission vorgenommenen Untersuchung von Wiesen in einem Teile des Grossherzogtums Krakau führt der Verf. 9 Analysen von Heuproben aus Trzebinia, Piła, Bolęcin, Oblaszki, Alwernia, Regulice und Przeginia Duchowna auf.

S. GOLIŃSKI. **Badania łąk. Siano. II.** ***(Wiesenuntersuchungen. Das Heu. II).*** *(Recherches sur le foin des prairies. II).* S. 51—109.

Die vorliegenden Untersuchungen hat der Verf. im J. 1898 durchgeführt. Dreissig Heuproben wurden im süd-östlichem Teile des Krakauer Bezirkes eingesammelt. Der nördliche Teil des Bezirkes hat bloss unkultivierte Weiden, an Wiesen ist er besonders arm. Deswegen umfassen die Untersuchungen des Verf. die östliche Hälfte des Bezirkes Krakau, in der die Stadt selbst als Zentrum betrachtet werden soll und wo die Weichsel die südliche natürliche Grenze bildet. Auf zwei Ortschaften hat der Verf. hauptsächlich seine Aufmerksamkeit gelenkt, nämlich auf Wyciąże und Mogiła. Hier hat ein bedeutender Komplex vom Bauernwiesen den Verf. veranlasst, eine Reihe von Proben zu nehmen, da die Kultur dieser Komplexe sehr verschieden ist. Die einen düngen ihre Wiesen, andere haben auch Thymoteus und Klee gesät, manche sogar Thomasschlacke und Kainit verwendet. Die Mehrzahl der Eigentümer überliess aber die Wiesen der Natur und begnügte sich mit dem Dünger den die Überschwemmung der Weichsel von Zeit zu Zeit als Wasserrückstand zurückliess.

In Mogiła stellt die „grosse Wiese“ (Wielka Łąka) einen ganz anderen Wiesenkomplex dar, hauptsächlich entstanden aus Seen, die in früheren Zeiten den Cisterzienser Mönchen zu einer ausgedehnten Fischkultur dienten, jetzt aber unkultivierte Wiesen bilden. Die übrigen Wiesen lassen sich um diese zwei Zentren gruppieren und es unterliegt keinem Zweifel, dass mit der Eindämmung der Weichsel die Wiesenflora eine grundverschiedene werden wird.

Um die Frage zu beantworten, inwiefern ein Beobachter, welcher sich nur auf sein Auge und seinen persönlichen Eindruck stützt, sich irrt und irren muss, hat der Verf. einigen Analysen ein Verzeichnis derjenigen Pflanzen, welche vermutlich die Flora der Wiese in der Mehrzahl repräsentierten, vorausgeschickt. Inwiefern das aber

übereinstimmt, kann sich jeder leicht an den angeführten Beispielen überzeugen. Während seiner Arbeit war der Verf. genötigt, in der Hohen Tatra eine Reihe Heuanalysen durchzuführen. Dabei hat er sich überzeugt, dass es viel rationeller ist, statt für 50 Gramm der Heuprobe eine chemische Waage zu benutzen, bei 300 Gramm mit grösserer Sicherheit und viel schneller mit einer Tarierwage zu arbeiten.

Die 26 ersten Analysen sind während der ersten Heuernte eingesammelt worden, wogegen die 4 anderen der zweiten Heuernte angehören.

Tafel I zeigt bei allen Proben das gegenseitige Verhältnis der Gramineen (trawy), Cyperaceen (turzyce), Juncaceen (sity), Monocotyledonen (jednoliścienne), Papilionaceen (motylkowe), Dicotyledonen (dwuliścienne), Equisetaceen (skrzypy), Cuscuta (kanianka).

Die Tafel II enthält ein alphabetisches Verzeichnis der Gräser nach ihrem Futterwerte. Die Bezeichnung „bardzo dobre" = sehr gut, „dobre" = gut, „średnie" = mittelmässig, „mierne" = gering, „złe" = schlecht.

Die Taf. III stellt eine Übersicht der 30 Proben dar. Die sechste Abteilung dieser Tafel stellt den Zahlenunterschied zwischen den guten und schlechten Gräsern dar, die siebente stellt den Prozentunterschied im Verhältnisse zu den Gräsern, die 9-te die Durchschnittsprozente im Verhältnis zu den Gräsern dar.

Die Taf. IV stellt das Verhältnis der Papilionaceen dar. Die unteren Ziffern bedeuten die Zahl der Proben, in welchen die genannten Papilionaceen sich befinden. Das Prozentverhältnis zwischen den Süssgräsern und Riedgräsern veranlasst uns das Heu im ganzen Komplexe als Pferdeheu zu betrachten, weil es als Viehnahrung kaum bezeichnet werden könnte, obwohl die Nachfrage nach Milch im ganzen Bezirke stark ist und diese Kultur sicherlich rentabel sein könnte. Dieses ökonomisch-landwirtschaftliche Moment ist das einzige, welches sich konsequent verfolgen lässt, weil das floristische sich auf einige zehn Analysen noch nicht stützen kann.

A. NOWICKI. **Wydatność drzewostanów w naszych lasach w chwili ich sprzętu III.** ***(Die Holzmassenerträge unserer Forste).*** *(Le rendement de nos forêts).* S. 110—145.

Diese Publikation enthält Daten aus dem Hügellande der Zuflüsse von Biała und Wisłoka (S. 116—131), ferner aus dem west-

lichen Karpatenvorgebirge im Gebiete des Flusses Skawa (S. 132—135). Die nördliche Sandebene ist hier durch die an dem Flusse Przemsza gelegenen Forste vertreten (S. 136—145). Die im XXXV Bande publicierten Angaben über die Wälder des Krakauer Hügellandes werden fortgesetzt (S. 136).

---

7. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau les dernières publications de la Classe:

St. Bądzyński i K. Panek. „O kwasie alloksyproteinowym, prawidłowym składniku moczu ludzkiego". *(Sur l'acide alloxyprotéique, principe constant de l'urine de l'homme)*, 8-o, p. 11.

Wł. Natanson. „O funkcyi dysypacyjnej płynów lepkich". *(Sur la fonction dissipative d'un fluide visqueux)*, 8-o, p. 8.

Wł. Natanson. „O odkształcaniu krążka plastyczno-lepkiego". *(Sur la déformation d'un disque plastico-visqueux)*, 8-o, p. 21.

K. Zakrzewski. „O oscylacyi krążka w płynie lepkim". *(Sur les oscillations d'un disque plongé dans un liquide visqueux)*, 8-o, p.9.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

12 Lutego 1903.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise

(Spółka wydawnicza polska)

à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to. vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 10 k. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Jagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 6 k. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol. VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 k. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski 4 k. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 20 k. —

— Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674—1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VII, Acta expeditionis bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo. 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol. I. II. IV. V épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo. 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

12.229

N° 2. FÉVRIER 1903.

BULLETIN INTERNATIONAL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE :

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR : S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. STANISLAS SMOLKA.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de **M. Ladislas Natanson,**
Membre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

MAY 16

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 2. **Février** **1903.**

Sommaire: 8. M. K. DZIEWOŃSKI. Sur un nouveau hydrocarbure aromatique: le trinaphtylènebenzène ou décacyclène et sur un composé sulfuré rouge: le dinaphtylènethiophène.
9. M. STANISLAS DOBROWOLSKI. La flore du vagin.
10. M. ST. ZAREMBA. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité.
11. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Séance du lundi 9 Février 1903.

PRÉSIDENCE DE M. A. WITKOWSKI.

8. M. K. DZIEWOŃSKI. **O dekacyklenie (trójnaftylenbenzolu), nowym węglowodorze aromatycznym i czerwonym związku siarkowym, dwunaftylentiofenie.** ***(Über Dekazyklen (Trinaphtylenbenzol), einen neuen hochmolekularen aromatischen Kohlenwasserstoff und über Dinaphtylenthiophen, einen roten Thiokörper).*** *(Sur un nouveau hydrocarbure aromatique: le trinaphtylènebenzène ou décacyclène et sur un composé sulfuré rouge: le dinaphtylènethiophène).* Mémoire présenté par M. St. Niementowski m. c

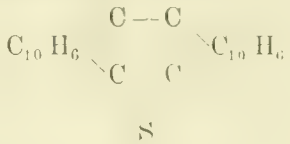
Durch Schmelzen gewisser aromatischer Kohlenwasserstoffe, besonders solcher, welche eine Methylengruppe $-CH_2$ als Seitenkette besitzen, findet eine eigentümliche Dehydrogenisation derselben statt, die mit gleichzeitiger Verknüpfung der entstehenden wasserstoffärmeren Kohlenwasserstoffreste verbunden ist. In der Absicht eine völlige Dehydrogenisation der Seitengruppen des Acenaphtens und die Verknüpfung der so entstehenden Acenaphtylenreste zu erreichen, liess ich Schwefel auf den genannten Kohlenwasserstoff einwirken. Diese sehr günstig verlaufene Reaktion ergab mir nun zwei Körper: einen gelben, hochmolekularen Kohlenwasserstoff von der emp. Formel $C_{36}H_{18}$ und einen roten Thiokörper $C_{24}H_{11}S$.

Auf Grund der bisherigen zusammen mit H. P. Bachmann ausgeführten Untersuchungen verläuft die Reaktion nach folgender, später ausführlicher zu erklärenden Gleichung:

$$5\,C_{12}H_{10} + 11\,S = C_{36}H_{18} + C_{24}H_{12}S + 10\,H_2S.$$

Der Versuch wurde ausgeführt, indem Acenaphten mit Schwefel gemischt (im Verhältnis von 100 g Acenaphten zu 23 g S), in einem Rundkolben geschmolzen und bis zu der Reaktionstemperatur von 205° C. dann einige Zeit etwas höher, bis etwa 290°, erwärmt wurden. Die Reaktion wird unterbrochen, sobald die Schwefelwasserstoffentwickelung nachgelassen hat. Durch Ausziehen mit heissem Alkohol befreit man die erhaltene rotbraune Schmelze von dem zurückgebliebenen Acenaphten und extrahiert nun mit Benzol. Aus den Laugen dieses letzteren scheidet sich ein roter Körper aus, den man in ganz reinem Zustande als prächtig rote, seidenglänzende Nadeln durch mehrmaliges Umkristallisieren aus Toluol erhält. Nach Entfernung dieses roten Körpers bleibt jetzt noch im Kolben ein gelblicher kristallinischer Rückstand, den man aus Cumol oder besser aus Nitrobenzol umkristallisiert. Auf diese Weise erhält man schon nach zweimaligem Umkristallisiren einen reinen Körper in Form von grossen, stark goldglänzenden, gelben Nadeln.

Dinaphtylenthiophen $C_{24}H_{12}S$



Der rote durch Extraktion der Schmelze mit Benzol erhaltene Körper ist schwefelhaltig. Er schmilzt bei 278° C, sublimiert in roten Nadeln und löst sich in Chloroform. Schwefelkohlenstoff, Benzol, Toluol etc. Aus diesen Lösungsmitteln kristallisiert er in langen, prächtig roten, seidenglänzenden Nadeln. Die Analyse dieses Körpers gab uns folgende Resultate:

C = 86·80% H = 3·53% S = 9·79%

Berechnet für Dinaphtylenthiophen $C_{24}H_{12}S$

C = 86·75 H = 3·61% S = 9·61%.

Aus diesen Resultaten ergibt sich die empirische Formel: $C_{24}H_{12}S$. Durch Bestimmung der Molekulargrösse mittelst der Siedepunkterhöhungsmethode unter Anwendung von Anilin als Lösungsmittel erhielten wir folgende Werte für die Molekulargrösse des Thiokörpers: 336; 334; 345.

Diese Werte stimmen eben für die Formel $C_{24}H_{12}S$, welche die Zahl 332 verlangt.

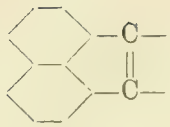
Das Pikrat des Thiokörpers $C_{24}H_{12}S.2C_6H_3N_3O_7$ wird dargestellt, indem man eine Lösung des roten Körpers (4 g) in Schwefelkohlenstoff mit Pikrinsäure (2·7 g), welche in Chloroform gelöst ist, in der Kälte mischt. Man erhält so einen karminroten Körper, der aus Chloroform umkristallisiert wird. Sein Schmelzpunkt liegt bei 250° C. Das Resultat der Stickstoffbestimmung beträgt 10·69% und entspricht dem Stickstoffgehalt der Verbindung von der Formel $C_{24}H_{12}S.2C_6H_3N_3O_7 : N = 10·60\%$. Bestätigt wurde dieses molekulare Verhältnis der Pikrinsäure zu Dinaphtylenthiophen durch Zerlegung des Pikrats mit Ammoniak.

Gefunden:	Dinaphtylenthiophen	42·37%
	Pikrinsäure	58·27%
Berechnet für $C_{24}H_{12}S.C_6H_3N_3O_7$		
	Dinaphtylenthiophen	42·03%
	Pikrinsäure	57·98%

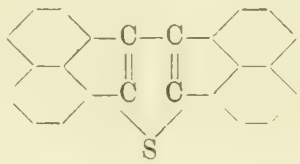
Oxydation des Dinaphtylenthiophens. Durch Einwirkung einer Lösung von Chromsäure oder von chromsauren Salzen erhält man Naphtalsäure. Auf Dinaphtylenthiophen, welches in kochendem Eisessig suspendiert ist, lässt man tropfenweise eine Lösung von Chromsäure in verdünnter Essigsäure einwirken, bis alle Substanz in Lösung gegangen ist. Nach dem Erkalten fällt man durch einen grossen Überschuss von Wasser aus der Lösung einen gelblichen Körper, der durch mehrmaliges Umkristallisieren aus Eisessig in Form von langen, seidenglänzenden, weissen Nadeln erhalten wird. Die Eigenschaften sowie auch die Analyse bewiesen, dass unser Oxydationsprodukt nichts anderes ist als Naphtalsäure:

Gefunden	C : 72·70%	H : 3·27%
Berechnet für $C_{12}H_6O_3$:	C : 72·73	H : 3·03

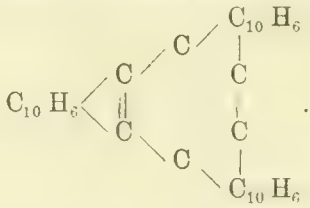
Was nun die Konstitutionsformel dieses ersten Produktes anbelangt, so ergibt sich aus den Resultaten der Analysen, aus den Bestimmungen der Molekulargrösse sowie endlich aus dem Resultate der Oxydation mittelst Chromsäure, dass unser Körper zwei durch Schwefel verbundene Acenaphtylenreste



enthält. Die Art dieser Bindung lässt sich am besten erklären, wenn man annimmt, dass unser Körper ein Abkömmling von Thiophen ist, nämlich Dinaphtylenthiophen:



Trinaphtylenbenzol (Dekazyklen) $C_{36}H_{18}$



Nachdem man durch Benzol das Dinaphtylenthiophen fast völlig von der ursprünglichen Schmelze des Acenaphtens mit Schwefel entfernt hat, bleibt in dem Kolben noch ein kristallinischer dunkelgelber, goldglänzender Rückstand. Diesen letzteren, der fast nur reinen Kohlenwasserstoff enthält, kristallisiert man aus Cumol oder besser aus Nitrobenzol um, wobei man aus dem letzteren Lösungsmittel nach zwei- bis dreimaligem Umkristallisieren einen ganz reinen Kohlenwasserstoff in Form von grossen starkglänzenden, gelben Nadeln erhält. Die verdünnten Lösungen des Körpers zeigen eine schöne grüne Fluoreszenz. Seine Löslichkeit ist im allgemeinen viel geringer als die des Picens. Am besten löst er sich jedoch in siedendem Anilin, Naphtalin und Nitrobenzol. Dekazyklen schmilzt bei 387° C, also viel höher als Picen, dessen Schmelzpunkt 350° (unkorr.) bis jetzt als der höchste der aromatischen Kohlenwasserstoffe galt. Die Analyse gab folgende Resultate:

	C 96·01%	H 3·97%
Berechnet für $(C_{12}H_6)_n$:	C 96·00%	H 4·00%.

Aus der Analyse ergibt sich also die empirische Formel $(C_{12}H_6)_n$. Die Molekulargrösse wurde nun mittelst der Siedepunkterhöhungsmethode nach Beckmann bestimmt unter Anwendung von Anilin und Nitrobenzol als Lösungsmittel, und zwar erzielten wir durch die Bestimmungen mit ersteren folgende Zahlen:

447 461 467.

Für Nitrobenzol war es uns momentan unmöglich, in der betreffenden Literatur die Konstante der molekularen Erhöhung zu finden, welche wir deshalb genötigt waren selbst zu bestimmen, wobei die Zahl 50·1° als die der molekularen Erhöhung für 100 g Nitrobenzol erhalten wurde. Unter Anwendung dieses Lösungsmittels zur Bestimmung der Molekulargrösse des Kohlenwasserstoffs fanden wir folgende Zahlen:

438, 448, 453, 460, 464.

Die Resultate der mit beiden Lösungsmitteln ausgeführten Molekulargewichtsbestimmungen stimmen vorzüglich für die Zahl 450, die der Formel $(C_{12}H_6)^3 = C_{36}H_{18}$ entspricht, was durch die Analyse und die Zerlegung des Pikrats unseres Körpers noch bestätigt wurde.

Das Pikrat wird dargestellt, indem man zu einer heissen Lösung des Kohlenwasserstoffs in Aethylenbromid Pikrinsäure, welche in demselben Lösungsmittel gelöst ist, in grösserem Überschuss zufügt. Das Produkt stellt eine violettrote, ziemlich unbeständige, beim Waschen mit grösseren Mengen von Äther sich ein wenig spaltende Substanz vor. Sein Schmelzpunkt liegt bei 296° C (unter Zerlegung der Substanz).

Die Stickstoffbestimmungen ergaben:

6·36% N, 6·30% N, 6·29% N.

Diese Zahlen stimmen für die Verbindung $C_{36}H_{18}.C_6H_3N_3O_7$, die einen Stickstoffgehalt von 6·18% N hat, überein.

Durch Zerlegung des Pikrats erhielten wir

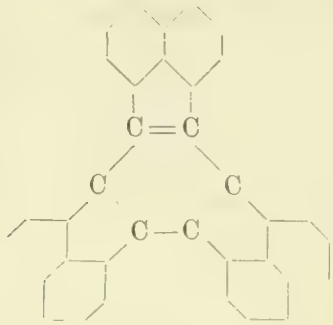
66·31% Kohlenwasserstoff
34·28% Pikrinsäure.

Berechnet für die Formel $C_{36}H_{18}.C_6H_3N_3O_7$

66·28% Kohlenwasserstoff
33·72% Pikrinsäure.

Mehrere Oxydationsversuche dieses Körpers mittelst Chromsäure, Kaliumpermanganat und Salpetersäure sind bis jetzt erfolglos geblieben.

In Berücksichtigung der bisherigen Versuche bin ich gezwungen, für den Kohlenwasserstoff als wahrscheinlichste und annehmbarste Formel die des Trinaphtylenbenzols anzugeben:



Da diese Verbindung als ein aus zehn Ringen bestehender Kohlenwasserstoff erscheint, möchte ich für ihn die kurze Benennung Dekazyklen in Vorschlag bringen.

Indem ich die Mitteilung hiemit schliesse, behalte ich mir das weitere Studium der hier beschriebenen Verbindungen wie auch weitere Arbeiten über die Einwirkung von Schwefel auf Acenaphten und andere Kohlenwasserstoffe vor.

II. Chemisches Laboratorium der Universität Freiburg (Schweiz).

---

9. M. STANISLAS DOBROWOLSKI. **Flora pochwy fizyologicznej.** *(La flore du vagin).* Mémoire présenté par M. T. Browicz m. t.

Dans ses études sur la flore du vagin, l'auteur a analysé des sécrétions vaginales, provenant de diverses femmes et de diverses périodes de la vie sexuelle.

Il s'est efforcé par ces recherches de répondre aux questions suivantes:

1°. Le vagin ne présentant aucune affection pathologique contient-il des microbes, comme l'ont affirmé plusieurs savants, ou n'en contient-il pas, ainsi que le prétendent Menge, Krönig, Bensis et Williams?

2°. Existe-t-il une flore permanente du vagin, ou la présence de microbes dans cet organe n'est-elle qu'un fait accidentel?

3°. La quantité et la qualité des variétés se trouvant dans la sécrétion vaginale dépend-elle de conditions pouvant être exactement déterminées?

4°. Pendant la grossesse la flore du vagin subit-elle des modifications et quelles en sont les causes?

5°. Les microbes trouvés dans le vagin de femmes enceintes ou non sont-ils pour l'organisme animal pathogéniques, ou ne le sont-ils pas?

6°. D'où vient enfin l'action bactéricide de la sécrétion vaginale? cette action existe-t-elle en général, comme le soutiennent Doederlein, Krönig, Stroganoff et Cahanescu?

L'auteur a puisé la sécrétion vaginale chez des femmes où, sans aucun doute, elle n'avait subi, au moins pendant quelques jours, aucune altération extérieure, soit par suite d'examen médical, soit par suite de rapports sexuels. L'auteur a pris de la sécrétion tirée uniquement du fond du vagin et l'a obtenue à l'aide de tubes de verre introduits dans un speculum stérilisé. La sécrétion ainsi obtenue et stérilisée a été immédiatement étudiée au microscope, puis placée dans des milieux nutritifs, solides ou liquides.

L'auteur divise ses recherches en trois groupes. Dans le premier, contenant 30 cas, l'auteur a inoculé la sécrétion dans des milieux nutritifs alcalins; dans le second, qui comprend 15 cas, elle a été soumise à l'influence de milieux acides; dans le troisième, comprenant dix cas, la culture a été conduite dans des conditions strictement anaérobies. Dans la suite de ses recherches sur la sécrétion du premier groupe, il l'a placée aussi dans un milieu acide et a fait la culture à l'abri de l'air; il a aussi ensemencé la sécrétion du deuxième groupe dans un milieu alcalin, également sans accès de l'air; enfin il a étudié la sécrétion du troisième groupe dans les cultures faites avec accès de l'air.

Sur ces 55 cas, 40 fois la sécrétion provenait de femmes non enceintes; 9 filles, 7 femmes ayant dépassé l'âge de retour et 24 femmes en pleine vie sexuelle; dans 15 fois, la sécrétion provenait de femmes enceintes.

Toutes les sécrétions, sans aucune exception, contenaient des microbes, appartenant le plus souvent à deux espèces, rarement à trois ou à une seule, jamais à plus de trois. Les espèces obser-

vées au microscope ont presque toujours été obtenues dans les milieux nutritifs.

Les recherches de l'auteur permettent de conclure tout d'abord que la distinction faite par Doederlein de la sécrétion vaginale physiologique (apparence du lait caillé depuis peu, action acide, absence de lymphocythes, présence chez les femmes enceintes d'une bactérie spéciale du vagin) et de la sécrétion vaginale pathologique (alcaline ou neutre, abondamment épaisse, grande quantité de lymphocythes et polymorphie des microbes), ainsi que les différences de la flore du vagin provenant de ce fait, n'existent pas.

L'action acide de la sécrétion vaginale est considérée par l'auteur comme une réaction vitale de la muqueuse du vagin, réaction absolument indépendante, et de la qualité des composés morphologiques et des microbes vivant dans la sécrétion; ainsi l'auteur a trouvé principalement chez les filles des réactions acides, chez les femmes enceintes, sans exception, des réactions acides; chez les femmes âgées, ayant dépassé l'âge de retour, des réactions alcalines ou neutres; chez les femmes en pleine vie sexuelle, fort souvent des réactions acides, quoique chez ces dernières on en rencontre d'alcalines et même de neutres.

Certaines espèces de microbes sont très fréquentes dans le vagin; d'autres fort rares. Parmi les espèces fréquentes, l'auteur note: le staphylococcus non pyogenes non liquefaciens, le micrococcus non pyogenes liquefaciens et non liquefaciens, le bacillus tenuis longus et le bacillus vaginalis; moins souvent le streptococcus non pyogenes, le micrococcus scariosus, le micrococcus auriantiacus, le bacillus brevis, le bacillus polymorphis mobilis, des levures; rarement le bacillus ruber non liquefaciens, le bacillus aureus non liquefaciens, le bacillus proteus; exceptionnellement le bacillus septatus, le bacillus subtilis, le bacterium coli immobile, l'hyphomycetes. L'auteur a trouvé dans les sécrétions trois espèces jusqu'ici non décrites qu'il propose de nommer micrococcus elipsoides, bacillus mobilis foetidus cellulosim liquefaciens et bacillus foetidus vaginae.

L'auteur n'a pas rencontré dans les sécrétions vaginales des femmes enceintes, ni dans celles des femmes non enceintes des anaérobes.

Entre la sécrétion des femmes enceintes et celle des femmes non enceintes, l'auteur a constaté cette différence que le vagin des femmes enceintes contient toujours une variété moindre d'espèces

de microbes qui, en général, sont des bacilles, tandis que la sécrétion des femmes non enceintes renferme le plus souvent des coques. L'auteur n'a pu découvrir la cause de cette différence; il affirme cependant que les motifs que l'on a donnés de cette modification de la flore, tels que l'acidité, le changement des composés morphologiques des sécrétions, la présence des bacilles vaginaux n'ont là-dessus aucune influence.

L'examen empirique de la pathogénie des microbes découverts n'a donné qu'un résultat négatif.

L'auteur résume comme il suit les conclusions de ses études:

1°. Tout vagin renferme des microbes;

2°. La flore du vagin est jusqu'à un certain point stable, mais en dehors des microbes à demeure fixe, d'autres microbes peuvent, dans des conditions qu'il est malaisé de déterminer, s'y introduire et s'y acclimater;

3°. La quantité et la qualité des microbes ne dépend pas de l'action du vagin, ni de ses composés cellulaires, ni de l'âge de la femme, ni de la période de sa vie sexuelle, à l'exception toutefois de la gestation, auquel cas

4°. la flore du vagin est peu riche en espèces;

5°. La flore du vagin ne contient pas de microbes dont la pathogénéité pourrait être constatée expérimentalement sur des animaux;

6°. La muqueuse du vagin n'a pas d'action spécifique bactéricide sur les microbes.

---

10. M. ST. ZAREMBA. **Uwagi o pracach prof. Natansona nad teoryą tarcia wewnętrznego.** ***(Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité).*** Mémoire présenté par M. M. P. Rudzki m. c.

Nr. 1. M. Natanson m'a appris que M. Witkowski, en discutant avec lui une application particulière de ses équations du mouvement d'un fluide visqueux [1]), a posé une question qui a conduit ces Messieurs à découvrir un résultat paradoxal des formules de M. Natanson. Ce résultat m'a fait supposer que les équations

[1]) L. Natanson. Sur les lois de la viscosité. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, séance du 4 Février 1901, page 107 et suivantes).

de M. Natanson doivent conduire à la conséquence inadmissible que voici: un mouvement de translation rectiligne et uniforme d'un vase contenant un liquide ne serait pas sans influence sur les lois du mouvement relatif du liquide par rapport au vase.

L'étude approfondie de la question m'a fait reconnaître bientôt qu'il en est bien ainsi. C'est ce que je vais établir dans les numéros suivants.

Nr. 2. L'idée maitresse de la théorie de M. Natanson, idée qu'il fait remonter à Poisson et à Maxwell, est la suivante: l'état intérieur d'un liquide en mouvement serait, à chaque instant, analogue à celui d'un corps parfaitement élastique lequel aurait subi une déformation. Sans nous occuper de la voie suivie par M. Natanson pour arriver aux équations définitives qu'il propose, nous nous bornerons à examiner les conséquences que ces équations entraîneraient.

Désignons par M un point situé à l'intérieur du liquide, par x, y, z les coordonnées rectangulaires de ce point et par t l'époque à laquelle on considère le point M. Envisageons un parallélipipède rectangle (P) ayant un de ses sommets en M et soient MA, MB et MC les trois arêtes issues du point M.

Je suppose que les vecteurs MA, MB et MC soient respectivement de même sens que les axes des x, des y et des z et j'admets que ces vecteurs soient infiniment petits. Cela posé, soient M', A', B', C' les sommets du parallélipipède opposés aux sommets M, A, B, C respectivement. Le liquide extérieur au parallélipipède (P) exercera, à l'époque t, certaines pressions sur le liquide intérieur au parallélipipède. Les pressions exercées sur les faces $MBA'C$, $MCB'A$ et $MAC'B$ s'exprimeront de la façon bien connue au moyen de six quantités que l'on désigne souvent par

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} p_{xx}, & p_{yy}, & p_{zz} \\ p_{yz}, & p_{zx}, & p_{xy} \end{array} \right.$$

Ces quantités sont ce que l'on appelle les composantes des pressions rapportées à l'unité de surface; elles sont des fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z et t et elles définissent l'état de tension intérieure qui règne, dans le liquide, en M, à l'époque t.

Pour établir les équations du mouvement, M. Natanson se place dans l'hypothèse où le mouvement du liquide est très lent et

il arrive alors à certaines équations [1]) qui représentent les relations qui existent entre les quantités (1) et les éléments cinématiques du mouvement du liquide. Il nous suffira de transcrire une de ces équations, soit:

$$p_{xx} - p = C_{xx}\,\varepsilon^{\frac{-t}{T}} - \varepsilon^{\frac{-t}{T}} \int dt\, \varepsilon^{\frac{t}{T}} \left\{2n\,e + (k - h - \tfrac{2}{3}\,n)\,\tilde{\omega}\right\} \tag{2}$$

On désigne ici par:

ε — la base des logarithmes népériens,

t — le temps,

T, n, k et h — des constantes dépendant uniquement de la nature du liquide,

p — une quantité qui dépend uniquement de l'état du liquide à l'époque t à l'intérieur du parallélipipède infiniment petit (P) défini plus haut,

C_{xx} — une fonction au sujet de laquelle M. Natanson se borne à dire qu'elle est indépendante du temps,

e et $\tilde{\omega}$ — des fonctions définies par les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tilde{\omega} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où les lettres u, v, w représentent les projections sur les axes des x, des y et des z de la vitesse de la particule du liquide qui, à l'époque t se trouve au point M.

Pour achever de faire comprendre la formule (2) il nous reste à dire que les quantités e et $\tilde{\omega}$ sont supposées être exprimées en fonctions des variables x, y, z et t, variables qui, dans la formule en question, doivent être regardées comme indépendantes.

Considérons un système de coordonnées x', y', z'), mobile mais constamment parallèle au système (x, y, z). Supposons que le système (x', y', z') soit animé, par rapport au système (x, y, z), d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme et soient λ, μ, ν les composantes parallèles aux axes des x, des y et des z

[1]) Natanson. Sur les lois de la viscosité. (Bulletin international de l'Académie de Cracovie, 1901, p. 107, équations (9 a), (9 b), (9 c), (10 a), (10 b), (10 c).

de la vitesse de l'origine du système (x', y', z'). Supposons, pour simplifier, qu'à l'époque $t = 0$, le système (x', y', z') coïncide avec le système (x, y, z). Voici les relations qui existeront alors entre les coordonnées d'un même point dans les deux systèmes:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \lambda t + x' \\ y &= \mu t + y' \\ z &= \nu t + z' \end{aligned} \right.$$

Dans ce qui va suivre, nous supposerons que le mouvement relatif du liquide par rapport au système mobile (x', y', z') est parfaitement déterminé et nous allons examiner les conséquences qui résultent de la formule (2) quand on compare les cas où, sans rien changer au mouvement relatif du liquide par rapport aux axes mobiles (x', y', z'), on attribue des valeurs différentes aux paramètres λ, μ, ν.

Désignons par u', v', w' les composantes, parallèles aux axes, de la vitesse relative du liquide, par rapport aux axes mobiles en un point M à l'époque t.

Les coordonnées du point M dans le système mobile étant x', y' et z', on aura:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= f\,(x', y', z', t) \\ v' &= \varphi\,(x', y', z', t) \\ w' &= \psi\,(x', y', z', t) \end{aligned} \right.$$

Puisque le mouvement relatif du liquide par rapport aux axes mobiles doit subsister sans aucun changement dans les cas que nous nous proposons de comparer, les fonctions f, φ, ψ seront indépendantes des paramètres λ, μ, ν.

Nous avons:

$$\begin{aligned} u &= u' + \lambda \\ v &= v' + \mu \\ w &= w' + \nu \end{aligned}$$

d'où, en vertu des formules (4) et (5):

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= f\,(x - \lambda t,\ y - \mu t,\ z - \nu t,\ t) + \lambda \\ v &= \varphi\,(x - \lambda t,\ y - \mu t,\ z - \nu t,\ t) + \mu \\ w &= \psi\,(x - \lambda t,\ y - \mu t,\ z - \nu t,\ t) + \nu \end{aligned} \right.$$

Il résulte de la définition des quantités p_{xx} et p ainsi que de l'hypothèse dans laquelle nous nous sommes placés, que la valeur

de la différence $p_{xx} - p$ à l'époque t, en un point du liquide dont les coordonnées par rapport aux axes mobiles sont x', y', z', devrait être donnée par une équation de la forme:

$$p_{xx} - p = F(x', y', z', t)$$

où $F(x', y', z', t)$ représente une fonction indépendante des paramètres λ, μ et ν.

On aura donc, en vertu des formules (4):

$$p_{xx} - p = F(x - \lambda t, y - \mu t, z - \nu t, t)$$

Par conséquent, si l'on posait:

$$p_{xx} - p = \Phi(x, y, z, \lambda, \mu, \nu, t) \tag{7}$$

on devrait avoir identiquement:

$$\left.\begin{aligned} t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} &= 0 \\ t\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} &= 0 \\ t\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} &= 0 \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Voyons si la valeur (2) de $p_{xx} - p$ vérifie cette condition.

Il résulte des formules (3) et (6) que la quantité

$$2ne + (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega},$$

considérée comme fonction des sept variables indépendantes x, y, z, λ, μ, ν et t sera une fonction des seules quantités:

$$(x - \lambda t),\ (y - \mu t),\ (z - \nu t) \text{ et } t.$$

Nous pouvons donc poser

$$2ne + (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} = \Omega(x - \lambda t, y - \mu t, z - \nu t, t). \tag{9}$$

Par conséquent les formules (2) et (7) nous donnent:

$$\Phi = C_{xx}\,\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} - \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t \varepsilon^{\frac{t}{\tau}}\,\Omega\,dt. \tag{10}$$

Les renseignements donnés par M. Natanson au sujet de la fonction C_{xx} se bornent à cela seul que cette fonction ne dépend

pas du temps t. N'excluons donc pas l'hypothèse où cette fonction dépendrait des paramètres λ, μ, ν. La formule (10) nous donne:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial C_{xx}}{\partial x}\,\varepsilon^{\frac{-t}{T}} - \varepsilon^{\frac{-t}{T}}\int \varepsilon^{\frac{t}{T}}\,\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dt \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} &= \frac{\partial C_{xx}}{\partial \lambda}\,\varepsilon^{\frac{-t}{T}} - \varepsilon^{\frac{-t}{T}}\int \varepsilon^{\frac{t}{T}}\,t\,\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dt\,, \end{aligned}\right.$$

en tenant compte de la relation évidente:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = -\,t\,\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,.$$

Posons:

$$(12)\qquad Q = t\,\frac{\partial C_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial C_{xx}}{\partial \lambda} - t\int \varepsilon^{\frac{t}{T}}\,\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dt + \int \varepsilon^{\frac{t}{T}}\,t\,\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dt.$$

Les équations (11) nous donneront:

$$(13)\qquad t\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = Q\,\varepsilon^{\frac{-t}{T}}\,.$$

Donc, pour que la première des équations (8) soit vérifiée identiquement, il est nécessaire et suffisant que l'on ait identiquement,

$$Q = 0\,.$$

d'où

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0\,.$$

Or la formule (12) nous donne:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\,\varepsilon^{\frac{t}{T}}\,\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,.$$

On devrait donc avoir identiquement

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0\,.$$

On déduirait de la même manière, des deux autres équations du système (8) les conséquences suivantes:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 .$$

Cela prouve que la valeur (10) de la fonction Φ ne peut satisfaire aux équations (8) que dans le cas où le mouvement relatif du liquide par rapport aux axes mobiles (x', y', z'), est d'une nature très particulière.

Or le système (8) devrait être vérifié quel que soit le mouvement relatif du liquide par rapport aux axes mobiles (x', y', z'). Donc la formule (2) est inadmissible. Il est nécessaire d'ailleurs que les équations (8) soient vérifiées pour que les lois du mouvement relatif du liquide par rapport aux axes mobiles (x', y', z') soient indépendantes de la vitesse de translation de ces axes. Par conséquent, les équations du mouvement proposées par M. Natanson entraînent bien la conséquence inadmissible qui a été énoncée au Nr. 1.

Nr. 3. Nous avons prouvé que le mouvement d'un liquide ne peut en aucune façon être régi par les équations proposées par M. Natanson, équations dont la première (l'équation (2 a)) est écrite tout au long à la page 110 du travail que nous discutons. Mais M. Natanson ne considère ses équations que comme l'expression approchée des véritables lois du mouvement d'un liquide et cela seulement dans le cas particulier où les quantités u, v, w sont très petites. Cette façon de voir est-elle soutenable? Evidemment non puisque, dans les applications, nous ne pouvons jamais étudier le mouvement d'un liquide que par rapport à des axes mobiles dont la vitesse de translation est non seulement inconnue, mais inconnaissable.

On pourrait pourtant essayer de tirer parti des équations de M. Natanson en les interprétant d'une façon particulière, laquelle, il est vrai, n'est indiquée dans aucun de ses travaux. Voici ce que nous avons en vue: supposons que le système de coordonnées (x, y, z), système pour lequel la formule (2) serait valable, ne soit pas fixe, mais mobile et animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme; cela posé, regardons les quantités u, v, w comme les composantes de la vitesse relative du liquide par rapport aux axes (x, y, z) en M à l'époque t et voyons si, dans ces conditions, il serait possible de regarder la formule (2) comme approximativement exacte. Je dis qu'il n'en est pas ainsi. En effet, les équations (8) devraient alors être exactes approximativement dans le cas où l'on n'envi-

sagerait que des valeurs assez petites des paramètres λ, μ, ν. Mais pour cela, il serait nécessaire et suffisant que, pour de petites valeurs des paramètres λ, μ, ν, la valeur (13) de l'expression

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}$$

et les valeurs analogues des quantités

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}$$

et

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$$

fussent très petites par rapport aux paramètres λ, μ, ν. Cela ne pourrait arriver que dans le cas où les quantités

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}$$

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}$$

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$$

s'annuleraient identiquement pour

$$\lambda=\mu=\nu=0.$$

Malheureusement il n'en est pas ainsi; cela devient évident en se reportant aux équations (12) et (13).

Il est donc prouvé que les équations de M. Natanson sont absolument inexactes.

Nr. 4. Il existe un certain nombre de travaux qui reposent exclusivement ou dans leurs parties essentielles sur les équations que nous venons d'étudier. Il est évident que la base scientifique de ces travaux est illusoire. Ces travaux ont paru dans le Bulletin international de l'Académie de Cracovie. Voici leur liste:

1) Natanson. Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides (Séance du 4 Mars 1901);
2) Natanson. Sur la propagation d'un petit mouvement dans un liquide visqueux (Séance du 7 Janvier 1902);

3) Natanson. Sur la fonction dissipative d'un fluide visqueux (Séance du 13 Octobre 1902);
4) Natanson. Sur la déformation d'un disque plastico-visqueux (Séance du 13 Octobre 1902);
5) Zakrzewski. Sur les oscillations d'un disque plongé dans un liquide visqueux (Séance du 14 Avril 1902).

---

11. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau les dernières publications de la Classe:

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III, tom 2, dział A., ogólnego zbioru tom 41. Nauki matematyczno-fizyczne. *(Travaux de la Classe, III. Série, Vol. 2. A. Sciences mathématiques et physiques, 15 planches et 22 gravures)*, 8-o, p. 472.

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III, tom 2, dział B, ogólnego zbioru tom 42. Nauki biologiczne. *(Travaux de la Classe, III. Série, Vol. 2. B. Sciences biologiques, 20 planches et 13 gravures)*, 8-o, p. 373.

S. Niementowski. „O kwasie chloraldwuantranilowym". *(Sur l'acide chloraldianthranilique)*. 8-o, p. 7.

K. Olszewski. „Przyrządy do skraplania powietrza i wodoru". *(Appareils pour liquéfier l'air et l'hydrogène)*, 5 gravures, 8-o, p. 16.

J. Sosnowski. „Przyczynek do fizyologii rozwoju much". *(Contribution à l'étude de la physiologie du développement des mouches)*, 3 gravures, 8-o, p. 11.

J. Zaleski. „Badania nad mezoporfiryną". *(Recherches sur la mésoporphyrine)*, 1 gravure, 8-o, p. 21.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego

11 Marca 1903.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise

(Spółka wydawnicza polska)

à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II — XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III — XIII, XV — XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 10 k. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Jagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI. XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 6 k. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol. VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 k. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski 4 k. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674 1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed Kluczycki. 10 c. Vol XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III — VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507 1531 ed. Bobrzyński. 6 k. Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo. 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol. I. II. IV. V épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo, 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoene Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoene Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1890. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

N° 3. MARS 1903.

12.229

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER
DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE :

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR : S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. STANISLAS SMOLKA.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de **M. Ladislas Natanson,**
Membre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

MAY 25 1903

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 3. **Mars** **1903.**

Sommaire: 12. M. JOSEPH BRZEZIŃSKI. Le chancre des arbres, ses causes et ses symptômes
13. M. MARIE SMOLUCHOWSKI. Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent.
14. M. MARIE SMOLUCHOWSKI Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs.
15. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Séance du lundi 9 Mars 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

12. M. JOSEPH BRZEZIŃSKI. **Rak drzew, jego przyczyny i przejawy.** ***(Le chancre des arbres, ses causes et ses symptômes).*** Mémoire présenté par M. E. Janczewski m. t.

(Planches II – VIII).

La maladie des arbres, connue sous le nom de chancre (cancer, Krebs), a attiré depuis longtemps l'attention des praticiens ainsi que des naturalistes. Le chancre des arbres fruitiers, occasionnant les dégâts les plus sensibles et, d'autre part, étant d'observation plus facile, vu la culture soignée exigée par ces arbres a été l'objet de recherches multiples, qui datent de temps fort éloignés. La seconde moitié du dernier siècle nous apporte de nombreux ouvrages, qui traitent ce sujet d'une manière détaillée.

Presque tous les auteurs distinguent les causes immédiates du chancre des agents secondaires, qui tiennent aux conditions plus ou moins favorables à la végétation des arbres et les prédisposent plus ou moins à contracter cette maladie.

Le fait que le chancre attaque surtout les arbres plantés dans les terres trop humides et froides, que toutes les causes qui diminuent la force de la végétation, comme: le trop grand rapprochement des arbres, le manque de lumière, l'action de la gelée etc. augmentent la fréquence et l'intensité de la maladie — a été suffisamment reconnu au XVII-e siècle déjà, et nous n'avons aujourd'hui rien à y ajouter. Quant aux causes immédiates du chancre.

la question ne put être résolue aussi aisément. On a commencé par attribuer l'apparition du chancre à la surabondance de la sève, aux perturbations que provoque cette pléthore dans diverses parties de l'arbre (Henri Hess 1690, Duhamel de Monceau 1758).

Vers la seconde moitié du siècle dernier, le chancre des arbres devient l'objet de recherches scientifiques, particulièrement en Allemagne, où Hartig, Goethe et Sorauer publient de nombreux ouvrages sur ce sujet [1]). Sorauer attribue l'origine de la maladie du chancre à l'action de la gelée et essaye de le prouver en soumettant les arbres à l'action du froid artificiel. Hartig et Göthe, tout en ne rejetant pas tout à fait les opinions de Sorauer, admettent cependant que le chancre est dû surtout aux altérations produites par le champignon Nectria ditissima, qui d'après eux serait un parasite. D'autre part Sorauer, tout en regardant le froid comme l'agent principal de la maladie, ne s'oppose pas catégoriquement à l'idée que le chancre, dans certains cas, peut être aussi provoqué par le Nectria.

Il résulte donc de ces théories que le chancre pourrait provenir de deux causes absolument différentes, exerçant leur action soit simultanément, soit séparément. A ceci s'ajouta l'opinion, qu'indépendamment de l'action du froid et des ravages du Nectria, le chancre peut être encore provoqué directement par la piqûre des insectes et en général par toute sorte de blessures que peut subir l'écorce des arbres.

Sorauer, en attribuant le chancre à l'action du froid, attachait

[1]) R. Göthe. Mittheilungen über den Krebs der Apfelbäume. 1877.

R. Göthe. Vorläufige Mittheilungen über den Krebs der Apfelbäume. Rheinische Blätter für Wein, Obst und Gartenbau. Strassburg. 1879.

R. Göthe. Landwirtschaftliche Jahrbücher. 1880.

R. Göthe. Zum Krebs der Apfelbäume. Bot. Zeits. 1884. Nr. 25.

R. Göthe. Weitere Mittheilungen über den Krebs der Apfelbäume. Deutsche Garten-Monatsschrifte. 1887. Nr. 2.

Sorauer. Ueber den Krebs der Apfelbäume. Tageblatt der Naturforscher-Versammlung zu Hamburg. Beilage.

Sorauer. Handbuch der Pflanzenkrankheiten. Zweite Auflage. 1886. T. I. Chapitres: „Brand", „Krebs", „Frostbeulen" et d'autres.

Hartig. Lehrbuch der Baumkrankheiten. Berlin 1882.

Hartig. Untersuchungen an dem forstbot. Institut. I. p. 209.

Hartig. Die krebsartigen Krankheiten der Rothbuche. Zeitschrift für Forst- und Jagdwesen. IX.

beaucoup d'importance aux changements anatomiques qui ont lieu dans le bois et l'écorce des plaies chancreuses et il les a décrits d'une manière très détaillée. Les auteurs qui admettent que le Nectria est la cause principale de la maladie, prêtent au contraire beaucoup moins d'attention aux changements anatomiques du bois lésé et sont portés à regarder le chancre comme étant surtout une maladie de l'écorce. Cette manière de voir était la conséquence naturelle du fait qu'on ne trouvait jamais le Nectria qu'à de très faibles profondeurs dans les tissus des plaies chancreuses. Cette opinion a été adoptée presque généralement, et voilà comment un des auteurs les plus récents, M. Ed. Prillieux[1]), définit la maladie dont il est question: „Les chancres sont des plaies de l'écorce, qui ne se cicatrisent pas. Dans le milieu les tissus y sont morts et desséchés; sur les bords il se forme bien des bourrelets de cicatrice, mais ils sont rongés et détruits successivement et le chancre s'étend toujours". „Cependant le corps ligneux n'est jamais envahi profondément, il n'est altéré et coloré en brun que sur une épaisseur de quelques millimètres au dessous d'un chancre".

La diversité des formes que présentent les plaies chancreuses a été la cause de certaines confusions. Sorauer, tout en attribuant les plaies chancreuses sans distinction à l'action du froid, les a divisées en deux catégories: La première renferme les chancres caractérisés par la formation d'épais bourrelets cicatriciels sur les bords de la plaie, et les excroissances chancreuses, que Sorauer réunit sous le nom de „Krebs". A l'autre catégorie appartiennent toutes les plaies plates, sans bourrelets cicatriciels, dans lesquelles le savant allemand ne fait point de différences, les appelant toutes du nom de „Brand". Il est cependant facile d'observer que les plaies des arbres provoquées directement par le froid, si elles ne deviennent pas la cause de la mort immédiate du sujet, forment rapidement des bourrelets normaux sur leurs bords, diminuent de surface et au bout d'un temps plus ou moins long se cicatrisent totalement. Au contraire, les plaies chancreuses plates — que, faute de mot plus approprié, nous appellerons ici nécrose — se comportent tout à fait autrement: Leur surface augmente de plus en plus, même pendant la belle saison ou à la suite d'hivers très peu rigoureux, quand il est impossible de supposer que les arbres les

[1]) Ed. Prillieux. Maladies des plantes agricoles. T. II. p. 75, 76 et 77.

moins résistants aient pu souffrir du froid. Encore faut-il ajouter que les plaies chancreuses plates se forment aussi bien sur les variétés résistantes au gel et qui ne souffrent jamais du froid dans le climat du pays où on les cultive, que sur toutes les autres.

En nous mettant, il y a 8 ans, à étudier le chancre des arbres, nous étions persuadés, d'après les résultats des recherches de Goethe et de Hartig, que le Nectria dittissima est la seule ou au moins la principale cause de cette maladie. Nos recherches portaient sur deux points. Nous désirions notamment établir, au moyen d'observations microscopiques, quelle est la relation intime entre les hyphes du champignon et les tissus des plaies qui commencent à souffrir de l'atteinte du mal. D'autre part, nous voulions démontrer d'une manière expérimentale, comment s'effectue l'infection des tissus sains par les spores ou le mycelium du parasite.

Nous avons commencé par obtenir des cultures pures du Nectria, que nous employâmes ensuite à contaminer des jeunes pommiers cultivés en pots et tenus sous cloches. Toutes nos recherches dans ce sens donnèrent des résultats négatifs. Au cours de nos observations microscopiques, nous trouvâmes, il est vrai, le mycelium du Nectria dans beaucoup de plaies chancreuses, mais uniquement et toujours dans le tissu déjà mort — donc pas dans cette région où le bois commence à devenir anormal, mais là seulement où la maladie a exercé son influence funeste depuis longtemps. Les inoculations non plus ne réussirent guère. Les spores avaient germé et formé dans l'air humide, sous cloche, un mycelium abondant; celui-ci cependant s'étalait seulement sur la surface de l'écorce, mais ne la pénétrait jamais et n'endommageait d'aucune manière les jeunes pousses du pommier. Le mycelium du Nectria ne détermina jamais une action destructive dans les tissus encore sains.

L'observation du Nectria dans la nature a confirmé en quelque sorte l'opinion que nous nous sommes faite, que ce champignon n'avait rien à voir dans la maladie du chancre. On peut facilement trouver le Nectria non seulement sur les plaies chancreuses, mais partout à la surface des arbres, où il y a un morceau de bois mort ou une écaille de vieille écorce à ronger. Il accompagne ainsi fidèlement le Fusicladium, en profitant de l'écorce morte, qui a été tuée par ce parasite, mais sans jamais lui-même s'attaquer aux tissus vivants et sans y provoquer de changements, qui rappelleraient en quoi que ce soit la maladie du chancre.

Ayant acquis la certitude que le Nectria ne pouvait être la cause directe du chancré, il nous fallut rechercher quel est le vrai facteur de cette maladie. L'observation suivante nous servit de point de départ dans ces recherches: à savoir que le bois des branches, portant des plaies chancreuses, offre toujours un aspect plus ou moins anormal. Ce bois est traversé, principalement dans le sens de la longueur, par des filons se distinguant du bois sain par leur couleur jaunâtre, jaune ou brune. On peut observer ces filons de bois à couleur modifiée à une distance de 30, 40 à 50 cm. — et même plus — d'une plaie chancreuse. Souvent on voit ces filons à couleur modifiée réunir entre elles plusieurs plaies chancreuses, même fort éloignées l'une de l'autre. On retrouve aussi ces filons dans toutes les excroissances chancreuses et dans les bourrelets des plaies, où ils cheminent dans divers sens parmi du bois apparemment sain. Comme les plaies chancreuses, même les plus récentes, s'accompagnent toujours de ce changement de couleur du bois, nous avons été amenés à conclure que la lésion plus ou moins profonde du bois constitue le fait essentiel de la maladie. On pourrait même dire que cette lésion du bois — c'est la maladie elle-même, et que les plaies et excroissances chancreuses n'en sont que la manifestation extérieure et finale. Cette manière de voir est justifiée par le fait, qu'il est aisé d'observer des changements anatomiques dans le bois sans la présence de plaies chancreuses à l'extérieur de l'arbre, mais que jamais nous n'avons pu trouver une plaie chancreuse sans les changements mentionnés dans le fond du bois.

Cette particularité n'a pas attiré suffisamment l'attention des observateurs, quoique certains d'entre eux l'aient bien distinctement marquée dans leurs dessins [1]). L'indifférence sur ce point s'explique par le fait que ces auteurs regardent le chancre comme une maladie essentiellement de l'écorce, ce qui les a induits à négliger les modifications qui se produisent à l'intérieur du bois. Quant à Sorauer, il décrit bien les changements anatomiques du bois, mais il les regarde comme causés par une action locale du froid.

Ayant acquis la presque certitude que les lésions internes du bois sont l'essence même de la maladie du chancre, il nous restait à découvrir la cause immédiate de ces lésions. Au mois de mai 1899, en observant à de forts grossissements des coupes de bois de

[1] Göthe. Mittheilungen über den Krebs der Apfelbäume. 1877. p. 15, f. 20 b.

pommier, pris à une certaine distance d'une plaie chancreuse, nous y avons trouvé des bactéries, qui après coloration se présentaient fort distinctement. Des observations ultérieures ont prouvé la présence constante de ces bactéries dans les tissus à couleur changée. Nous nous sommes donc mis à considérer ces bactéries comme la vraie cause immédiate du chancre.

Au commencement du mois d'août 1899 nous avons obtenu sans grande difficulté des cultures pures de ces bactéries dans des milieux nutritifs liquides et solides. Ces bactéries nous servirent à faire des inoculations expérimentales sur plusieurs arbres de jeunes pommiers. Les expériences ayant réussi, nous sommes autorisés à regarder comme la cause directe de la maladie du chancre la bactérie mentionnée, que nous nommons Bacterium mali.

Bacterium mali (Brzez.)

Bactéries du pommier.

Le bacterium mali a la forme de bâtonnets courts et droits: d'environ 2 mcm. de longueur et 0·6 ou 0·7 mcm. de largeur. En les observant attentivement, on peut remarquer que ces bâtonnets se trouvent presque toujours en état de division; ils se présentent alors comme s'ils étaient formés de deux corpuscules ovales. La longueur des bactéries varie de 1 à 3 mcm. Cultivée dans des conditions favorables, la bactérie forme des bâtonnets plus longs, quelquefois même réunis en de courtes chaînettes. Les chaînettes se trouvent alors semées çà et là parmi les simples bâtonnets, beaucoup plus nombreux. On peut aussi observer de telles chaînettes de bactéries non encore séparées dans le plasma des cellules du bois attaqué, mais cela n'arrive que rarement.

La bactérie du pommier est mobile. Observées dans une goutte suspendue, les bactéries accomplissent un mouvement double: elles tournent vivement à la manière d'un tourniquet, et en même temps elles effectuent par secousses légères un mouvement en avant. Le mouvement des bactéries n'est point continu: on peut voir des bâtonnets reposant tranquillement pendant un certain temps et puis se mettant à tourner, à se mouvoir, pour disparaître finalement du champ visuel du microscope.

Les bactéries vivantes ont l'aspect de bâtonnets incolores, de forme ovale à bouts arrondis. Il est assez difficile, mais non impossible d'apercevoir ces bactéries non colorées dans les tissus.

Les bactéries sont enveloppées d'une enveloppe gélatineuse, qui ne se laisse pas distinguer à l'étude au microscope des bactéries colorées, mais qui devient parfaitement visible sur les photographies (Fig. 1.). Les bactéries du pommier ne se colorent pas à la méthode de Graham. En revanche, elles attirent aisément divers colorants, tels que la fuchsine, le violet de gentiane et le violet de méthyle. Les colorations les plus intenses ont été obtenues en traitant les bactéries avec le bleu de méthyle polychrome pendant 10 minutes et en les chauffant légèrement en même temps; on lave ensuite la préparation à l'eau, sans employer de décolorant.

Cultivé dans un bouillon approprié, le bacterium mali y forme bientôt une espèce de nuage léger, ainsi qu'un précipité blanchâtre au fond de l'éprouvette. A la surface du liquide des vieilles cultures il se forme un mince voile à reflets metalliques, qu'on obtient aussi à la surface de l'eau dans un bocal, si l'on y fait tremper pendant quelque temps des morceaux de branches chancreuses.

Cultivée sur de l'agar-agar, la bactérie se développe à la surface, en formant une couche épaisse blanc-grisâtre qui ne tarde pas à recouvrir l'agar entier. Les cultures plus anciennes présentent aussi un lustre métallique à leur surface. La bactérie ne pénètre pas dans l'intérieur du milieu nutritif. Si nous l'inoculons profondément à l'intérieur de l'agar, elle s'y développe faiblement et seulement sur les bords de la fente produite par la piqûre dans la gelée nutritive. Le bacterium mali est donc aérophile.

Les bactéries du pommier forment dans les boîtes de Petri des colonies rondes, de couleur blanc-grisâtre, saillantes, qui ne présentent d'ailleurs rien de particulier dans leur structure. Les colonies qui se développent sur de la gélatine sucrée sont de la même teinte, mais plus plates (Fig. 2.).

La bactérie du pommier liquéfie la gélatine au bout de dix ou de quinze jours. Il se forme d'abord autour de chaque colonie une couche légère de gélatine liquéfiée, de sorte que les colonies semblent s'enfoncer; peu à peu toute la gélatine est liquéfiée entièrement.

Les cultures du bacterium mali exhalent une forte odeur d'acide butyrique. Cette odeur est surtout remarquable, quand les bactéries sont cultivées sur de la gélatine et au moment où celle-ci est en train de se liquéfier.

La bactérie du pommier se développe parfaitement sur la pomme de terre stérilisée; elle forme sur sa surface une épaisse couche

grisâtre. Les coupes microscopiques de la pomme de terre, faites quand la culture des bactéries s'y est bien développée, montrent que les bactéries pénètrent dans les tissus à une profondeur considérable, mais pourtant à mesure que la profondeur augmente, le nombre des bactéries diminue sensiblement.

Les essais de culture du bacterium mali sur des pommes stérilisées ont été infructueux, probablement à cause de la trop grande quantité d'acide que renferme ce fruit.

Des milieux nutritifs généralement employés, c'est l'agar-agar avec du moût de bière qui convient le mieux à la bactérie du pommier; elle le préfère à l'agar-agar au sucre. Sur l'agar-agar pur la bactérie se développe très faiblement. Les gelées nutritives à base de gélatine semblent moins bien convenir au développement des cultures, que celles à base d'agar-agar.

Le bacterium mali se développe déjà à une température peu supérieure à 0°. Ainsi, on peut observer la formation de nouvelles colonies sur des boîtes de Petri placées dans des récipients remplis de glace. Le développement des bactéries à une température aussi basse est cependant faible. La température qui paraît le mieux convenir à la bactérie du pommier est celle d'environ 20° C.; son développement est alors intense et rapide. Pendant les chaleurs de l'été, quand le thermomètre monte beaucoup plus haut, le développement des bactéries semble ralenti. Les températures élevées lui sont funestes. Cultivée à 37° C., la bactérie accuse une végétation faible, et deux jours suffisent pour qu'elle se mette à produire des formes involutives, prenant l'aspect de filaments courts d'abord, puis de plus en plus longs.

Inoculée dans un milieu nutritif nouveau et maintenue à la température ordinaire des appartements, la bactérie se multiplie rapidement. Le développement des bactéries devient visible déjà après 24 heures; trois jours plus tard, les cultures prennent leur forme et leur teinte caractéristiques, et il leur suffit d'une quinzaine de jours pour envahir toute la surface de l'agar.

Les bactéries peuvent végéter jusqu'à trois mois sur le même milieu nutritif stable, sans perdre beaucoup de leur vitalité. Celle-ci dépend surtout de l'état d'humidité du milieu nutritif. Le dessèchement de ce milieu affaiblit les bactéries et amène peu à peu leur mort, tandis qu'elles peuvent rester fort longtemps bien vivantes dans un milieu suffisamment humide. Ainsi, tandis que l'inoculation

dans un milieu nouveau des bactéries cultivées plus de trois mois sur de l'agar-agar ne donne pas toujours de résultats satisfaisants, les bactéries cultivées dans du bouillon conservent leur vitalité jusqu'à deux ans.

L'obtention de cultures pures, par l'ensemencement des milieux nutritifs solides ou liquides avec les bactéries prises dans la nature, ne présente pas de grandes difficultés. Cette obtention est facilitée par le fait que le tissu ligneux attaqué par le chancre, s'il est pris avec des précautions suffisantes et à une certaine distance de la surface des plaies, ne renferme pas d'autres microorganismes capables de se développer. Nous avons procédé de la manière suivante:

Après avoir enlevé au moyen d'un couteau stérilisé l'écorce du bourrelet cicatriciel du chancre ou l'écorce d'une place de la branche plus éloignée de la plaie, mais où le bois était visiblement attaqué par les bactéries, nous découpions un morceau de ce bois. Nous rognions ce morceau plusieurs fois, en changeant souvent de couteau, pour atténuer la possibilité d'avoir laissé demeurer sur le bois des microorganismes étrangers, qui auraient pu y être entraînés de la surface de l'écorce. Possédant un morceau de bois ainsi nettoyé, nous en découpions de fins copeaux, qui étaient placés immédiatement à la surface de l'agar-agar dans des éprouvettes et y adhéraient fortement, ou bien étaient jetés dans des éprouvettes avec du bouillon.

Les éprouvettes ensemencées étaient tenues en lieu sombre à la température ordinaire.

Au bout de 3 ou 4 jours, quelquefois après 8 jours seulement ou même plus tard, les bactéries commençaient à se développer, en formant dans les milieux nutritifs stables de menues colonies au bord des copeaux. Ces colonies se développaient rapidement, de sorte que bientôt les copeaux de bois se trouvaient noyés dans la masse des bactéries. En procédant avec précaution on obtient de cette manière, dans une partie des éprouvettes au moins, des cultures tout à fait pures.

Quant aux éprouvettes avec du bouillon où les copeaux de bois chancreux avaient été placés, on voyait au bout de 4 ou 5 jours que le liquide devenait légèrement troublé et qu'il s'y formait un précipité blanchâtre — signe caractéristique du développement des bactéries dans le liquide.

Dans le bois malade, nous trouvons le bacterium mali dans toutes

les cellules possédant un contenu; les bactéries envahissent donc surtout les tissus parenchymateux, et on les trouve aussi bien dans le parenchyme médullaire que dans celui du bois et de l'écorce. La présence des bactéries dans les cellules privées totalement de contenu ne semble être qu'accidentelle.

Les bactéries abondent d'autant plus dans les cellules, que celles-ci sont plus riches en protoplasme et en amidon. On aperçoit les plus grandes quantités de bactéries dans les cellules — riches en contenu — du parenchyme médullaire des jeunes bourgeons contaminés. Elles y apparaissent d'autant plus distinctement, qu'il est facile de faire des coupes très fines dans le bois non encore durci, et d'y bien colorer les bactéries.

En observant les bactéries à l'intérieur des cellules, on les voit disséminées dans le protoplasme, aussi bien vers le centre de la cellule que près des cloisons (Fig. 3.). Le protoplasme est souvent rétréci en masse irrégulièrement globuleuse, qui occupe une partie de la cellule; cette masse protoplasmique emprisonne de nombreuses bactéries disposées dans tous les sens. Quelquefois, rarement cependant, on peut apercevoir de courtes chaînettes; en général, les bâtonnets sont isolés, et on peut observer qu'ils se présentent la plupart du temps à l'état de division. La masse protoplasmique resserrée prend une teinte brunâtre, diminue de volume et se transforme peu à peu en un petit amas brun. Dans les cellules contenant de l'amidon, comme dans celles du parenchyme ligneux ou médullaire, on trouve les bactéries abondamment disséminées parmi les grains d'amidon et adhérant à leur surface. Les grains d'amidon conservent quelque temps leur aspect normal et leurs contours précis; bientôt cependant l'influence des bactéries commence à se manifester — la netteté des contours disparaît, ce qui résulte de la corrosion de leur surface. Le nombre des grains avariés s'accroît peu à peu, et ils finissent par se fondre ensemble en une masse informe, où on n'arrive qu'avec difficulté à distinguer les grains séparés (Fig. 4.). Quelquefois une partie des grains d'amidon contenus dans une cellule est changée déjà et ne forme qu'une seule masse, tandis que certains autres grains se présentent comme presque intacts (Fig. 5.). La masse grise d'amidon, provenant des grains fondus ensemble, est bourrée de bactéries. Dans les états d'altération plus avancée, la masse difforme de l'amidon diminue de volume et se présente comme un petit amas coloré en brun. Il arrive souvent que l'on

peut observer dans plusieurs cellules voisines toutes ces phases successives de l'action destructive des bactéries sur les grains d'amidon.

On trouve généralement beaucoup de bactéries tout près des cloisons des cellules et y adhérant. Il n'est pas rare également de les voir remplissant les canalicules dans les cloisons épaissies des cellules. Dans les cellules à parois épaissies, on peut distinguer souvent que cette paroi est rongée par places et que les bactéries se trouvent placées dans les cavités ainsi formées (Fig. 6.). Les faces internes des parois ne présentent pas alors de lignes nettes, elles semblent en quelque sorte frangées. On y voit par places des trous traversant les cloisons dans toute leur épaisseur. En observant les cellules de manière à voir leur paroi supérieure, on peut apercevoir que cette paroi est percée de grandes ouvertures à bords irréguliers, sur lesquels se trouvent les bactéries.

La membrane corrodée se colore en brun. On peut voir quelquefois, entre deux cellules dont les cloisons sont encore normales, un point où la paroi est déjà brunie de part en part.

La destruction des cloisons arrive après celle du contenu cellulaire. Elle a lieu soit de manière que toute la partie interne des parois est attaquée en même temps intégralement, soit de manière qu'il se forme dans la cloison des taches brunes çà et là, tandis qu'en d'autres places la paroi cellulaire garde encore sa couleur et sa grosseur normale. Les parties brunies se détachent alors souvent par morceaux de la couche interne de la paroi cellulaire. Finalement, les cloisons s'amincissent, se ratatinent, se déchirent et enfin disparaissent complètement (Fig. 7.).

Le parenchyme ligneux qui entoure les vaisseaux semble être le plus sujet à l'action corrosive des bactéries. Nous voyons ses tissus absolument détruits là où le parenchyme voisin des rayons médullaires conserve encore la forme normale de ses cellules, quoique celles-ci renferment bien de nombreuses bactéries. Nous expliquons la résistance relative du parenchyme des rayons médullaires par la vitalité plus grande de ce tissu, composé de cellules riches en protoplasme, tandis que les cellules à cloisons épaisses du parenchyme ligneux sont presque entierement remplies d'amidon et le protoplasme s'y trouve en petite quantité. La corrosion des cellules du parenchyme ligneux entourant les vaisseaux amène la destruction de ces vaisseaux, qui disparaissent complètement. Fina-

lement, il ne reste à la place des vaisseaux et du parenchyme ligneux qui les entourait que des cavités vides (Fig. 8.).

La facilité avec laquelle le parenchyme ligneux succombe à l'action des bactéries, comparée à la résistance relativement grande opposée par le parenchyme des rayons médullaires, nous explique le fait constaté dans la nature, que la bactériose se développe beaucoup plus promptement dans la direction de la longueur des branches que dans celle de leur épaisseur.

L'observation de l'action corrosive du bacterium mali dans les tissus nous fait conclure que ces bactéries ont la faculté de liquéfier les cloisons cellulaires et qu'elles pénètrent d'une cellule dans l'autre aussi bien par les canalicules des parois qu'au moyen de la corrosion des parties épaissies des parois cellulaires. Après avoir pénétré dans la cellule, les bactéries déterminent d'abord la disparition de son contenu, suivie bientôt de la corrosion totale des cloisons. Il en résulte la modification de la teinte du tissu ligneux, dont les éléments moins résistants ont subi une altération partielle ou même une destruction totale. A mesure que s'accroît l'action destructive des bactéries, les éléments plus résistants du tissu succombent à leur tour. La modification de la couleur du bois s'accentue donc de plus en plus. Quelquefois, dans les bosses chancreuses par exemple, le bois en brunissant devient en outre mou et spongieux, ce qui résulte de la destruction d'une grande partie du tissu.

L'observation des bactéries incluses dans les tissus est rendue difficile par le fait que la dureté du bois ne permet pas de faire des coupes suffisamment minces, et comme on est forcé d'employer des grossissements très forts, on doit se borner à étudier seulement les parties de la coupe où elle est le plus mince. Les coupes faites dans du tissu moins dur, comme p. ex. celui du parenchyme médullaire, font exception. Une autre difficulté tient à la coloration des bactéries renfermées dans le tissu ligneux: les colorants qui sont attirés par les bactéries donnent également une coloration intense au tissu, et en conséquence les bactéries n'apparaissent pas assez distinctement.

Après avoir essayé de nombreuses méthodes de coloration, nous avons choisi de préférence la méthode d'Unna, employée par lui pour la coloration du bacterium ulceris molli dans les tissus animaux. Suivant cette méthode, on colore une coupe pendant 30 minutes avec le bleu de méthyle polychrome et on la décolore ensuite

au moyen d'un mélange suivant: aniline — 100. anil. acide 2, tannine 0,05, mélange d'éther et de glycerine 0,10. Le tissu se décolore alors fortement; les bactéries restent plus colorées et on les distingue facilement. On peut aussi, après avoir coloré les coupes avec le bleu de méthyle polychrome, les décolorer avec un mélange d'éther et de glycerine, et les laver à l'alcool.

Dernièrement, nous avons encore pris connaissance d'une nouvelle méthode de coloration qui nous a donné les résultats les meilleurs. C'est la méthode de Pappenheim, modifiée par Unna[1]).

Le colorant est composé de la manière suivante: vert de méthyle 0·15, pyronine 0·25, alcool 2·50, glycerine 20·00. Compléter jusqu'à 100 avec de l'eau phéniquée $^1/_2$%. Colorer pendant 10 minutes à la température de 40°C. ou 20 minutes à froid. Laver la préparation avec de l'eau, puis avec de l'alcool, et traiter, afin de l'éclaircir, avec de l'huile de bergamote.

Avec ce système de coloration, le protoplasme cellulaire prend une teinte rose clair et les bactéries se colorent en rouge foncé, se détachant parfaitement sur le fond.

Inoculations expérimentales. Une fois en possession des cultures pures du bacterium mali, nous avons inoculé ces bactéries à des arbres bien portants, afin d'obtenir la preuve concluante de leur faculté d'infection. Les expériences ont été commencées au mois d'août 1899.

Pour nos inoculations nous avons employé de jeunes pommiers des variétés: Calville blanc d'hiver, reinette grise du Canada et rouge de Stettin d'hiver, plantés dans des caisses, et aussi les variétés: Belle fleur jaune, reinette de Bauman et reinette de Caux, croissant librement dans le sol du jardin. Ces derniers arbres, greffés sur doucin, étaient âgés de 4 ans et se distinguaient par leur bon état de santé et leur végétation vigoureuse. Les pommiers en caisse, de même âge que ceux plantés dans le jardin, étaient greffés sur paradis, ce qui, joint aux limites fixées à la croissance de leurs racines par les parois de la caisse, était la cause de leur croissance moins forte. Ils étaient néanmoins en très bon état de santé et se développaient parfaitement. Les arbres en caisse furent hivernés en 1899/1900 et 1900/1901 dans un fossé, garni et couvert de planches, où ils étaient à l'abri de la gelée; durant l'hiver de 1901/1902

[1]) Monatsschrifte für prakt. Dermatologie. 1902. T. 35.

et 1902/1903 ils furent placés dans une cave. Il convient d'ajouter, que les hivers de 1899/1900, 1900/1901 et 1901/1902 étaient fort cléments. Les pommiers cultivés au jardin furent par précaution couverts de paille pour l'hiver.

Nous avons effectué de nombreuses inoculations sur les parties jeunes et sur celles plus vieilles des pommiers, en procédant de deux manières: 1) par de simples piqûres jusqu'au bois, faites avec une aiguille infectée, et 2) par des incisions longitudinales de l'écorce jusqu'au cambium et l'introduction dans la fente ainsi formée d'une aiguille contaminée. Là où l'inoculation devait être pratiquée, la surface de l'écorce fut désinfectée auparavant par un lavage répété fait avec de l'alcool faible. La moitié des inoculations fut laissée sans abri, l'autre moitié fut recouverte de ouate stérilisée, fixée au moyen de ligatures, afin de préserver les plaies d'une infection éventuelle, venant du dehors. Sur chaque arbre nous avons choisi quelques branches qui devaient servir de témoins. Ces branches ont été piquées et incisées comme les arbres inoculés, mais avec des outils stérilisés.

Indépendamment des arbres destinés en entier à nos recherches et devant servir aux observations à long cours, nous avons inoculé au moyen de piqûres et d'incisions une grande quantité de jeunes pousses de l'année sur un pommier (reinette du Canada), planté au jardin. Ces pousses devaient nous fournir matière à observation immédiate et servir particulièrement aux recherches microscopiques ayant pour but d'établir, si les bactéries se développent dans les tissus sains environnant la plaie et dans le cas où cela a lieu — au bout de combien de temps se fait cette pénétration. Les recherches microscopiques furent commencées quinze jours après l'inoculation. A ce moment, les plaies sur les pousses de l'année étaient déjà cicatrisées.

En coupant longitudinalement les pousses inoculées, nous avons aperçu — dès ce moment — que le bois et la moelle des pousses avaient changé de couleur sur une petite étendue, tout autour du point bruni déterminé par la piqûre. Chez les témoins au contraire, la partie altérée par la piqûre se détachait distinctement du tissu environnant, qui était resté complètement sain.

Les préparations microscopiques des pousses inoculées montrèrent en même temps, que les cellules des tissus aux environs des plaies avaient été envahies par des bactéries très nombreuses. Cela était particulièrement facile à observer dans les cellules du parenchyme

médullaire, où la bactériose semblait faire les progrès les plus rapides (Fig. 9.). Il fut donc constaté de cette manière, que les bactéries inoculées pénètrent dans les tissus sains et s'y multiplient énergiquement.

Les coupes suivantes, faites consécutivement jusqu'à la fin de l'automne 1899, montrèrent un progrès lent mais constant de la bactériose, se manifestant par le jaunissement du bois sur une étendue toujours plus grande. Nous avons remarqué que le développement des bactéries était plus énergique lorsqu'elles avaient été introduites au moyen de piqûres, que lorsque l'inoculation avait été pratiquée par l'incision de l'écorce. Dans le premier cas, l'infection du bois — se manifestant plus ou moins fortement — avait lieu toujours et sans exception, tandis que parmi les inoculations faites par incision il s'en présenta plusieurs, où le bois était resté inaltéré, en apparence du moins, et seules les raies brunes dans l'écorce, partant du point de l'inoculation, trahissaient le développement des bactéries. Nous nous expliquons cela par le fait que les bactéries, si elles n'ont pas pénétré pendant l'inoculation dans le bois même mais seulement dans les couches profondes de l'écorce, n'ont pas été ensuite en état d'atteindre la zone cambiale et le bois et en sont restées séparées par les éléments de l'écorce nouvellement formés. La manière dont se fait le grossissement de l'écorce met la partie ligneuse des arbres à l'abri de l'infection bactérienne venant de ce côté, d'autant mieux que les parties malades de l'écorce peuvent être facilement séparées de l'intérieur par une couche de liège et rejetées en dehors. D'autre part, on peut supposer également que la différence dans les résultats des deux modes d'inoculation provient de ce fait, que les bactéries trouvent plus facilement à se développer dans les cellules physiologiquement plus faibles dont se compose le bois moins jeune, que dans les cellules bien vivantes du cambium.

L'action des bactéries s'était révélée exactement de la même manière dans les inoculations laissées à découvert que dans celles qui furent enveloppées de ouate. Toutes les plaies étaient cicatrisées normalement avant l'hiver et recouvertes d'une couche mince de bois jeune, ainsi que d'écorce nouvelle.

L'examen, fait au mois d'avril 1900, montra un progrès visible de l'infection, se manifestant par un changement plus intense de la teinte du bois attaqué, lequel occupait de plus une étendue plus

considérable qu'à la fin de l'automne précédente. Ces observations suggéraient donc la conclusion que les bactéries avaient exercé leur action corrosive pendant les moments plus doux de l'hiver et dans les premiers jours du printemps, ce qui coïnciderait avec le fait, constaté dans les cultures artificielles, que les bactéries du pommier peuvent se développer à des températures relativement basses

Le bois des branches inoculées accusait une modification de couleur assez intense sur une longueur d'un demi cm. au-dessus et au-dessous du point d'inoculation. Le développement des bactéries dans la direction de l'épaisseur de l'arbre était relativement faible.

Au cours de l'année 1900, les plaies cicatrisées se comblèrent et s'aplanirent, ne laissant que des traces légères à la surface de l'écorce. Les points infectés furent recouverts de nouvelles couches de bois normal. Les branches des arbres, plantés dans le sol du jardin, grossirent considérablement; celles des arbres en caisse — un peu plus faiblement, ce qui était la conséquence des conditions de leur croissance. Cependant, nos observations durant cet été de 1900 montraient toujours un progrès constant dans le développement de la maladie à l'intérieur du bois, de sorte que lorsque nous coupâmes en automne de la même année plusieurs branches inoculées, nous y trouvâmes une altération du bois atteignant déjà $1^1/_2$ cm. au dessus et au dessous du point d'inoculation.

La largeur des filons du bois à couleur modifiée avait également augmenté, pas assez cependant pour que le développement de l'infection dans le sens de la grosseur des branches ait pu égaler, chez les arbres à croissance vigoureuse, l'accroissement normal du bois dans ce sens. C'est ainsi que dans la plupart des cas examinés, chez les arbres à végétation vigoureuse, les bactéries corrodaient le bois principalement dans la direction de la longueur de la branche, mais les places atteintes se trouvaient séparées de la zone cambiale par une couche toujours plus épaisse de bois jeune et normal.

Au cours de l'année 1901, les inoculations montraient un progrès constant de la bactériose, les arbres inoculés ne présentant en outre rien de particulier.

Les recherches faites au printemps 1902 vinrent démontrer un développement considérable de la bactériose du bois. Une branche du pommier Calville blanc d'hiver, planté en caisse et inoculé en 1899 au moyen de piqûres, commença, au moment de la feuillaison,

à trahir un état maladif. Tandis que le reste de l'arbre ne présentait rien d'anormal, la branche mentionnée tardait visiblement à développer ses feuilles et portait des bouquets, dont les fleurs étaient courtement pédonculées et plus menues que d'ordinaire. Ces bouquets se fanèrent et séchèrent en pleine floraison, comme s'ils étaient privés d'eau et d'aliments. Tout le feuillage de la branche était peu abondant, ce qui la distinguait facilement des autres branches à feuillage normal. La branche mentionnée ne présentait point d'accroissement et rappelait à s'y méprendre l'aspect d'une branche gelée; ce dernier point cependant ne pouvait être admis, vû le mode d'hivernage de l'arbre.

La même branche, coupée et examinée au mois de juin 1902, montra un grand développement de la bactériose dans le bois. Les raies brunes, partant des points d'inoculation, se réunissaient en un filon traversant toute la longueur de la branche. La totalité du bois avait pris une teinte jaunâtre, plus claire vers le milieu et plus foncée — presque brune — vers le pourtour de la branche.

Les autres branches de l'arbre cité, ainsi que les autres arbres croissant en caisses, ne présentèrent au cours de l'été 1902 aucun signe extérieur de maladie. Ils fleurirent normalement et donnèrent des fruits. Néanmoins, l'examen de plusieurs inoculations, fait à la fin de l'été, montra l'allongement des filons du bois à couleur modifiée, qui atteignaient déjà jusqu'à 5 cm. de longeur à partir du point de l'inoculation

Quant aux arbres croissant dans le sol du jardin, nous avons observé au printemps de 1902 sur le tronc de l'un d'eux — une reinette de Caux [1]) deux places malades, correspondant aux points d'inoculation. La surface de ces places couvertes d'écorce morte et desséchée mesurait environ 1 cm. de longueur et un $^1/_2$ cm. de largeur. Au dessous de l'écorce morte enlevée apparaissait le bois bruni et altéré. Ces plaies ne différaient donc point des plaies chancreuses qui sont en train de se former. Durant l'été 1902 les plaies commencèrent à se cicatriser, en formant des bourrelets — et c'est ainsi que nous les trouvons à l'approche de l'hiver 1902/1903.

Il s'est formé encore sur la même reinette de Caux, en automne

[1]) Dans notre note, présentée en 1902 à l'Académie des Sciences de Paris, il s'était glissé une erreur dans le nom de la variété du pommier: il s'agit d'une reinette de Caux et non de Baumann.

1902, une nouvelle plaie, toute semblable aux précédentes, mais beaucoup plus grande. Il est impossible d'affirmer aujourd'hui si ces plaies deviendront dans les années suivantes des plaies chancreuses typiques, caractérisées — comme nous le savons — par la destruction consécutive des bourrelets du tissu cicatriciel, ou si, au contraire, elles arriveront à se cicatriser normalement.

Les autres arbres inoculés, croissant dans le sol du jardin, ne présentaient au cours de l'été et de l'automne de 1902 rien d'anormal. Ils ont fleuri et porté des fruits, et seul l'accroissement des filons à teinte modifiée dans l'intérieur du bois accusait le progrés constant de la maladie.

Comme les arbres en caisse avaient hiverné en 1902/1903 dans une cave, il nous fut possible d'en faire le 8 décembre un dernier examen.

Nous avons trouvé dans deux pommiers (reinette grise du Canada et rouge de Stettin) un développement si grand des filons à couleur changée, que ces raies d'un brun rougeâtre parcouraient déjà toute la longueur des branches inoculées (Fig. 10.). A ces filons bruns correspondait l'altération du bois avoisinant, qui avait pris une teinte jaune canari. Nous avons en outre découvert sur le pommier rouge de Stettin une petite plaie chancreuse caractéristique, formée autour de la place de l'inoculation sur une jeune branche latérale. Quant au troisième pommier (Calville blanc d'hiver), il montrait une altération totale du bois, comparable à celle qui s'était manifestée antérieurement sur l'une des branches de cet arbre au printemps de 1902. Cette altération consistait en une coloration uniforme du bois en jaune foncé, passant au jaune brun sous l'écorce au pourtour de la branche. Très probablement, d'après le fait déjà observé, l'arbre ne survivra pas l'été prochain.

Comme on voit, ces expériences n'ont pas encore donné de résultats définitifs, si on ne tient pour tels que la formation de nombreuses plaies ou tumeurs chancreuses, bien caractérisées. Ces résultats sont cependant affirmatifs dans ce sens, que l'inoculation des bactéries entraîne leur pénétration dans les tissus et des altérations progressives dans le bois — altérations, qui sont le signe distinctif du chancre et l'accompagnent toujours. Ces altérations d'ailleurs, sans accompagnement d'aucune manifestation extérieure, sont capables de provoquer l'etat maladif de l'arbre et d'entraîner sa mort.

Il résulte d'autre part, de la nature du tissu ligneux, que les progrès de la maladie, aussi bien que la cicatrisation des plaies sur les arbres, sont extrêmement lents à s'accomplir; en conséquence, le laps de temps qui s'est écoulé depuis le moment des inoculations n'était pas suffisant pour que les plaies caractéristiques ou tumeurs chancreuses aient pu se former.

La manière dont la bactériose se développait dans les arbres inoculés, aussi bien que les observations faites en même temps sur les arbres malades du jardin non infectés expérimentalement, nous ont d'ailleurs définitivement convaincus, que les plaies et tumeurs ne sont que les manifestations extérieures de la maladie et exigent certaines conditions pour apparaître, mais peuvent manquer totalement sur les arbres les plus malades et prêts à mourir.

L'auteur supposait d'abord, en commençant ses expériences, qu'en faisant des inoculations il provoquerait des altérations locales du bois sur une étendue plus ou moins grande, altérations qui se manifesteraient aussitôt à l'extérieur par un chancre ou tumeur à la place inoculée. Les observations qui suivirent démontrèrent cependant que l'infection et la maladie suivent un autre cours. La maladie commence à se manifester par le développement de plus en plus grand de la bactériose à l'intérieur du bois, cette bactériose gagnant des places fort éloignées des points de l'inoculation, sans se montrer à l'extérieur. Ces altérations du bois provoquent la mort des branches chez les arbres inoculés moins résistants et à végétation plus faible, sans former la moindre plaie ni tumeur. Au contraire, dans les arbres à végétation vigoureuse, les parties altérées sont masquées par de nouvelles couches épaisses de bois jeune. Les petites plaies, observées sur la reinette de Caux et sur un pommier rouge de Stettin en caisse, font exception et sont probablement le résultat de l'action plus énergique des bactéries dans les places d'infection, jointe à un affaiblissement local du tissu ligneux dans cette place.

En se basant sur le résultat de ces expériences, nous pouvons supposer qu'en général la défense des arbres contre les bactéries envahissantes peut être efficace jusqu'au moment où entre en jeu un agent quelconque d'affaiblissement de la végétation, tel que: le grand âge d'un arbre, l'action du froid, l'épuisement du sol etc.

Les résultats des expériences d'inoculation ont été pour nous le trait de lumière qui nous a guidé dans nos observations posté-

rieures des maladies provoquées par la bactériose du bois. Ces observations établirent enfin, comment la bactériose se développe au fond du bois et quelle est la manière dont elle provoque les diverses manifestations extérieures de la maladie. Nous avons acquis la certitude que la marche de la maladie dans les arbres en général ne diffère en rien de ce que nous avons observé sur les arbres consacrés aux expériences d'inoculation. C'est ce que nous tâcherons de démontrer plus loin.

Une seconde série d'inoculations fut effectuée à la fin du mois de juin et au commencement de juillet 1902. Pour faciliter la manipulation, nous avons employé exclusivement des pommiers plantés en caisse. Une partie de ces inoculations fut faite, ainsi que dans les expériences précédentes, au moyen de piqûres avec une aiguille infectée. Les autres furent pratiquées autrement: après avoir fait des incisions longitudinales de l'écorce, nous avons soulevé un peu cette écorce d'un côté de l'incision et nous avons fait passer une aiguille infectée au dessous de l'écorce soulevée. Les plaies produites de cette manière out été ligaturées et enduites de mastic. Les arbres ont vécu à l'air libre pendant le reste de l'été et à l'approche de l'hiver furent placés dans une cave.

En les examinant le 12 décembre 1902, nous avons trouvé que les bactéries, là où elles avaient été inoculées par des piqûres, se développaient de la même manière que dans les expériences décrites précédemment: on pouvait observer déjà une modification det la teinte du bois à une distance d'$1^1/_2$ jusqu'à 2 ctm. du point de l'inoculation. Quant aux infections par incision, elles montrèren un développement très rapide de la bactériose. Les incisions s'étaient, il est vrai, cicatrisées, mais les couches du bois jeune qui les cicatrisait avait pris une teinte anormale. On observait aussi un fort développement de la bactériose dans le bois ancien, vers le haut et vers le bas de la branche. Les lésions locales provoquées par les bactéries s'affirment donc plus vite et à un plus haut degré dans les inoculations pratiquées au moyen des incisions avec soulèvement de l'écorce, que dans celles effectuées par des piqûres. Nous attribuons ce fait à l'affaiblissement local des tissus, causé par le détachement momentané de l'écorce, et aussi à la circonstance qu'en agissant de cette manière, on introduit sous l'écorce une quantité de bactéries beaucoup plus grande que par le système de piqûres.

Mode de propagation des bactéries dans la nature.

Au sujet des infections naturelles et du mode de propagation des bactéries, nous ne pouvons exprimer que des idées genérales, basées sur nos propres observations, ainsi que sur les opinions admises des praticiens — la question ne pouvant être encore aujourd'hui résolue définitivement.

Il est probable que les bactéries sont répandues surtout par l'intermédiaire des insectes qui piquent les jeunes parties des arbres, comme les pucerons par exemple.

Cette supposition se trouve confirmée par le fait, observé par nous, de l'apparition violente d'une bactériose de jeunes pousses dans une pépinière de pommiers, à la suite de l'envahissement de cette pépinière par des pucerons. La croyance généralement admise et fondée sur l'expérience des cultivateurs, que les lésions faites aux arbres par le puceron lanigère sont quelquefois aussi le point de départ des vrais chancres, ne peut que venir à l'appui de notre opinion. L'infection causée par la piqûre des pucerons est probablement la plus dangereuse, car les bactéries sont introduites alors profondément dans le tissu des jeunes pousses. Le liquide sucré produit par les pucerons, qui couvre les feuilles et les pousses d'un enduit visqueux, peut aider à l'infection, en retenant d'une part les microbes portés par le vent, et d'autre part en leur servant de milieu nutritif momentané.

Les kermès peuvent aussi jouer le même rôle que les pucerons dans la propagation des bactéries. Il est à remarquer que certains auteurs leur attribuent surtout la faculté de provoquer la maladie du chancre. Ainsi Goethe, avant d'attribuer la cause du mal à la présence du Nectria, accusait les kermès de produire le chancre par leurs piqûres qu'il supposait vénéneuses [1]).

Il convient d'admettre qu'indépendamment de l'action des insectes piquants, chaque blessure de l'arbre, qui met le bois à nu, peut servir de porte d'entrée aux bactéries, les inoculations artificielles nous donnant la preuve que non seulement le jeune bois d'une année, mais aussi celui de 3 et de 4 ans peut être infecté. L'infection de l'écorce, si elle ne vient pas du dedans, c'est à dire si elle n'est pas le résultat de l'envahissement précédent du bois par les bactéries, ne semble pas faire grand tort à l'arbre.

[1]) R. Göthe. Mittheilungen über den Krebs der Apfelbaume 1877. page 27.

Les bactéries se trouvent disséminées à la suite de la décomposition totale et de l'émiettement du vieux bois chancreux. On peut voir à la surface des plaies chancreuses des masses noires et informes, composées de débris du bois, et qui, à la suite de la sécheresse, tombent en poussière, peuvent être emportées par le vent ou entraînées par l'eau vers le sol.

Le sol, qui reçoit les bactéries emportées par les eaux des pluies de la surface des plaies chancreuses, peut être pour ces bactéries un milieu favorable, ainsi que nous le prouve la formation des nodosités sur les racines des arbres, ces nodosités n'étant que le chancre de racines. Il est donc permis de supposer que la poussière ordinaire peut aussi renfermer des bactéries.

Le greffage des arbres fruitiers contribue sans nul doute puissamment à propager le chancre. En coupant longitudinalement les arbres de plusieurs années de greffage, atteints de bactériose, nous trouvons souvent que la partie du tronc qui a été fournie par le greffon même est le point de départ de la maladie; la bactériose s'accentue fortement au point de soudure. Nous supposons que c'est moins les blessures faites pendant le greffage que l'emploi de greffons contaminés qui est cause de l'infection — soit que ces greffons aient été pris sur des arbres malades, soit que les pousses, qui devaient servir ensuite de greffons, aient été fortement attaquées et infectées par les pucerons. Il est possible que le greffage avec un bourgeon (occulisation) offre moins de chances d'infection que le greffage proprement dit.

Le bacterium mali, une fois introduit dans l'organisme de l'arbre, s'y développe et provoque la bactériose du bois. Dans certains cas, comme p. ex. dans la maladie bactérienne des jeunes pousses, les organes attaqués peuvent être tués presque immédiatement, mais en général la bactériose se développe lentement dans l'intérieur du bois, sans que l'arbre semble en souffrir, car chez les sujets bien portants le développement de la bactériose est contrebalancé par la formation annuelle des nouvelles couches d'un bois jeune et normal. On peut remarquer souvent, en taillant les arbres, une bactériose assez prononcée de certains rameaux sans que ces rameaux et l'arbre entier semblent en souffrir d'aucune manière. C'est pourquoi, quoique probablement bien rares soient les pommiers exempts d'infection dans toutes leurs parties, nous voyons souvent ces arbres arriver à un âge avancé en parfait état de santé, et

seule l'extrême vieillesse de l'arbre ou l'épuisement du sol fait apparaître la maladie. D'autre part, les arbres tout jeunes peuvent être tués par la bactériose en un temps relativement court, si les conditions extérieures sont défavorables à leur bon développement. Ce cas se trouve fortement aggravé, si les arbres appartiennent en même temps aux variétés peu résistantes au chancre. Cela nous permet de comparer la bactériose chancreuse des arbres à la tuberculose de l'organisme animal.

Les conditions extérieures qui favorisent les progrès de la maladie sont bien connues et nous n'avons pas à revenir sur ce sujet. Ajoutons cependant que la pauvreté du sol en potasse, provoquant une végétation maladive, peut être une des conditions favorables au développement de la maladie. C'est un fait connu que les plantes diverses qui souffrent du manque de potasse sont bien plus exposées aux attaques des parasites végétaux que les plantes normales. Les observations que nous avons faites sur des arbres plantés dans un sol très bon au point de vue physique, mais insuffisamment riche en potasse, semblent confirmer cette opinion.

Quant à la cause de la résistance innée de certaines variétés à la maladie du chancre, nous en savons peu de chose, et les essais tentés par Sorauer pour expliquer cette résistance relative par les différences dans la structure des tissus nous semblent peu concluants. Nous savons que certaines variétés, comme: Reine des reinettes, Reinette du Canada, Calville blanc d'hiver, rouge de Stettin etc. souffrent plus que les autres — mais à cela se bornent nos connaissances dans cette matière. L'opinion, presque généralement adoptée, que les variétés à végétation vigoureuse souffrent plus que les autres, ne se confirme pas et nous voyons les variétés à végétation modérée, comme: Reinette muscat et rouge de Stettin, souffrir de même que les variétés à végétation vigoureuse.

Il convient de remarquer qu'à part la résistance relative des variétés, les individus appartenant à la même variété peuvent montrer un degré différent de résistance, dû aux facultés de résistance du sauvageon qui leur a servi de porte-greffe. Le sauvageon, étant obtenu de semis, possède des propriétes individuelles et s'il est peu résistant au chancre, il peut, en succombant lui-même à la maladie, la communiquer au sujet greffé sur lui.

Les manifestations extérieures de la bactériose du pommier.

La bactériose chancreuse est essentiellement une maladie du bois. Les bactéries peuvent se développer aussi dans l'écorce, mais — comme il a été dit plus haut — les lésions de l'écorce, si elles ne sont pas le résultat de la destruction du bois, ne présentent pas un grand danger pour les arbres.

La bactériose se manifeste à l'extérieur de l'arbre sous plusieurs formes, notamment sous forme de 1) bosses, 2) plaies chancreuses ordinaires, 3) tumeurs des branches, 4) nécrose, 5) bactériose généralisée de l'arbre, 6) bactériose des pousses et 7) nodosités sur les racines.

Les formes d'apparition de la maladie dépendent d'une part de l'intensité de la bactériose et du degré d'énergie avec laquelle les bactéries développent leur action, d'autre part de la résistance relative que leur opposent les tissus et des conditions locales de diverses parties de l'arbre. Ainsi, des altérations différentes peuvent se produire sur la même branche et à très peu de distance l'une de l'autre; par exemple, la bactériose cheminant dans le bois peut provoquer quelque part une plaie chancreuse ouverte et un peu plus loin une tumeur ou une nécrose de la branche. La plaie chancreuse ou la nécrose, en contournant totalement la branche, peuvent causer sa mort. La branche peut être cependant tuée, indépendamment des plaies qu'elle porte, par la bactériose généralisée du bois. Il arrive souvent que les plaies changent de nature, en prenant une forme plus aigüe, p. ex. une plaie chancreuse ordinaire ou une tumeur peuvent se compliquer par l'apparition tout autour d'elles d'une nécrose, qui tue bientôt la branche ou le tronc de l'arbre.

On trouve des formes intermédiaires si nombreuses et si peu marquées des diverses formes caractérisées du chancre, qu'il n'est pas toujours aisé de définir avec quelle forme on a vraiment à faire.

Les bosses chancreuses. On rencontre souvent sur le tronc et les branches des pommiers des bosses plus ou moins grandes, recouvertes d'écorce saine, sans trace de plaie extérieure. Ces bosses furent remarquées et décrites par Sorauer, qui les attribuait à l'action du gel [1]).

En coupant une telle bosse, quand elle est petite encore, on n'aperçoit souvent dans son bois rien d'anormal; en examinant cepen-

[1]) Paul Sorauer. Handbuch der Pflanzen-Krankheiten, Berlin 1886, t. I. p. 386.

dant à cette place les couches plus profondes du bois de la branche, on y voit une excroissance de la bactériose qui chemine dans ce bois, dirigée vers le point de formation de la bosse.

Quand la bosse est plus grande et par conséquent plus vieille, il arrive que l'excroissance de la bactériose interne du bois, en poussant vers l'extérieur, entre dans le corps même de la bosse et y produit des altérations plus ou moins profondes (Fig. 11.). Souvent le bois de la bosse change non seulement de couleur, mais aussi de consistance, il devient mou et spongieux. Ces changements n'intéressent que le bois plus vieux à l'intérieur de la bosse, les couches extérieures du bois et le cambium y restant — en apparence du moins — intacts. Le bois altéré, examiné au microscope, montre de nombreuses bactéries dans les cellules et la destruction totale d'une grande partie du tissu.

Le bois des bosses, aussi bien que le bois de toutes les nodosités et tumeurs chancreuses en général — y compris les bourrelets des plaies, est caractérisé par l'abondance du tissu parenchymateux, riche en contenu cellulaire. Nous nous expliquons ce fait par la rapidité relative avec laquelle ce bois s'est formé sous l'influence irritante des bactéries. La structure de ce bois facilite à son tour l'action destructive des bactéries et indique pour ainsi dire la direction dans laquelle cette action doit se développer. Il est facile de comprendre que la bactériose du bois se dirige de préférence là où elle trouve la plus grande abondance de matières nutritives et en même temps la plus faible résistance du tissu; c'est pourquoi, une fois arrivée dans l'intérieur du bois des excroissances dont elle a provoqué la formation, la bactériose s'y développe avec plus d'intensité que dans le bois normal.

Si la marche de la bactériose est plus rapide que la formation du bois nouveau, elle atteint et tue le cambium et l'écorce, ce qui met une fin au développement ultérieur de l'excroissance. Si, au contraire, la destruction du bois à l'intérieur est contrebalancée par la formation de nouvelles couches de bois jeune, l'excroissance peut atteindre des dimensions considérables.

L'observation des arbres malades du jardin, ainsi que de ceux qui avaient subi l'infection artificielle, nous a permis de nous rendre compte de la manière dont se forme une bosse chancreuse. La bactériose, qui chemine dans le bois le long de la branche, forme quelque part — sous l'influence de conditions locales inexplicables —

un embranchement vers l'extérieur. Le cambium menacé donne rapidement dans ce point des couches nouvelles de bois, grâce auquel il se sépare de la bactériose et par cela même il se forme une excroissance, se présentant comme un bouton à la surface de la branche La bactériose poussant toujours dans la même direction. la bosse augmente de plus en plus; quand la bactériose atteint enfin le centre de la bosse, elle y provoque les altérations du bois décrites précédemment. Si la bactériose arrive à détruire le cambium de la bosse, celle-ci devient une plaie chancreuse plus ou moins ouverte.

Les plaies chancreuses ordinaires. Ces plaies constituent la forme du chancre la plus connue et la plus souvent décrite. Le chancre se présente ici sous l'aspect de plaies plus ou moins grandes, dont le caractère distinctif est la formation d'un épais bourrelet de cicatrice tout autour de la plaie. Ce bourrelet est lui- même, au bout d'un certain temps, corrodé par les bactéries et il meurt en agrandissant la plaie. Le cambium encore sain forme un bourrelet nouveau qui meurt à son tour, et ainsi de suite (Fig. 12). La plaie s'élargit donc jusqu'au moment, où ayant fait le tour du tronc ou de la branche, elle provoque la mort de toute la partie située au dessus d'elle. On peut trouver dans les plaies chancreuses trois, quatre, cinq ou même plus de bourrelets corrodés et desséchés, ce qui prouve que l'agrandissement de la plaie est fort lent, le même bourrelet pouvant se développer pendant quelques années consécutives. Il arrive que le chancre se développe si lentement que le bourrelet cicatrisant ne périt pas, mais grossit au contraire de plus en plus pendant un certain nombre d'années. Dans ce cas la plaie, étant petite, devient relativement profonde et à bords très élevés, ce qui constitue comme une forme de transition entre la plaie et la tumeur chancreuse.

Dans la première phase de son développement le chancre ordinaire se présente sous la forme d'un point d'une certaine dimension. où l'écorce est desséchée. Le desséchement de l'écorce est dû à ce fait que la bactériose, se développant dans le bois, a atteint ici et tué les plus jeunes couches du bois ainsi que le cambium et a attaqué les couches internes de l'écorce.

Aux bords de la petite plaie, produite de cette manière, commence à se former un bourrelet de cicatrisation; mais comme celui-ci est tué par la bactériose venant du dedans de l'arbre. il se

forme bientôt un autre bourrelet plus en dehors de la plaie, et ainsi de suite. La plaie prend donc le caractère distinctif d'un chancre. Comme la branche grossit en même temps annuellement, les bords de la plaie deviennent de plus en plus profonds et les bourrelets s'élèvent l'un au dessus de l'autre, comme les gradins d'un escalier.

En observant les coupes longitudinales des branches couvertes de plaies chancreuses, il est aisé d'apercevoir comment le bourrelet encore sain se trouve graduellement envahi par des raies et filons bruns, venant de l'intérieur du bois bactériosé de la branche (Fig. 13).

Il résulte de la nature du chancre décrit, qu'il ne peut être porté que par une branche d'un certain âge, la plaie exigeant quelque temps pour former la série des bourrelets de cicatrisation, qui lui donne son caractère distinctif.

Une plaie chancreuse, si elle n'est pas grande et si son développement est lent, peut — tant que les circonstances favorisent la végétation de l'arbre — cesser de progresser et même finir par se cicatriser. Les jardiniers ont l'habitude d'aider à la cicatrisation des plaies en les tranchant sur les bords jusqu'au vif et en les recouvrant de mastic.

Par suite du grossissement de l'arbre, la plaie cicatrisée se couvre chaque année de nouvelles couches de bois et peut même disparaître sans laisser de traces à l'extérieur. Cependant, la cicatrisation d'une plaie chancreuse n'est nullement la guérison définitive de l'arbre, car la bactériose au fond du bois y suit son cours. Vu la nature de la maladie, il n'est pas possible d'obtenir une guérison complète; ce n'est que la disparition d'une manifestation extérieure de la maladie et son retour à l'état caché — état qui peut durer aussi longtemps que l'arbre continue d'avoir des conditions favorables à sa végétation. Aussitôt ces conditions changées, les manifestations extérieures de la maladie se montreront avec une force correspondant à l'affaiblissement de l'arbre.

Les tumeurs chancreuses (chancre fermé). Les tumeurs chancreuses se trouvent principalement sur des branches assez minces, où elles sont parfois très nombreuses. Elles se distinguent facilement des bosses, car elles ne sont pas recouvertes entièrement d'écorce saine et on y trouve toujours une solution de continuité, sous la forme d'une fente profonde, atteignant le bois bactériosé et bruni

de l'intérieur de la branche (Fig. 14 et 15). Cette solution de continuité représente ici la plaie primitive, qui a été tellement enserrée par le développement considérable de ses bourrelets de cicatrisation, qu'elle a pris la forme d'une fente. La tumeur n'est donc autre chose qu'une plaie chancreuse dont les bourrelets durent très longtemps et ont pu prendre des dimensions considérables, grâce à l'action peu intense des bactéries. La tumeur est donc la forme la plus bénigne de la bactériose chancreuse et elle cause rarement à elle seule la mort d'une branche. Dans la plupart des cas, la branche couverte de tumeurs meurt de la bactériose généralisée du bois, ou bien est tuée par une nécrose qui apparaît parfois à sa surface.

On rencontre parfois des renflements de rameaux en forme de tonnelets. Ces renflements sont provoqués par le fait que la bactériose intérieure du bois commence à se développer fortement dans un point donné du rameau, en se dirigeant vers l'extérieur dans toutes les directions. Cela provoque une formation anormale des couches du bois à cette place et la branche y prend la forme mentionnée. Le renflement de la branche se complique quelquefois par la présence d'une plaie chancreuse, ou peut au contraire n'en présenter aucune. Dans ce dernier cas, il faudrait le ranger dans la catégorie des bosses chancreuses.

La nécrose chancreuse (chancre aigu). La nécrose est une forme aigue de la maladie. Elle se manifeste par le desséchement de l'écorce de l'arbre sur une certaine étendue (Fig. 16). Le bois sous l'écorce desséchée est détruit par la bactériose. Il ne se forme point ici de bourrelets cicatriciels, les progrès de la bactériose dans le bois étant si rapide que le cambium autours de la plaie est tué graduellement. La plaie ne présente pas en conséquence des bords élevés, comme dans le chancre ordinaire, mais elle reste plate.

Si on enlève autour de la plaie l'écorce encore saine, on voit que le bois y a pris une teinte brune, plus foncée tout près du bord même de la plaie, moins prononcée à mesure qu'on s'en éloigne. Bientôt l'écorce qui couvre ce bois meurt à son tour et la plaie s'agrandit de plus en plus, souvent avec une telle rapidité que la branche est contournée par la nécrose et tuée au cours même d'un été. Vu la rapidité des progrès de la maladie, tous les soins tendant à guérir la plaie restent généralement inefficaces.

Par ce fait, la nécrose bactérienne diffère sensiblement des plaies

produites par l'action du froid sur les variétés qui en souffrent, cette sorte de plaies guérissant facilement même malgré le manque de soins. Les nécroses chancreuses se formant d'ailleurs, comme nous l'avons mentionné, même après une suite d'hivers très doux, toute tentative de rapprochement entre elles et les plaies produites par le froid doit être absolument abandonnée, malgré l'opinion contraire de certains auteurs (Sorauer). Le froid n'entre ici en jeu que comme cause d'un affaiblissement de la végétation des arbres, ce qui peut les prédisposer au chancre; il n'est donc ici qu'un agent secondaire.

La nécrose chancreuse est provoquée par une forte poussée de la bactériose du bois vers un point quelconque de la surface où elle tue le cambium et attaque les couches internes de l'écorce, qui ne tarde pas à se dessécher. La bactériose se répand ici dans les couches externes du bois à la manière d'une goutte d'huile qu'on laisserait tomber sur une feuille de papier buvard. On peut remarquer que même là où la couche la plus jeune du bois est encore — en apparence du moins — intacte, les couches plus anciennes et plus profondes ont déjà subi l'atteinte des bactéries et le trahissent par la modification de leur couleur.

La nécrose apparaît parfois d'une manière très violente sur des sujets jeunes de variétés sujettes au chancre, et elle les tue en un temps très court. On n'aperçoit pas sur de tels sujets d'autres formes extérieures du chancre, comme les plaies ordinaires ou les tumeurs; celles-ci ne sauraient s'y produire, vu la progression rapide de la maladie. D'habitude, l'arbre trahit alors une infection plus ou moins généralisée, ce qu'on peut conclure du fait que la nécrose apparaît sur le tronc et sur les branches en beaucoup d'endroits à la fois. L'examen d'un tel arbre, fait au moyen de coupes de ses branches, vient prouver que le bois plus âgé y est envahi presque partout par les bactéries plus ou moins fortement.

Si le développement de la nécrose vient à se ralentir, il peut commencer à se former autour de la plaie un bourrelet de cicatrice. Ce bourrelet cependant est envahi au fur et à mesure qu'il se développe et tué avant qu'il ait pu atteindre quelque épaisseur; la plaie reste donc toujours plus ou moins plate. Ce cas sert de forme intermédiaire entre la nécrose et les plaies du chancre ordinaire.

De la bactériose généralisée des pommiers. Cette

maladie n'a pas encore été décrite jusqu'à présent. Elle échappait d'autant plus facilement à l'attention des observateurs, que l'aspect des arbres succombant à la bactériose généralisée rappelle jusqu'à un certain point celui des arbres gelés. Si même la bactériose généralisée de l'arbre se produisait après un hiver clément, on reportait son origine aux froids rigoureux d'un hiver de deux, trois ou quatre années auparavant, ce qui répondait à la théorie acceptée par les praticiens — fausse cependant, que dans certains cas l'arbre peuvait ne pas montrer de trace d'altération immédiatement après un hiver rigoureux, mais seulement dans les années suivantes.

Nous avons remarqué pour la première fois les symptômes de la bactériose générale sur un arbre artificiellement infecté (Calville blanc d'hiver), ce que nous avons déjà mentionné plus haut. En comparant ces faits avec ceux que nous avons observés sur les arbres du jardin, nous sommes arrivés à la conclusion, que la bactériose généralisée des arbres est une manifestation bien commune de la maladie du chancre. Ajoutons qu'il nous a été donné de l'observer sur des arbres absolument résistants à l'action du froid dans notre climat, comme p. ex. la variété russe „Borovinka bielaïa", connue généralement sous le nom de „Charlamowski".

L'arbre atteint de bactériose généralisée accuse un état maladif, cesse de s'accroître et se couvre de feuilles rares, pâles et de dimensions plus petites que les feuilles normales. On y voit en même temps de petits rameaux se dessécher sans cause apparente. Un arbre ou une branche, atteint de cette manière, peut encore pendant un certain temps porter des fruits, mais en petit nombre et en général de peu de valeur. Au bout d'un temps plus ou moins long, l'arbre dépérit par dessèchement, en commençant par les sommets des branches. L'arbre ou la branche malade porte au surplus souvent des tumeurs ou des plaies chancreuses, qui cependant ne sont pas de dimension à provoquer à elles seules la mort de l'arbre. La branche qui périt à la suite de la bactériose peut d'ailleurs ne présenter aucune des manifestations extérieures du chancre.

L'examen des arbres malades au moyen de coupes permet de constater une modification générale de la teinte du bois qui devient jaune canari, plus foncé ou plus clair par places. A un état très avancé de la maladie, la teinte des couches du bois qui se trouvent immédiatement au dessous de l'écorce et sont donc les plus jeunes, devient beaucoup plus foncée que celle du bois plus vieux

dans l'intérieur des branches. Ce symptôme doit être regardé comme le précurseur de la mort prochaine de l'arbre, et nous pouvons le comparer à la nécrose qui se serait généralisée, sans avoir encore provoqué le dessèchement de l'écorce.

Le bois des branches malades montre à l'examen microscopique des bactéries à profusion. Nous en avons obtenu en décembre 1902 des cultures pures du bacterium mali.

Un exemplaire d'arbre atteint de bactériose généralisée est représenté sur la Fig. 19. C'est un arbre âgé de 25 ans à peu près, appartenant à la variété „Charlamowski", qui se trouve planté dans l'établissement de la société d'Horticulture de Cracovie „Glinka". Il porte deux ramifications principales dont l'une est tout à fait bien portante, tandis que l'autre est atteinte de bactériose généralisée et semble ne pas pouvoir vivre plus d'une année ou de deux tout au plus. Cette partie de l'arbre avait été pendant longtemps à l'ombre d'un groupe tout proche de sapins et de robiniers. C'est donc probablement le manque de lumière, joint aux difficultés que trouvaient les racines à se développer de ce côté, qui a — en affaiblissant la végétation — permis à la bactériose de se généraliser dans les tissus de cette partie de l'arbre.

De la bactériose des pousses du pommier. Cette maladie est le résultat de l'infection des jeunes pousses par les bactéries, à la suite de l'envahissement de ces pousses par les pucerons (Aphis mali), cette infection étant secondée par les mauvaises conditions de la végétation des arbres, telles qu'un été trop froid et pluvieux, la mauvaise qualité du sol etc. Nous avons observé cette bactériose dans de jeunes pépinières, où elle faisait des ravages considérables dans les scions de l'année.

Les pousses de pommier dont les extrémités et les jeunes feuilles ont été envahies par les pucerons, commencent à noircir et à se dessécher. Les sommets succombent les premiers et le mal s'étend graduellement vers le bas des pousses, en occupant bientôt les parties qui n'avaient point été attaquées par les pucerons. En faisant des coupes de ces pousses, nous apercevons que c'est la moelle qui souffre le plus et c'est par elle que l'altération descend le plus bas. On peut notamment trouver, vers la base des pousses, des points où la moelle visiblement altérée est entourée de bois encore sain.

Le bois des pousses, là où il est atteint, change de couleur et

de blanc verdâtre devient plus ou moins brun. Cette modification de teinte n'apparaît pas de haut en bas uniformément, mais fait des taches irrégulières, de manière qu'on peut trouver des régions saines encore parmi des places détruites presque entièrement. Les pétioles dans les places attaquées noircissent et se dessèchent, ainsi que les limbes des feuilles. Il est à remarquer que l'altération des feuilles de la partie de la pousse qui n'avait point été envahie par les pucerons, commence par la partie du pétiole attachée au bourgeon, tandis que si c'est l'attaque des pucerons qui est la cause immédiate de la destruction des feuilles. cette destruction suit une voie inverse.

L'examen microscopique des diverses parties des pousses malades montre une grande abondance de bactéries dans les tissus. La moelle, de même que le bois et l'écorce altérés des pousses, nous ont fourni en été 1902 des cultures pures du Bacterium mali.

Certaines pousses attaquées sont détruites jusqu'à leur base et se desséchent complètement; chez d'autres, la partie inférieure reste plus ou moins saine. Les pousses qui ne sont pas détruites entièrement donnent des bourgeons anticipés. Mais comme le bois des régions d'où partent ces bourgeons est, malgré l'apparence extérieure de santé, plus ou moins altéré par la bactériose, cette partie de l'arbre futur garde dans son sein le germe de la maladie, quoique les parties altérées y soient masquées par les couches du bois jeune normal.

Les nodosités des racines. Cette maladie est fort bien connue des arboriculteurs, car elle se rencontre très fréquemment sur les arbres jeunes arrachés des pépinières. Elle n'a cependant jamais été l'objet de recherches sérieuses et on ne la trouve pas mentionnée dans les traités des maladies des plantes.

Les nodosités des racines se rencontrent principalement chez les arbres qui croissent dans les sols argileux, forts et humides, où quelquefois la moitié presque des arbres en est atteinte. On les trouve aussi chez les arbres qui vivent dans les terres de bonne composition, mais alors la proportion des arbres atteints est minime.

Sur les racines des arbres arrachés, on peut voir des excroissances de différentes grosseurs, depuis la grosseur d'une tête d'épingle jusqu'à celle d'un oeuf de poule. Ces nodosités ont l'aspect de corps irrégulièrement arrondis, à surface inégale, plissée et verru-

queuse. Elles ne se distinguent pas par leur couleur des racines qui les portent.

L'observation de nodosités des différents âges prouve qu'elles peuvent se former sur des racines fort jeunes et s'accroître à mesure du grossissement de la racine. On peut déjà voir des nodosités se formant sur des racines de l'année. A la place où il s'est formé une nodosité de grandes dimensions, la racine est visiblement affaiblie; au dessous de ce point, elle devient souvent mince et peut même périr complètement. Les vieilles nodosités pourrissent et s'effritent dans le sol.

Les racines d'un arbre sont quelquefois tellement couvertes de nodosités qu'il devient difficile de trouver une seule ramification bien portante. Indépendamment de la nature de ces nodosités, le fait seul qu'elles arrêtent la croissance des racines et gênent leurs fonctions suffit à établir leur influence fâcheuse sur la végétation ultérieure de l'arbre.

En examinant les nodosités au moyen de coupes microscopiques, nous voyons que les nodosités plus jeunes ont leur parenchyme cortical fort développé et constitué de cellules à cloisons minces; elles présentent donc sur ce point la structure ordinaire des racines. Dans la partie ligneuse, qui occupe ici une étendue relativement faible, l'élément parenchymateux est prédominant Le caractère distinctif du bois des nodosités consiste dans l'abondance du tissu jeune, à cellules non encore différenciées. On pourrait supposer que la présence des bactéries provoque la multiplication des cellules de la zone cambiale, mais en empêche et ralentit la différentiation. — La partie médullaire perenchymateuse occupe dans les nodosités une place très considérable.

Là où le cambium est irrité, le tissu se développe plus rapidement et en conséquence le cylindre central grossit irrégulièrement, ce qui est la cause des contournements et des plissements de la surface de l'excroissance et ce qui lui donne son aspect verruqueux.

Dans les nodosités plus vieilles, on peut voir des filons foncés, cheminant dans toutes les directions. Les couches du bois y sont comme tourmentées, les vaisseaux et les fibres traversant la masse parenchymateuse en tous les sens, sans aucun ordre déterminé.

On aperçoit dans les racines mêmes des filons de bois bruni qui se trouvent en relation avec les nodosités portées par ces racines (Fig. 20).

Justement intéressés par la maladie des excroissances sur les racines des arbres, nous nous sommes mis à l'examiner déjà en 1895 pour en rechercher la cause. Nous supposions au commencement que cette cause était due à l'action d'un insecte ou d'un champignon parasite quelconque. Les recherches faites dans ce sens n'amenèrent aucun résultat et furent délaissées.

Après la découverte du bacterium mali en 1899, nous commençâmes à supposer que le même parasite pourrait bien être la cause de la formation des nodosités sur les racines des arbres. Aussi, immédiatement après avoir obtenu des cultures pures de bactéries, nous les avons inoculées à des racines d'un pommier (rouge de Stettin), cultivé en caisse. La difficulté de rechercher dans la terre les racines inoculées, sans nuire à l'arbre et sans arrêter sa végétation normale, fut cause que nous en fîmes un examen général seulement le 12 décembre 1902. Les résultats de cet examen furent les suivants: Deux inoculations, faites sur une racine plus grosse et plus ancienne, au moyen d'incisions longitudinales de l'écorce et le passage par la plaie d'une aiguille contaminée, s'étaient cicatrisées sans avoir formé d'excroissances; l'observation des coupes de ces racines démontra cependant que la bactérie s'était développée dans le bois des racines de la même manière que dans le bois des branches infectées. Deux autres inoculations, pratiquées sur une autre racine d'un certain âge, ne purent être retrouvées, à cause sans doute d'une destruction accidentelle de la racine. Quatre inoculations, faites sur de jeunes racines au moyen de piqûres avec une aiguille contaminée, avaient formé des nodosités caractéristiques. Trois autres inoculations, faites au moyen de piqûres, ne purent être retrouvées.

Au mois de février 1902, nous avons examiné au microscope de jeunes nodosités des racines et toujours nous avons trouvé dans leur bois de grandes quantités de bactéries, se comportant dans les tissus d'une manière identique à celle du bacterium mali.

Les essais tentés pour obtenir des cultures pures de ces bactéries furent couronnés d'un succés complet. Les cultures pures ainsi obtenues ne montrèrent aucune différence du bacterium mali, ce qui nous permet de les regarder coumme absolument identiques.

Les inoculations des bactéries prises dans les nodosités des racines furent effectuées le 27 juin 1902 sur des branches d'un pommier. Elles démontrèrent à l'examen, fait le 12 décembre de la même année, un fort développement de la bactériose dans le bois.

Les filons de bois à teinte modifiée atteignaient déjà en plusieurs endroits une longueur de 2 ctm. à partir du point de l'inoculation.

De toutes ces recherches, nous tirons la conclusion que les nodosités sur les racines du pommier ne sont qu'une manifestation de la bactériose du bois de ces racines et répondent à ce que nous voyons comme bosses, tumeurs et plaies chancreuses sur les branches.

L'observation des arbres atteints de la maladie des nodosités des racines démontre la relation intime de ces nodosités avec la bactériose des parties aériennes de l'arbre. Ainsi notre Fig. 21 représente un pommier (Reine des reinettes), greffé depuis 3 ans, qui porte des nodosités sur ses racines et accuse une bactériose du tronc. Cette bactériose, partant d'en bas, atteint la tête même de l'arbre à la hauteur de 1 m. 80 ctm. au dessus du niveau du sol. La bactériose du tronc se trahit par un changement de couleur du bois, dont seule une couche fort mince au dessous de l'écorce a conservé une teinte normale, tandis que le reste a pris une couleur jaune foncée, passant vers le centre du tronc au brun, presque au noir. Les filons bruns, cheminant dans le fond du bois sans interruption à partir des racines, en passant par le point de soudure de la greffe, jusqu'aux parties les plus jeunes de l'arbre — nous montrent bien clairement quel est le point de départ de la maladie. D'ailleurs, la partie aérienne de l'arbre ne comptant que 3 années, il est impossible d'admettre que la bactériose ait pû commencer dans cette partie, descendre dans les racines et y provoquer la formation d'excroissances aussi volumineuses, visiblement d'ailleurs plus âgées. Il est clair que la bactériose a commencé ici dans la partie souterraine de l'arbre, plus vieille de quelques années.

Il y a cependant des cas où la bactériose suit une voie inverse, notamment quand un sauvageon bien portant a été enté par un greffon bactériosé, qui lui a communiqué la maladie. Dans de pareils cas, la bactériose, très développée au point du greffage, descend vers les racines, mais on voit alors une diminution graduelle dans l'intensité de la coloration du bois de ces racines, quoique de jeunes excroissances commencent déjà à s'y former. La manière dont s'effectue la pénétration des bactéries du sol environnant dans les tissus des jeunes racines et les conditions qui favorisent l'infection des arbres par cette voie ne sont pas encore élucidées.

Bacterium pyri (Brzez.)

Bactéries du poirier.

Le poirier est sujet à la maladie du chancre de même que le pommier, mais plus faiblement. La découverte du bactérium mali facilita donc nos recherches sur la cause du chancre des poiriers et nous permit de découvrir le microorganisme qui provoque cette maladie.

Nous avons obtenu au mois d'août 1899 les premières cultures pures des bactéries du poirier, sans plus de difficulté que celles du pommier. La bactérie du poirier, examinée au microscope, se présente comme absolument semblable au bacterium mali. Elle est en forme de bâtonnets courts, presque toujours en état de division. Sa ressemblance avec le bacterium mali est telle, que pour ne pas se répéter, nous trouvons superflu de la décrire d'une manière plus détaillée.

Les bactéries du poirier se distinguent de celles du pommier uniquement par la couleur que prennent leurs cultures. Cependant, comme ce fait est constant et se présente d'une manière frappante, nous avons trouvé nécessaire de donner à la bactérie du poirier un nom différent.

Le bacterium pyri, de même que le b. mali, se développe le mieux en culture sur de l'agar avec du moût de bière, mais il y forme des colonies de couleur jaune d'ambre, qui diffèrent nettement des cultures blanc-grisâtres des bactéries du pommier. Il prend la même teinte caractéristique dans les cultures sur de la gélatine. Cultivé dans un milieu liquide, il ne se distingue pas du bacterium mali. Il ne diffère pas aussi du bacterium mali en ce qui concerne la vitalité des cultures et leurs exigences au point de vue de la température. Enfin, il réagit de la même manière que la bactérie du pommier en présence de divers colorants.

Dans les tissus végétaux, les bactéries du poirier se comportent de même que celles du pommier. Elles détruisent le protoplasme et l'amidon des cellules attaquées et corrodent les cloisons.

Le bois du poirier envahi par les bactéries change plus ou moins fortement de couleur, en passant au jaune-canari, jaune couleur de chair, jusqu'au brun foncé. On peut aussi remarquer quelquefois que le bois du poirier, à part une modification de teinte relatiment faible, prend une consistance qui le distingue nettement

du bois sain: il devient mou et friable, se laissant facilement enlever par parcelles avec les ongles. On trouve des filons d'un bois ainsi altéré dans les branches des poiriers atteints de bactériose.

Inoculations expérimentales des bactéries du poirier et inoculations croisées. Le 26 du mois de juin 1902 nous avons inoculé un poirier en caisse (Baltet père) au moyen de piqûres faites avec une aiguille trempée dans une culture pure du bacterium pyri. Le 10 juillet 1902, nous avons pratiqué des inoculations sur un autre arbre en caisse, de la variété Délices d'Hardenpont, en procédant d'une manière déjà décrite, qui consiste à inciser longitudinalement l'écorce, à la soulever légèrement d'un côté et à passer au dessous de l'écorce ainsi soulevée l'extrémité d'une aiguille contaminée; ces incisions étaient ensuite ligaturées et couvertes de mastic.

L'examen, fait le 14 décembre, de cinq inoculations pratiquées sur l'arbre „Baltet père" montra dans toutes un développement de bactériose, déterminant une modification de la teinte du bois. Ce dernier avait pris une couleur jaune rougeâtre sur une longueur d'un centimètre à partir de la piqûre. L'examen à la même date de trois inoculations faites sur l'arbre „Délices d'Hardenpont" vint démontrer que les plaies s'étaient, il est vrai, cicatrisées, mais le tissu cicatriciel était atteint lui-même de bactériose. Dans une de ces inoculations, l'altération du tissu cicatriciel avait déjà atteint l'écorce. A part ces altérations, la bactériose se développait comme d'habitude dans le bois de la branche, dans la direction de sa longueur.

Déjà au mois d'août 1899, nous avions fait au moyen de piqûres et d'incisions des inoculations croisées des bactéries du pommier sur un poirier en caisse, appartenant à la variété Duchesse d'Angoulême. En examinant cet arbre au cours de l'automne 1899 ainsi que pendant les années 1901 et 1902, nous y avons remarqué un développement de bactériose, mais celle-ci se développait avec une lenteur extrême. Un dernier examen, fait le 14 décembre 1902, montra la formation de filons rougeâtres du bois à une distance d'un centimètre à peine du point de l'inoculation, tandis que les mêmes bactéries, inoculées à des pommiers, formaient déjà des filons d'une longueur considérable, ou avaient même déterminé la bactériose généralisée de la branche.

Des inoculations croisées furent pratiquées encore le 27 juin

1902 sur un poirier le Lectier, au moyen de piqûres avec une aiguille infectée du bacterium mali. Ces inoculations, soumises à un examen le 14 décembre de la même année, accusèrent un développement de bactéries très faible, mais qu'il était néanmoins possible de constater grâce aux sujets témoins absolument sains.

D'autres inoculations croisées furent faites en 1902 avec les bactéries du poirier, que nous introduisîmes le 14 juin au moyen de piqûres dans un pommier d'une variété indéterminée, et que nous inoculâmes le 6 juillet — au moyen d'incisions ligaturées et couvertes de mastic — à une branche d'un pommier Reinette du Canada. L'examen de ces arbres, fait le 14 décembre, démontra un développement de bactériose beaucoup plus faible que dans les pommiers inoculés avec le bacterium mali. Ce développement était cependant un peu plus fort que dans le cas des inoculations du bacterium mali sur des poiriers.

Au mois de Février 1903, nous avons tenté une contre-épreuve dans le but de trancher définitivement la question de savoir si les bactéries du pommier et du poirier forment ou non des espèces différentes. Nous avons fait une dizaine de cultures du bois des pommiers infectés précédemment avec les bactéries du poirier et autant de cultures du bois des poiriers qui avaient été inoculés avec les bactéries du pommier. Le bacterium mali, malgré un séjour prolongé dans les tissus du poirier, nous a donné dans tous les cas des cultures ayant l'aspect ordinaire des bactéries du pommier. D'autre part, les bactéries du poirier, quoique tirées du bois des pommiers, ont montré dans toutes les cultures la couleur jaunâtre caractéristique, propre au bacterium pyri. Les bactéries ne changent donc pas de nature selon l'influence du milieu où elles se développent, et la différence dans la couleur de leurs cultures peut être regardée comme un caractère tout à fait stable.

La contre-épreuve a donc réussi parfaitement et nous a convaincus définitivement que le bacterium mali et le bacterium pyri sont deux espèces différentes qui, placées dans un milieu qui ne leur est pas absolument propre, peuvent néanmoins s'y développer, mais ne le font alors que très faiblement.

Les manifestations extérieures de la bactériose du poirier.

Le bacterium pyri provoque dans les arbres les mêmes manifestations morbides que le bacterium mali; la bactériose du bois

détermine ici de même des plaies chancreuses, des tumeurs et des nécroses sur les parties aériennes de l'arbre, ainsi que des nodosités sur les racines et enfin la bactériose généralisée de l'arbre.

Les plaies chancreuses et tumeurs des branches du poirier se rencontrent plus rarement que celles du pommier. Surtout le chancre caractéristique, à bourrelets se formant et périssant tour à tour, est assez rare chez le poirier. Les plaies du poirier présentent d'habitude un aspect intermédiaire entre la plaie chancreuse et la tumeur. Elles déterminent souvent un grossissement en forme d'anneau tout autour de la branche, à la place où une plaie s'était formée.

La nécrose chancreuse apparaît sur le poirier sous la forme, d'un dessèchement de l'écorce par taches irrégulières; le bois y est toujours corrodé et bruni.

Sur des arbres jeunes, à écorce lisse, on peut souvent prédire la formation d'une nécrose longtemps avant son apparition définitive et cela grâce à l'aspect de l'écorce, qui devient ici fortement rugueuse.

Le caractère distinctif de la nécrose du poirier se trouve dans ce fait que de nombreuses raies et filons bruns de longueur considérable cheminent dans l'écorce encore saine, près de la place nécrosée — fait que nous n'observons point dans la nécrose du pommier. Nous expliquons cela de cette manière, que le progrès de la bactériose dans le bois et le cambium du poirier est plus lent que dans celui du pommier; les bactéries donc, qui pénètrent dans l'écorce environnante la plaie, ont suffisament de temps pour s'y développer et former des filons bruns, indépendamment de la bactériose du bois. Dans les pommiers au contraire, le développement de la bactériose dans le bois s'effectue si énergiquement et l'écorce qui recouvre le bois corrodé est tuée avec une telle rapidité tout autour de la plaie primitive, que la bactériose n'a point le temps de déterminer dans l'écorce des altérations partielles visibles à une certaine distance de la plaie.

L'écorce crevassée — à la place où apparaît la nécrose chez le poirier — est plus épaisse que l'écorce normale; elle est spongieuse et prend en outre une teinte brune, visible dans des coupes transversales.

Les nodosités des racines se rencontrent chez les poiriers de même que chez les pommiers et y sont presque aussi fréquen-

tes, surtout lorsque les arbres sont plantés dans un sol argileux et froid.

La bactériose généralisée a plus fréquemment lieu chez le poirier que les autres formes de bactériose et prend un caractère distinctif de celle du pommier. Elle se manifeste principalement comme la maladie bien connue sous le nom de chlorose.

Les caractères de la chlorose étaient connus et décrits depuis longtemps. On comptait la chlorose parmi les maladies dites physiologiques, c'est à dire dues aux troubles dans les fonctions physiologiques de la plante, la cause primitive de ces troubles demeurait cependant inconnue. La chlorose des poiriers, à l'égal du chancre des pommiers, a été toujours regardée par les arboriculteurs comme la maladie la plus dangereuse des arbres, celle qui amène à sa suite les plus grandes pertes. Cela fait qu'on trouve des descriptions plus ou moins justes des symptômes du mal dans tous les auteurs s'occupant spécialement des maladies des plantes. On décrit aussi d'habitude comme une maladie à part le dessèchement des sommets des pousses, dû à la chlorose, sous le nom de brûlure [1]).

Il est de toute notoriété que les poiriers plantés dans un sol ne leur convenant pas, p. ex. dans un terrain calcaire, succombent facilement à la chlorose. De même les arbres plantés dans un sol argileux, imperméable, trop humide et froid, sont plus disposés à contracter la chlorose que ceux placés dans un sol qui leur convient. Cela suffisait pour qu'on affirmât que la mauvaise nutrition des arbres peut elle-même provoquer la chlorose.

Il demeurait cependant absolument inexplicable comment, parmi des poiriers croissant dans un sol tout à fait favorable à leur végétation, on trouva çà et là des sujets plus ou moins fortement atteints de chlorose, et cela dans le proche voisinage d'autres poiriers parfaitement sains.

La chlorose se manifeste par une modification dans la couleur des feuilles, qui deviennent vert clair ou jaunâtres. Cette modification peut aller si loin, que les feuilles se font presque blanches, et en même temps celles qui sont le plus fortement atteintes se dessèchent, soit entièrement, soit en partie. La maladie apparaît généralement dans toute sa force vers le milieu de l'été ou plus tard.

[1]) Pierre Passy. Les maladies du poirier et du pommier. Alençon 1899. p. 102 et 111.

Au printemps, les feuilles des arbres malades sont de couleur presque normale. On peut voir souvent en été que les feuilles d'une pousse malade ne sont pas toutes atteintes de chlorose au même degré: tandis que les feuilles du bas de la pousse, formées au printemps, restent vertes, celles placées plus haut et qui ont été formées pendant l'été sont plus ou moins jaunes; celles enfin du sommet sont déjà presque blanches, mal développées et se dessèchent peu à peu. Quand la chlorose se déclare d'une façon violente, les sommets des pousses aussi sont desséchés sur une longueur plus ou moins grande, ce qui a lieu d'habitude assez tard en automne. Cette destruction rappelle la manière dont succombent les pousses des pommiers atteints de bactériose, et cela par le fait, qu'à part le sommet qui brunit et se dessèche entièrement, on trouve plus bas sur les pousses des régions malades parmi des places saines. Les points où se trouvent les boutons semblent être altérées les premiers.

La chlorose attaque soit un arbre tout entier, soit quelques unes de ses branches. La situation des branches sur l'arbre n'a ici aucune influence; quelquefois c'est le sommet de l'arbre qui est atteint, d'autres fois c'est une ou plusieurs branches inférieures qui succombent à la maladie.

La saison, où la vraie chlorose se présente dans toute sa force, distingue absolument cette maladie d'une espèce de chlorose provoquée quelquefois chez les arbres peu résistants par les froids rigoureux d'un hiver. Dans ce dernier cas, l'arbre endommagé gravement dans ses tissus forme au printemps des pousses plus faibles qu'à l'ordinaire et se couvre de feuilles vert clair. Cependant, à mesure que l'arbre se rétablit pendant l'été, ses feuilles prennent une teinte plus foncée et sa végétation devient plus ou moins normale. Au moment donc où la fausse chlorose disparaît ou s'atténue, c'est à dire vers la moitié de l'été, la chlorose bactérienne arrive justement au plein de son développement.

La chlorose, qui apparaît chez diverses plantes comme une anomalie innée, ne doit pas non plus être confondue avec la chlorose bactérienne. Elle est accidentelle, se montre indépendamment de l'époque plus ou moins avancée de l'été et ne semble pas être à proprement parler une maladie. Les parties des plantes qui présentent cette anomalie ont généralement une végétation faible, mais ne périssent point et peuvent même, étant reproduites par la greffe, donner naissance aux variétés à feuilles argentées.

L'âge des arbres ne semble avoir aucune influence sur l'apparition de la chlorose bactérienne. Nous la voyons attaquer aussi bien les arbres vieux que les sujets tout jeunes, cultivés dans les pépinières. En revanche, la température de l'été joue ici un rôle prépondérant. Dans les années chaudes et ensoleillées, la chlorose ne se montre pas ou apparaît faiblement; dans les années humides au contraire, elle fait de grands ravages. Un exemple excellent de cette relation de la maladie avec la température de l'été nous a été fourni par un poirier du jardin de M. le Prof. de Janczewski à Cracovie. Ce poirier, appartenant à la variété Doyenné blanc, taillé en pyramide, était atteint depuis un certain temps d'une chlorose générale peu prononcée. Au cours de l'été pluvieux et assez froid de l'an 1899, la chlorose s'était manifestée avec une grande force. Durant l'été chaud de 1900 l'arbre s'était rétabli et pendant l'été favorable de 1901 il semblait être tout à fait normal. En revanche, au cours de l'été exceptionnellement froid de 1902, la chlorose apparut avec une force redoublée, de sorte que les feuilles pâlirent presque totalement et beaucoup de pousses de l'année eurent leur sommet desséché.

Tout ce qui diminue en général la quantité de chaleur et de lumière reçue par les arbres, comme p. ex. l'ombre projetée par d'autres arbres ou par des bâtiments, une plantation trop serrée etc., prédispose visiblement les arbres à la chlorose.

La chlorose qui se manifeste à un fort degré et qui se répète chaque année, affaiblit au plus haut point les arbres attaqués, empêche leur végétation et les tue peu à peu, par le dessèchement graduel des branches.

La chlorose se complique d'habitude par l'apparition sur les branches chlorotiques des nécroses chancreuses qui hâtent la mort de ces branches. On peut voir aussi bien souvent de fortes nécroses se formant sur le tronc, à la place d'où partent les branches chlorotiques, après quelque temps de durée de la maladie.

La chlorose du poirier a été l'objet de nos recherches depuis longtemps; nous n'arrivions cependant point à nous rendre compte de la cause de cette maladie énigmatique. Les explications adoptées jusqu'ici ne nous semblaient ni suffisantes, ni bien établies. Ainsi, si nous acceptions que la mauvaise qualité du sol est la seule cause immédiate de la maladie, il serait impossible d'expliquer, comment il se fait que la chlorose peut attaquer aussi des arbres dans les

terres les plus convenables à la culture du poirier et qu'elle y envahit un arbre ça et là, tandis que les arbres voisins restent absolument bien portants. Il est impossible d'admettre que les conditions du sol, dont le caractère peut être absolument uniforme sur une étendue fort considérable, puissent changer aussi remarquablement d'un arbre à l'autre. Il serait certes bien difficile d'expliquer, comment des arbres plantés très près l'un de l'autre, p. ex. à 1 m. ou même 30 ctm. d'intervalle, trouveraient pour leurs racines des conditions de sol tellement différentes, que les uns succombent à la chlorose, tandis que les autres restent tout à fait sains. Il est également significatif qu'une ou plusieurs branches d'un arbre peuvent être atteintes fortement et pendant longtemps de chlorose, tandis que les autres sont complètement normales.

L'observation des formes différentes que présente la bactériose des pommiers vint éveiller notre attention et nous amena à rechercher si la chlorose des poiriers n'est pas simplement une manifestation de la bactériose de l'arbre, comparable à la bactériose généralisée du pommier.

Les recherches dans cette voie, effectuées pendant l'hiver de 1902/1903, quoique bornées aux parties ligneuses seulement de l'arbre malade et non complétées par l'étude des feuilles, nous ont montré cependant que nos soupçons étaient justifiés et qu'il existe une relation intime entre la chlorose des feuilles et la bactériose généralisée du bois.

En soumettant à l'examen de nombreuses branches des arbres qui avaient souffert pendant l'été de la chlorose, nous avons trouvé toujours une bactériose prononcée du bois, s'accusant par les modifications caractéristiques. Les recherches microscopiques décelèrent la présence de bactéries aussi bien dans le vieux bois des branches atteintes de chlorose, que dans celui des pousses de l'année. En examinant au microscope une pousse de l'année à divers points de sa hauteur, nous avons partout trouvé dans son tissu des quantités considérables de bactéries, et cela aussi bien dans le sommet desséché que dans les parties inférieures de la pousse, apparemment saines.

Les cultures, faites en décembre 1902 du bois des branches âgées de quelques années et atteintes de chlorose, ainsi que du bois des jeunes pousses partant de ces branches, confirmèrent entièrement

les résultats des observations microscopiques. Nous avons obtenu des cultures caractéristiques du bacterium pyri.

Les résultats obtenus jusqu'à présent nous permettent de croire que c'est la bactériose généralisée du poirier qui est la cause immédiate de la chlorose. La bactériose, partant du bois des branches, atteint en été les jeunes pousses et provoque les manifestations connues de la maladie.

Le développement vigoureux des arbres au printemps devance la marche ascendante de la bactériose, et c'est pourquoi la chlorose ne se montre pas en cette saison ou se manifeste très faiblement. Mais aussitôt que la végétation de l'arbre se ralentit normalement et, à plus forte raison, quand la végétation est contrariée par un temps froid et pluvieux à l'excès, les parties les plus jeunes des pousses sont bientôt atteintes par la bactériose et leurs tissus peu résistants sont corrodés au point de provoquer le dessèchement des sommets des pousses. C'est pourquoi la maladie gagne de plus en plus en force, à mesure que commencent les froids de l'automne. Il convient aussi de rappeler ici qu'une température relativement basse de l'été, visiblement nuisible à la croissance des arbres, ne nuit point au développement des bactéries.

N'ayant eu jusqu'à présent, comme objet de recherches, que des poiriers croissant dans un sol qui leur convient parfaitement, nous ne pouvons affirmer aujourd'hui avec une sûreté absolue, que la cause immédiate de la maladie est la même partout et toujours, p. ex. dans les sols humides et froids ou calcaires à l'excès. Cependant, tout fait supposer que cette cause est toujours la même et que les mauvaises qualités du sol ne sont ici qu'un agent secondaire, prédisposant les arbres à la maladie par l'affaiblissement de leur végétation, c'est à dire agissant de la même manière que le manque de lumière ou des froids excessifs en été.

La Bactériose se manifestant par le crevassement de l'écorce. Il nous reste encore à mentionner que sur des jeunes poiriers la bactériose du bois peut se manifester à l'extérieur de l'arbre principalement sous la forme de crevassement de l'écorce, tandis que les autres manifestations habituelles de la bactériose connues, comme p. ex. la chlorose ou les nécroses, sont peu prononcées ou n'arrivent que fort tard.

Nous avons eu l'occasion d'observer et d'examiner après l'arrachement un poirier de 10 ans (var. de Curé), taillé en pyramide,

dont la partie supérieure, c'est à dire la plus jeune était couverte d'écorce rugueuse et profondement crevassée. La flèche de l'arbre ne donnait depuis quelques années que des pousses chlorotiques dont les sommets se desséchaient, mais les branches latérales, même supérieures, ne montraient rien d'anormal dans leur végétation, excepté le crevassement mentionné de l'écorce. Les parties inférieures de l'arbre, c'est à dire les plus anciennes, avaient une écorce encore lisse.

L'examen de cet arbre au moyen de coupes montra que le crevassement de l'écorce était le résultat de l'envahissement de l'écorce par la bactériose venant de l'intérieur du bois; la bactériose, ayant atteint l'écorce, s'y présente sous forme de raies longitudinales. Dans le point où le filon linéaire de la bactériose arrive à la surface du bois, l'écorce meurt et il se forme par conséquence une crevasse (Fig. 22 et 23). La crevasse augmente avec le temps en profondeur, car le bois sur ses bords s'accroit d'une manière plus ou moins normale et l'écorce qui recouvre ces bords devient même plus épaisse que partout ailleurs.

Les recherches microscopiques décèlent dans les couches profondes de cette écorce épaissie une quantité considérable de bactéries du poirier.

Bacterium corylli (Brzez.).

Bactéries du noisetier.

Sur de vieux arbrisseaux de noisetiers, on constate quelquefois l'apparition du chancre sous forme de plaies et de tumeurs, atteignant de grandes dimensions. Cette maladie se rencontre d'ailleurs rarement sur les noisetiers. Sur de jeunes sujets, nous n'en avons jamais trouvé la moindre trace.

Au jardin botanique de Cracovie, deux vieux arbrisseaux: Coryllus avellana et Coryllus colurna, qui croissent dans le voisinage l'un de l'autre, sont couverts de plaies chancreuses et de tumeurs. Ils nous ont servi à obtenir au mois d'avril 1902 des cultures pures des bactéries, dont la présence est la cause de leur maladie.

Les recherches faites au laboratoire ne permettent d'établir aucune différence entre le bacterium mali et le bacterium corylli; ils présentent le même aspect aussi bien dans les préparations microscopiques que dans le cultures artificielles.

Les inoculations croisées, faites dans l'été de 1902, n'ont pas encore donné de résultats permettant de conclure si la bactérie du chancre des noisetiers est identique ou non au Bacterium mali. Nous sommes enclins cependant à supposer que, malgré leur identité apparente, ces bactéries diffèrent en réalité. Il serait difficile d'admettre que la même bactérie puisse provoquer la maladie d'arbres aussi éloignés dans l'ordre de la nature que le pommier et le noisetier quand, d'autre part, le pommier et le poirier — étant si proches — sont attaqués par des bactéries différentes.

Conclusion.

D'après l'opinion généralement adoptée, les bactéries ne provoquent que rarement et exceptionellement les maladies des végétaux; aussi a-t-on tendance à rechercher dans ces cas la cause du mal dans l'action des champignons parasites. On voit cependant, ainsi que nous venons de le décrire, que la bactériose des arbres est leur maladie principale et la plus dangereuse, qui, dans certaines conditions, amène aussi facilement la mort de l'organisme végétal que la tuberculose p. ex. celle de l'organisme animal. Nous voyons aussi que l'organisme de l'arbre, quoique moins disposé à la généralisation des maladies que l'organisme animal, peut cependant être envahi entièrement par la bactériose, se manifestant à l'extérieur par des symptômes en apparence indépendants les uns des autres, comme p. ex. les nodosités des racines et la chlorose des feuilles. De même que cela a lieu dans l'envahissement d'un organisme animal par les bactéries — la résistance innée de l'organisme, sa force et les conditions favorables de sa vie préservent l'arbre de la maladie ou au moins en diminuent les effets, tandis qu'au contraire la faiblesse de l'arbre, due à sa nature ou aux conditions extérieures, accélère le développement de la bactériose et amène la mort de l'organisme.

Il convient d'ajouter que la bactérie du chancre n'est pas la seule qui ait été observée dans les arbres fruitiers mentionnés dans cet ouvrage. En Amérique (Illinois), les poiriers et pommiers, ainsi que les pruniers, pêchers et peupliers sont attaqués par le Micrococcus amylovorus (Burill), qui y détermine les manifestations d'une maladie inconnue en Europe, notamment la destruction de l'écorce, amenant la mort de l'arbre entier. D'autre part, en dehors des arbres cités dans cette étude (poirier, pommier, noisetier), d'autres

arbres et arbrisseaux sont aptes à être attaqués par les bactéries, comme cela a été prouvé par Prillieux et Delacroix pour la vigne [1]), par Prillieux pour l'olivier [2]) et par Vuillemin pour le Pin d'Alep [3]). Il est facile de prévoir que des recherches ultérieures amèneront la découverte de nouvelles bactéries pathogènes des végétaux, appartenant soit au même type que les bactéries du chancre, soit à des types différents.

Nous pouvons ajouter que la maladie de la gomme des arbres fruitiers à noyaux, tels que le pêcher, le cerisier etc., est également, d'après le résultat de nos recherches, d'origine bactérienne. Les bactéries de la gomme, observées au microscope, ressemblent à ce point aux bactéries du chancre qu'il est imposible de les en distinguer [4]). Elles diffèrent cependant d'une manière distincte des bactéries du chancre par le fait qu'elles produisent dans les tissus des arbres attaqués une gomme, dont l'écoulement caractérise la maladie; la même gomme est produite par ces bactéries, quand elles sont cultivées artificiellement dans des milieux nutritifs appropriés. Comme les bactéries du chancre ne forment jamais de gomme, ni à l'état naturel, ni cultivées artificiellement, nous avons donc ici, comprenant les bactéries du chancre et celles de la gomme, une série nouvelle de bactéries végétales pathogènes, appartenant au même type quant à leur forme et dimensions, mais pouvant être aisément divisées en deux groupes: celles qui produisent la gomme et celles qui n'en produisent pas.

Explication des figures.

Fig. 1. Bacterium mali cultivé sur de l'agar-agar.

Fig. 2. Bacterium mali. Colonies formées sur la gélatine.

Fig. 3. Bacterium mali. Coupe du bourrelet cicatriciel d'un chancre.

[1]) Prillieux et Delacroix. La gommose bacillaire des Vignes. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, juin 1894.

[2]) Prillieux. Les tumeurs à Bacilles de l'Olivier, comparées à celles du Pin d'Alep. Comptes rendus de l'Acad. des Sc. CVIII, p. 249 et Ann. de l'Inst. Nat. agronomique, t. XI, 1890.

[3]) Vuillemin. Sur une bactériocécidie du Pin d'Alep. Comptes rendus de l'Acad. des Sc. CVII p. 874. Sur la relation des Bacilles du Pin d'Alep avec les tissus vivants, ibid., p. 1184.

[4]) P. J. Brzeziński. Etiologie du chancre et de la gomme des arbres fruitiers. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1902.

Fig. 4. Diverses phases de la destruction des grains d'amidon dans les cellules du parenchyme ligneux. Coupe des tissus d'une bosse chancreuse.

Fig. 5. Une cellule du parenchyme médullaire où les grains d'amidon se sont fondus en partie en une masse informe, tandis que les autres gardent encore leur forme intacte. Coupe d'une branche de pommier âgée de deux ans, atteinte de bactériose généralisée.

Fig. 6. Les bactéries corrodant les cloisons du parenchyme ligneux. Les bactéries adhérent aux parois frangées de la cellule et sont visibles au fond des trous faits dans ces parois. Coupe d'une tumeur chancreuse d'une branche de pommier.

Fig. 7. Destruction par les actéries des cloisons cellulaires du parenchyme ligneux. Coupe du bois bactériosé d'une plaie chancreuse sur un rameau de pommier âgé de trois ans. 1, 1 débris du contenu cellulaire; 2, 2 brunissure des cloisons cellulaires.

Fig. 8. Destruction du parenchyme ligneux et des vaisseaux. Coupe transversale du bois d'une plaie chancreuse sur un rameau de pommier âgé de trois ans. a — tissu ligneux et vaisseaux fortement détériorés; b, b — parenchyme des rayons médullaires à cloisons non encore altérées. Le contenu des cellules du parenchyme des rayons médullaires n'a pas été marqué sur le dessin.

Fig. 9. Bacterium mali dans le protoplasme des cellules du parenchyme médullaire d'une jeune pousse de pommier, 15 jours après l'infection artificielle.

Fig. 10. Une branche de pommier âgée de 4 ans, inoculée avec le Bacterium mali au mois d'août 1899. En bas — le point de l'inoculation par piqûre. Le développement de la bactériose est marqué le long de la branche par le filon à couleur foncée partant du point de l'inoculation. La branche a été coupée le 12 décembre 1902.

Fig. 11. Coupe transversale d'une bosse chancreuse détachée du tronc d'un pommier. On y voit l'excroissance de la bactériose, qui a été la cause de la formation de la bosse.

Fig. 12 Une plaie chancreuse sur le rameau d'un pommier.

Fig. 13. Coupe longitudinale du rameau portant la plaie chancreuse représentée sur la Fig. 12. 1, 1 — bactériose du bois qui a provoqué l'apparition de la plaie; 2, 2, 2 — bourrelets cicatriciels, placés un au dessus de l'autre et corrodés graduellement.

Fig. 14. Tumeur chancreuse sur le rameau d'un pommier.

Fig. 15. Coupe longitudinale du rameau (représenté sur la Fig. 14), passant par la tumeur. La plaie primitive se présente comme une fente entre les bourrelets cicatriciels très développés et qui forment le corps même de la tumeur.

Fig. 16. Nécrose sur un rameau de pommier.

Fig. 17. Coupe longitudinale du rameau nécrosé présenté sur la Fig. 16. Les filons bruns montrent la direction de la bactériose dans le bois.

Fig. 18. Nécrose occupant le tronc et la base des rameaux d'un pommier. Dans les places où l'écorce et les couches extérieures du bois ont été enlevées, on voit que le bois, sous l'écorce encore saine, est déjà complètement bactériosé.

Fig. 19. Un pommier dont la partie droite est atteinte de bactériose généralisée.

Fig. 20. Coupe transversale d'une racine de pommier, faite tout près d'une nodosité chancreuse portée par cette racine.

Fig. 21. Nodosités chancreuses sur les racines d'un pommier de trois ans. La partie souterraine est âgée de cinq ans. a, a — bactériose des racines, pénétrant dans le tronc de l'arbre.

Fig. 22. Envahissement de l'écorce du poirier par la bactériose venant de l'intérieur de bois sous forme de raies longitudinales, provoquant la formation des crevasses de l'écorce.

Fig. 23. Coupe longitudinale, montrant la direction de la bactériose dans le bois recouvert de l'écorce crevassée.

---

12. M. MARIE SMOLUCHOWSKI. **O zjawiskach aerodynamicznych i towarzyszących im objawach cieplnych.** *(Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent).* Mémoire présenté par M. Lad. Natanson m. t.

I. Équations fondamentales de l'Aérodynamique.

§ 1. L'Aérodynamique est restée très en arrière de l'Hydrodynamique qui, depuis les recherches fondamentales de Stokes, de Helmholtz et de Kelvin, a fait des progrès énormes, grâce surtout à l'intérêt qu'elle a éveillé chez les savants anglais (Lord Rayleigh, MM. Lamb, Love, Hicks, Reynolds, Thomson etc.). En dehors de l'Acoustique, il n'y a que fort peu de cas particuliers (transpiration par des tubes Poiseuille, effusion par une ouverture dans une lame mince, disques oscillants de Maxwell et Meyer, résistance des corps projetés etc.) qui aient été traités avec quelque approximation, très vague quelquefois; mais pas une loi générale, pas une solution précise n'a été trouvée jusqu'à présent.

Les problèmes les plus importants sont à peine abordés, surtout en ce qui concerne les applications à l'aérostatique et à la météorogie lesquelles par conséquent sont plongées dans un état d'empirisme chaotique.

C'est qu'on ne peut pas, en général, comme dans les calculs de l'Hydrodynamique, regarder les gaz comme incompressibles et surtout que la compressibilité, déterminée par la loi de Boyle-Charles, dépend d'une nouvelle variable, de la température, dont les variations jouent un rôle aussi considérable que les différences de pression. Par conséquent il faut ajouter, aux équations ordinaires

de l'Hydrodynamique, une équation déduite de la Thermodynamique. La complication du problème consiste en ce qu'il est impossible, en général, de séparer ce côté thermique de la recherche du côté mécanique.

Dans les travaux antérieurs, on admettait un état isothermique ou un état adiabatique du gaz sans justifier ces hypothèses d'une manière suffisante ou bien on se contentait de supposer que la réalité est comprise entre ces limites, souvent très éloignées[1]). Ce n'est qu'en 1894 qu'a été précisée la loi thermique sur laquelle ces considérations doivent être basées, et qui, par conséquent, devrait aussi servir de fondement à l'exposé systématique de l'Aérodynamique. Elle a été déduite[2]) en même temps par Kirchhoff et, sous une forme plus générale, par M. Lad. Natanson à l'aide de considérations cinématiques ainsi que par M. C. Neumann à l'aide de la Thermodynamique. Comme cette loi n'a pas été jusqu'aujourd'hui appliquée à ces questions[3]), nous nous proposons, dans ce travail, de présenter un essai dans cette direction.

§ 2. Adoptons le procédé de Stokes[4]) qui consiste à déduire les équations de la viscosité sans hypothèse moléculaire, en supposant seulement que les forces du frottement intérieur soient proportionnelles à la vitesse des déformations élémentaires. Pour être exact, il faut y ajouter une correction si la température du gaz n'est pas partout la même, puisque le coefficient de viscosité en dépend. En effet, on ne saurait négliger cette circonstance s'il s'agit, par exemple, des mouvements de l'océan atmosphérique dans les régions supérieures duquel règne sans doute une température extrêmement basse[5]).

Dans ce cas, la substitution des équations bien connues

$$(1) \qquad p_{xx} = p + \frac{2\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc.}$$

[1]) Nous trouvons la théorie isothermique de l'effusion par une petite ouverture dans les ouvrages de Duhamel, Mousson, Wüllner, Lang, la théorie adiabatique [d'après St. Venant et Wantzel] chez: Zeuner, Wilde, Lamb; toutes les deux chez Winkelmann, Chwolson etc.

[2]) Voir Natanson, Bulletin Intern. de l'Acad. de Cracovie 1902, p. 144.

[3]) Nous en avons donné une application dans notre étude „Sur l'atmosphère de la terre et des planètes", voir Physik. Zeitschr. 2, p. 307 (1901).

[4]) D'après Lamb, Hydrodynamics p. 509.

[5]) Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc." loc. cit.

dans

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \varrho X - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \tag{2}$$

donnerait

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \tag{3}$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial x}\left[\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right] + \frac{\partial \mu}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial \mu}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right] \text{ etc.}$$

Mais dans les applications ordinaires, les différences de température n'étant pas grandes, on peut négliger les termes de la seconde ligne, et c'est ce que nous ferons en général.

Dans ces équations, p représente la moyenne arithmétique des trois tensions perpendiculaires:

$$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \tag{4}$$

Il n'en résulte pas que p soit identique à la pression qui figure dans l'expression de la loi de Boyle-Charles, ce qui est néanmoins une hypothèse bien probable, admise par presque tous les auteurs récents [1]). La même supposition peut être énoncée sous une autre forme: si nous avions considéré la loi Boyle-Charles au lieu de l'équation (4) comme définition de p, nous serions parvenus à l'équation

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + \nu \frac{\partial \operatorname{div}}{\partial x}$$

$\left[\text{où le symbole div est une abréviation pour } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]$ et nous devrions formuler l'hypothèse de Stokes de la manière suivante: le coefficient de viscosité ν pour les changements de volume est le tiers du coefficient μ pour les changements de forme. C'est ce que nous admettrons, eu égard à la théorie cinétique qui, d'après Maxwell [2]), fournit le même résultat [3]); mais nous insistons sur l'impor-

[1]) Voir Natanson: Bulletin de l'Acad. d. Sc. de Cracovie 1901, p. 95.

[2]) Scientific Papers II. p. 69 (1890).

[3]) Voir à ce sujet Natanson, Bulletin Internat. de l'Académie de Cracovie, Année 1901, pp. 108—110.

tance d'une vérification expérimentale de cette relation et nous ne croyons pas avec M. Meyer[1]) que ce soit une question indifférente, parce que la viscosité de volume se superpose à la pression et n'en peut pas être distinguée. On verra plus loin des exemples qui démontrent la fausseté de cette opinion (§ 24, § 25); on y pourrait encore ajouter l'extinction des ondes sonores par suite de la viscosité à laquelle la „viscosité de volume" contribue aussi.

§ 3. La méthode la plus simple pour déduire l'équation thermique fondamentale consiste dans l'application du principe de la conservation de l'énergie à un élément de masse $dm = \varrho\, dx\, dy\, dz$, se déplaçant dans le gaz. La variation de l'énergie totale, comprenant les énergies calorifique, cinétique et potentielle (par rapport aux forces extérieures), sera égale au travail effectué par les tensions agissant sur sa surface, augmenté de la quantité de chaleur transmise en vertu de la conductibilité calorifique. Cette relation est exprimée par l'équation:

$$(6)\qquad \frac{D}{Dt}\left[\frac{c_v}{A}\,\theta + \tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + U\right] dm = \left[\frac{\partial}{\partial x}(up_{xx}+vp_{xy}+wp_{xz}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(up_{xy}+vp_{yy}+wp_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z}(up_{xz}+vp_{yz}+wp_{zz}) + \varkappa\,\Delta^2\theta\right] dx\, dy\, dz$$

qui par le développement des opérations différentielles et par l'introduction des valeurs (1) et des équations de mouvement se transforme en:

$$(7)\qquad \frac{c_v}{A}\,\varrho\,\frac{D\theta}{Dt} + p\,\mathrm{div} = \Phi + \varkappa\,\Delta^2\theta$$

où Φ représente la quantité de chaleur dégagée grâce au frottement intérieur (par seconde et cm³) ce qu'on appelle, d'après Lord Rayleigh, fonction dissipative:

$$(8)\qquad \Phi = -\tfrac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}^2 + \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

[1]) Gastheorie p. 114; Crelle Journal 75 p. 337, (1873). M. Meyer trouve $\nu = 2\mu$ en s'appuyant sur les principes de la théorie cinétique des gaz (d'après Maxwell-Clausius), mais ce résultat est erroné. Voir Boltzmann, Gastheorie I p. 93 (1895).

La déduction peut être rendue plus rigoureuse, en appliquant le théorème en question à une quantité finie de gaz, en transformant l'intégrale de surface en intégrale triple et en la spécialisant pour une quantité élémentaire [1]).

§ 4. Il faut remarquer cependant que cette équation ne sera pas rigoureusement exacte, pas plus que les équations (3), puisqu'on ne peut pas supposer que le frottement intérieur et la conductibilité de la chaleur soient des phénomènes tout-à-fait indépendants. On pourrait même douter qu'il y ait en général des phénomènes quelconques, simultanés et coexistants, qui soient rigoureusement indépendants l'un de l'autre. Dans notre cas, M. Natanson [2]) a démontré, en effet, que la théorie moléculaire cinématique fournit, pour les phénomènes de conductibilité dans un gaz, des expressions différentes suivant que ce gaz est en repos ou en mouvement; mais en général, la différence sera très petite et il sera difficile d'en démontrer l'existence par la voie expérimentale. Nous nous bornerons donc au degré d'exactitude auquel permet d'atteindre l'hypothèse de „l'indépendance" ou de la „superposition" des phénomènes de viscosité et de conductibilité. De même, nous omettrons la considération des écarts de la loi de Boyle-Charles, en supposant l'exactitude de la formule

$$\frac{p}{\varrho} = R\,\theta. \tag{9}$$

§ 5. En somme, les équations fondamentales de l'Aérodynamique seront, outre la formule citée (9), les suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \operatorname{div}}{\partial x} + \mu\,\Delta^2 u \\
\varrho\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \operatorname{div}}{\partial y} + \mu\,\Delta^2 v \\
\varrho\frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \operatorname{div}}{\partial z} + \mu\,\Delta^2 w
\end{aligned}\right| \tag{10}$$

l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

[1]) Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc.", loc. cit.

[2]) Bulletin Internat. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie 1902, p. 137.

et l'équation thermique (7) qui peut être écrite, en considérant la relation

$$\frac{c}{A} = \frac{R}{k-1}$$

ainsi que (9) et (10), sous la forme suivante:

$$(12) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} + kp\,\mathrm{div} = (k-1)\,[\Phi + \varkappa\Delta^2\theta]$$

où Φ désigne l'expression (8).

On remarque que cette équation jointe à (11) donne la formule ordinaire de la détente adiabatique:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^k$$

dans le cas où les termes du second membre sont négligeables en comparaison de ceux du premier. Ceux-ci, en effet, représentent la réaction thermique de la compression ou de la dilatation adiabatique.

Pour définir des problèmes spéciaux, il faut préciser les conditions pour u, v, w, p, θ à la surface et, pour un système variable avec le temps, l'état primitif. Dans la plupart des applications, le gaz est contenu dans des parois solides et dont la température est approximativement constante [1]; u, v, w doivent être supposés nuls sur ces parois conformément aux expériences qui ont démontré l'adhésion complète des couches superficielles. Dans le cas d'un mouvement stationnaire, l'équation (11) donne: div $= 0$ pour ces surfaces, d'où résulte, la direction normale étant prise pour axe des Z et la vitesse normale étant désignée par v_n:

$$\frac{\partial v_n}{\partial z} = 0;$$

c'est-à-dire que la direction des lignes de flux dans les couches superficielles est parallèle à la surface. En désignant la vitesse dans cette direction par V, on trouve que l'équation (12) se réduit à la surface à

$$(13) \qquad \Phi = \mu\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = -\varkappa\Delta^2\theta.$$

[1]) Des différences de température entre les parties diverses des parois produiraient des courants de convection. Voir: Oberbeck [Wiedem. Ann., 7 p. 271 (1876)], Lorenz [Wied. Ann., 13 p. 582 (1881)]

Près des parois, par conséquent, l'effet thermique de la compression ou de la dilatation disparaît, tandis que la production de chaleur par frottement, balancée par la déperdition en vertu de la conductibilité, y joue le rôle principal.

Dans un gaz pour lequel le coefficient de conductibilité calorifique $\varkappa$ serait égal à zéro, un mouvement stationnaire serait impossible, puisque les couches superficielles se réchaufferaient sans cesse. Cela suffit pour démontrer qu'on n'est pas en droit, en général, de traiter la viscosité et la conductibilité comme des facteurs secondaires.

II. Théorèmes généraux sur la symétrie et la similitude dynamiques.

§ 6. Supposons les forces extérieures égales à zéro. Nous remarquerons que les équations de l'Hydrodynamique ordinaire ne seront pas changées par la substitution de $-u$, $-v$, $-w$, $a-p$, à u, v, w, p, pourvu qu'il s'agisse d'un mouvement „calme"[1], c'est-à-dire pourvu qu'on puisse négliger les termes du second ordre par rapport aux vitesses et à leurs dérivées partielles $\left(\text{ce qui permet de remplacer } \frac{D}{Dt} \text{ par } \frac{\partial}{\partial t}\right)$. Cela veut dire que les mouvements „calmes" des fluides sont ce qu'on pourrait appeler „renversables": en changeant les signes de toutes les différences de pression, on obtient un mouvement analogue, caractérisé par les mêmes lignes de flux et la même vitesse, mais en sens inverse.

Le mouvement inerte, objet de l'Hydrodynamique classique ou „idéale", qui résulte de l'omission contraire, est aussi renversable s'il est stationnaire, mais sans inversion de pression, puisque celle-ci dépend alors du carré de la vitesse.

Au contraire, les équations complètes qui tiennent compte de la viscosité et de l'inertie et qui correspondent aux mouvements „violents", ne sont pas renversables.

Notons aussi cette conclusion: si le liquide s'écoule par un tube ou par une ouverture dans une paroi, symétrique par rapport au plan YZ situé dans cette paroi, les lignes de flux seront aussi sy-

[1]) Ce terme nous paraît plus juste que „lent", puisque des mouvements très rapides pourront appartenir aussi à cette catégorie pourvu que la densité soit suffisamment petite.

métriques (fig. 1), lorsque le mouvement est calme. Si la différence de pression augmente à un degré tel que le mouvement devienne „violent", celui-ci devient asymétrique, ce qui explique la tendance

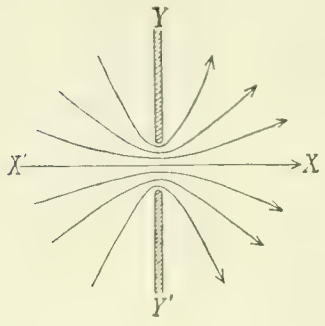


Fig. 1.

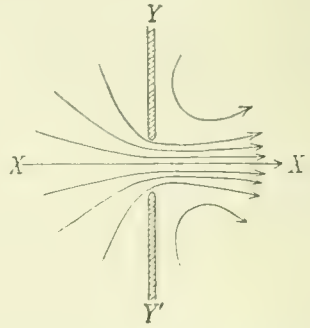


Fig. 2.

des liquides à former des jets et des tourbillons dans de pareils cas (fig. 2).

Il est vrai que Helmholtz[1]) ne voyait pas d'autre hypothèse propre à expliquer la formation des jets que celle de l'existence des „surfaces de discontinuité"; je crois cependant que l'asymétrie mentionnée y suffit pleinement; c'est ce que j'ai l'intention de démontrer en détail dans un autre travail, en appuyant mon opinion de considérations théoriques et de données expérimentales.

Dans l'Aérodynamique, la valeur absolue de la pression entre aussi dans le calcul des équations (9) et (12) qui par conséquent ne permettent point de procéder par la méthode de l'inversion dont il a été question plus haut. Ici l'asymétrie est un phénomène très général; mentionnons le „jet" de gaz, se formant si celui-ci s'écoule sous forte pression[2]), la formation des tourbillons annulaires de fumée (d'après la méthode de Tait), les mouvements asymétriques et les tourbillons autour d'un corps projeté (Mach). C'est seulement pour des mouvements très calmes, avec des différences de pression très petites, qu'il y aura des cas de symétrie approximative (voir par exemple au § 28).

[1]) „Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen". Berl. Akad. Ber. 1868 p. 215; Ges. Abh. I p. 146.

[2]) Voir § 92.

§ 7. Un principe qui est très fertile en applications diverses, est le principe de la similitude dynamique, employé par exemple par Helmholtz[1]) dans l'Hydrodynamique ordinaire.

Lorsqu'on connaît la solution d'un problème donné, on peut se demander si les mêmes équations ne peuvent pas être satisfaites en substituant

les valeurs	$n\,x$	à	x	(de même pour y, z)
	$m\,u$	„	u	(„ „ „ v, w
	$b\,p$	„	p	
	$h\,\theta$	„	θ	
	$\frac{n}{m}\,t$	„	t	

Les conditions nécessaires et suffisantes qui résultent de la substitution de ces variables en (10) et (12), sont les suivantes

(d'après 10): $$\frac{b}{h}\,\frac{m^2}{n} = \frac{b}{n} = \frac{m}{n^2}$$

(d'après 12): $$\frac{m\,b}{n} = \frac{m^2}{n^2} = \frac{h}{n^2}$$

[1]) Wied. Annalen, VII p. 375 (1879). Après avoir achevé la présente étude j'ai remarqué que Helmholtz, dans un autre travail (Berl. Akad. Ber. 1873, p. 501; Ges. Abhandlgen. I p. 158), avait étendu ses recherches pour y comprendre l'Aérodynamique et les applications à la navigation aérienne. Mais le raisonnement dont il se sert donne lieu à quelques objections fondamentales, qui rendent plus que douteuses ses conclusions définitives. En dehors d'une erreur numérique [le rapport des coefficients de viscosité $\frac{\mu}{\varrho}$ pour l'air et pour l'eau n'est pas 0·8082 mais 8·082] qui change complètement les résultats quantitatifs, nous mentionnons trois points importants: 1) l'omission complète de l'influence de la température dans les équations fondamentales, 2) la compressibilité de l'air est négligée dans le cas d'un ballon énorme, se mouvant avec une vitesse de 9 $\frac{m}{sec}$, 3) la viscosité est négligée dans le même cas et dans le cas analogue d'un bateau dans l'eau. L'importance du dernier point est mise en évidence par le résultat bien connu qu'une sphère animée d'une vitesse constante ne subirait point de résistance dans un liquide sans viscosité. Je crois que l'on ne peut pas étendre la notion de „similitude" à des cas aussi différents que ces deux-là. Ce terme sera employé, dans ce qui suit, d'une façon différente, au sens strict du terme. Une partie considérable de la résistance d'un bateau provient de la formation des ondes qui dépendent évidemment de la gravité; sous ce rapport il n'y a aucune analogie avec un ballon.

qui se réduisent à deux identités indépendantes[1]) entre quatre variables:

$$h = m^2 \; ; \qquad b = \frac{m}{n} \, . \tag{14}$$

Voici des exemples particuliers qui mettront en évidence l'importance pratique de cette similitude dynamique:

§ 8. Posons $n = 1$, donc: $b = \sqrt{h} = m$. Dans le même vase, il y aura un mouvement tout-à-fait analogue au mouvement primaire, lorsque les pressions seront élevées en proportion de la racine de la température; les vitesses alors seront élevées dans la même proportion;

α) Ainsi la vitesse du son, qui est donnée par $c = \sqrt{kR\Theta}$, augmente en raison de la racine de la température, indépendamment de la pression. Mais cette formule n'est exacte que pour des amplitudes très petites et comporte l'omission des effets de viscosité et de conductibilité; si l'on n'adopte point ces hypothèses simplificatrices, on aura une formule compliquée dans laquelle entrera aussi la pression. Notre conclusion restera pourtant exacte, pourvu qu'on la rapporte à des sons dont le nombre de vibrations est proportionnel à $\sqrt{\Theta}$ et pourvu qu'on mesure la vitesse pour des pressions correspondantes [proportionnelles à $\Theta^{\frac{2\alpha+1}{2}}$ dans le cas général]. Elle s'applique aussi à la propagation dans des tuyaux étroits.

β) La résistance (dimension $x^2 p$) qu'éprouve un corps se mouvant avec une petite vitesse, est à peu près proportionnelle à celle-ci. Ceci est exact pour des vitesses quelconques, si la pression s'élève en raison de la vitesse et la température dans une proportion quadratique.

γ) Applications semblables à l'écoulement des gaz.

§ 9. Posons $h = 1$; par conséquent $m = 1$, $b = \frac{1}{n}$: la température reste invariable; la vitesse sera aussi la même dans deux vaisseaux semblables dont les dimensions sont en raison inverse des pressions du gaz.

[1]) Si l'on tient compte de la variabilité des coefficients μ et $\varkappa$, en les supposant proportionnels à Θ^{α}, on doit remplacer l'équation (14, 2) par:

$$b = \frac{m^{2\alpha+1}}{n} \, .$$

α) En effet, il est facile de voir que la formule approximative de Kirchhoff pour la vitesse du son dans des tuyaux étroits (rayon r):

$$v = \sqrt{\frac{k p}{\varrho}} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2 r \sqrt{\pi N}} \right\}; \quad \text{où} \quad \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} + \sqrt{\frac{\varkappa}{c \varrho}} \left\{ \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right\};$$

satisfait à cette proposition (en considérant que N doit être changé en raison inverse des dimensions).

β) La formule de Poiseuille-Meyer:

$$M = \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{\pi R^4}{8 \mu} \tag{15}$$

n'est applicable que dans le cas du mouvement „calme" dans un tube long et étroit. Notre théorème démontre que son application à un tube de dimensions n fois plus grandes n'est justifiée que lorsque les pressions sont diminuées en raison inverse [1]). Dans ce cas, la vitesse sera la même, le volume qui s'écoule sera augmenté proportionnellement à n^2. Mais ce résultat ne dépend pas de la validité de la formule (15) et n'est même pas limité au flux stationnaire, ni aux mouvements „calmes"; il peut être appliqué par exemple à l'écoulement d'un gaz d'un vase clos par une ouverture.

γ) La résistance de corps, de grandeur différente mais semblables, projetés avec une certaine vitesse dans un gaz de pression inverse à leurs dimensions, sera proportionnelle à celles-ci. Un mouvement semblable très rapide cause des sons sibillants (Reibungstöne); la théorie est restée impuissante jusqu'à présent à expliquer ce phénomène. Néanmoins, nous pouvons prédire que le nombre des vibrations sera en proportion inverse des dimensions des corps, si la pression est réduite dans la même proportion $\left(\text{puisque } N \text{ a la dimension de } \frac{u}{x}\right)$. Une loi semblable a été établie en effet par M. Strouhal [2]) dans ses recherches sur les sons qui accompagnent

[1]) Tandis que dans l'Hydrodynamique il faut, d'après Helmholtz, une diminution de pression en raison de $\frac{1}{n^2}$, puisqu'il n'y existe qu'un genre de similitude

$$b = m^2 = \frac{1}{n^2}.$$

[2]) Wiedem. Ann., 5, p. 216 (1878).

le mouvement rapide d'un cylindre (tube de verre, fil métallique etc.) dans l'air; la loi empirique énoncée par ce savant prétend que le nombre des vibrations dans l'air à la pression atmosphérique est proportionnel à la vitesse divisée par le rayon du cylindre:

$$N = c\frac{v}{r}.$$

Nous en concluons par notre méthode que cette formule entraîne la conclusion que la hauteur du son est indépendante de la pression et de la température. M. Strouhal, au contraire, prétend qu'un abaissement de la température produit une élévation du son, mais l'examen des nombres correspondant aux températures de 9·5° C et de 37° C ne paraît pas devoir être favorable à cette opinion. La formule citée n'est d'ailleurs qu'une relation approximative.

δ) Saint Venant et Wantzel[1]) ont observé que la vitesse d'un gaz qui s'écoule par un orifice ne peut être augmentée par l'élévation de la pression que jusqu'à une certaine limite, qui ne dépend pas de la différence des pressions, intérieure p_2 et extérieure p_1, mais de leur rapport $\frac{p_2}{p_1}$. Ceci posé, imaginons deux expériences exécutées avec le même orifice, mais avec des pressions différentes, où cette valeur critique a été atteinte:

$$(1) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{P_2}{P_1} \quad (2).$$

Le mouvement caractérisé par p_2 et p_1 sera semblable au cas (3) où les pressions sont P_2, P_1 et où les dimensions de l'orifice ont été diminuées en raison de $\frac{p_2}{P_2} = \frac{p_1}{P_1}$. Puisque la vitesse ne change pas, la comparaison avec la deuxième expérience nous apprend que la vitesse sera indépendante des dimensions de l'orifice[2]). Cette conclusion, qui est la conséquence de l'existence d'un rapport critique $\frac{p_2}{p_1} = 1{\cdot}89$, s'accorde avec les résultats des expériences.

[1]) Journal de l'Ecole polytechnique XVI (1839). Comptes Rendus 17 (1843). Ces observations ont été confirmées par Zeuner, Hirn, Wilde, Salcher et Whitehead etc.

[2]) Égale approximativement à la vitesse du son (voir Lamb, Hydrodynamics p. 28).

Mach et Salcher[1]) et Emden[2]) ont remarqué la formation de cannelures dans le jet d'un gaz qui s'écoule, aussitôt que le rapport des pressions dépasse la valeur critique. Emden explique ce phénomène par des changements de densité correspondant à un train d'ondes sonores fixes. La mesure des distances des cannelures lui a suggéré la formule empirique

$$\lambda = 0{\cdot}88\, d \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} - 1{\cdot}9$$

où d est le diamètre de l'orifice. Cette recherche aussi aurait pu être facilitée par des considérations pareilles. On sait que dans un autre cas semblable, où les valeurs correspondantes sont D, $p_1 \frac{d}{D}$, $p_2 \frac{d}{D}$, la longueur λ deviendra $\lambda \frac{D}{d}$. On ne saurait déterminer λ a priori dans un troisième cas, où les valeurs D, P_1, P_2 satisferaient à la relation

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1 \frac{d}{D}}{p_2 \frac{d}{D}} = \frac{p_1}{p_2}$$

mais si l'on a établi le fait que λ ne dépend pas des valeurs absolues des pressions, mais seulement de leur rapport, on sait que cette grandeur conserve la valeur $\lambda \frac{D}{d}$. C'est-à-dire qu'on aura établi la proportionnalité de λ avec les dimensions de l'orifice en général: $\lambda = d\, fc. \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$, sans avoir eu besoin d'entreprendre des expériences spéciales à ce sujet.

ε) L'exemple suivant servira aussi à démontrer l'utilité de la méthode en question:

Kohlrausch[3]) a fait des recherches sur les sons qui naissent dans un gaz passant par une fente étroite (Spaltentöne). Les mesures s'étendaient à la dépendance entre le nombre des vibrations N, la largeur de la fente s et la pression p_1 du gaz dans le réser-

[1]) Sitzungsber. d. Wien. Akad., 98 (1889), Wiedem. Ann., 42 p. 144 (1890).
[2]) Wiedem. Ann., 69, p. 264, 426, 453 (1899).
[3]) Wiedem. Ann., 13, p. 545 (1881).

voir. Comme celui-ci s'écoulait dans l'atmosphère libre, l'influence de la pression extérieure p_2 ne pouvait pas s'y manifester. Mais nous pouvons déterminer a priori la manière dont elle se manifestera. Ce que nous cherchons, c'est la formule générale $N = f(s, p_1, p_2)$, dont le résultat empirique de Kohlrausch: $N = f(s, p_1, p_0) = \varphi(s, p_1)$, avec $p_2 =$ pression atmosphérique constante, égale à p_0, est un cas particulier. Profitons de la similitude du mouvement s, p_1, p_2 avec celui où ces variables ont les valeurs

$$s\frac{p_2}{p_0}, \quad p_1\frac{p_0}{p_2}, \quad p_0,$$

et où nous aurons

$$N_0 = \varphi\left(s\frac{p_2}{p_0}, \quad p_1\frac{p_0}{p_2}\right).$$

Les nombres de vibrations dans ces deux cas seront en raison inverse du temps [comme au § 8, α, γ et au § 9, α] c'est-à-dire: $N_0 : N = p_0 : p_2$, et, par conséquent, on aura le résultat cherché:

$$N = \frac{p_2}{p_0}\,\varphi\left(s\frac{p_2}{p_0}, \quad p_1\frac{p_0}{p_2}\right) = f(s, p_1, p_2).$$

On pourrait trouver d'une manière analogue (voir § 8) l'effet d'un changement de température. Il est à regretter qu'on ne puisse pas utiliser de cette façon les mesures de Kohlrausch parce qu'elles ne contiennent pas des valeurs explicites de p_1, mais seulement les vitesses moyennes U qui en dépendent, et parce que les résultats, condensés dans la formule approximative $N = A(U - B)$ et dans un tableau des valeurs de A, B, en fonction de la variable s, ne fournissent pas la loi finale sous une forme explicite.

§ 10. Le troisième cas spécial $b = 1$, $m = 1$ de la similitude, ainsi que les modifications produites par la dépendance de la viscosité de la température, présente moins d'intérêt.

Notons encore qu'il n'y a qu'un genre de similitude lorsque la pesanteur intervient comme force extérieure:

$$m = \sqrt{n}\,; \quad h = n\,; \quad b = \frac{1}{\sqrt{n}}\,;$$

c'est ce qui peut être appliqué aux courants de convection qui naissent par suite de différences de température.

§ 11. La similitude dynamique s'applique-t-elle aussi aux mou-

vements de différents gaz? Pour trancher cette question, on changera dans les équations (10, 12) les coefficients R, k, μ, $\varkappa$. Évidemment, par suite de (12), toute similitude est exclue pour des gaz pour lesquels les valeurs de k sont différentes.

Supposons donc k égal, et posons αR au lieu de R
$\beta\mu$ „ μ
$\gamma\varkappa$ „ $\varkappa$

On trouve les conditions suivantes:

(d'après 10): $$\frac{b}{\alpha h}\frac{m^2}{n} = \frac{b}{n} = \beta\frac{m}{n^2}$$

(d'après 12): $$\frac{mb}{n} = \beta\frac{m^2}{n^2} = \gamma\frac{h}{n^2}$$

qui se réduisent à

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} = 1\,; \qquad \alpha h = m^2\,; \qquad nb = m\beta\,. \tag{16}$$

Comme R est proportionnel à l'inverse du poids moléculaire M, il résulte de la première de ces identités que la similitude n'est possible que pour des gaz pour lesquels la valeur de la constante $\frac{\mu}{\varkappa M}$ est la même.

Le tableau suivant des coefficients $\frac{\varkappa}{\mu}$ (rapportés à l'air) multipliés par M, prouve que pour plusieurs gaz cette condition est satisfaite avec une approximation remarquable:

$k=1{\cdot}4$	H_2	O_2	N_2	CO	NO
$\frac{\varkappa M}{\mu}$	$\frac{6{\cdot}7.2}{0{\cdot}50}=27$	$\frac{1{\cdot}0.32}{1{\cdot}1}=29$	$\frac{1{\cdot}0.28}{0{\cdot}97}=29$	$\frac{0{\cdot}98.28}{0{\cdot}97}=28$	$\frac{0{\cdot}95.30}{0{\cdot}98}=29$

$k=1{\cdot}3$	CO_2	N_2O	CH_4	NH_3
$\frac{\varkappa M}{\mu}$	$\frac{0{\cdot}64.44}{0{\cdot}82}=34$	$\frac{0{\cdot}67.44}{0{\cdot}82}=36$	$\frac{1{\cdot}37.16}{0{\cdot}62}=35$	$\frac{0{\cdot}92.17}{0{\cdot}57}=27$

Voici quelques applications des considérations précédentes:

§ 12. Posons $h = 1$, $b = 1$; donc $m^2 = \alpha$, $n = m\beta = \beta\sqrt{\alpha}$. Pour une certaine température et une certaine distribution de pression, il y a des mouvements semblables dans deux vases semblables, dont les dimensions sont proportionnelles aux coefficients $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ des gaz renfermés; les vitesses seront alors proportionnelles à $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

α) En rapprochant ce théorème de la loi (approximative) de Graham et Bunsen, qui admet la proportionnalité du volume des différents gaz passant à travers une ouverture dans une lame mince, à $\frac{1}{\sqrt{M}}$, on en déduit le résultat suivant: la quantité de gaz s'écoulant par des ouvertures différentes — à différence constante de pression — est proportionnelle à la surface de l'ouverture.

β) Supposons un conduit long et étroit qui serait traversé par des volumes de gaz différents, proportionnels à leur coefficient de fluidité $\frac{1}{\mu}$. Notre théorème prouve que le volume du gaz, passant par de semblables conduits, sera proportionnel au cube de leurs dimensions linéaires. Ce résultat est plus général, en quelque sorte, que la formule de Poiseuille-Meyer qui s'applique dans le cas particulier d'un tube régulier circulaire.

γ) Un raisonnement analogue concernant des corps projetés, montre que la pression de résistance sera proportionnelle à leurs dimensions linéaires, si l'on suppose que, pour des gaz différents, elle change en raison du produit de la viscosité et de la vitesse; et qu'elle sera proportionnelle aux dimensions superficielles, si le produit de la densité et du carré de la vitesse en définit la valeur.

Citons un autre exemple:

δ) Joule et Kelvin[1]) ont mesuré l'élévation de température $\Delta\Theta$ que subissent des corps (thermomètres, fils formant des couples thermoélectriques) qui traversent l'air avec une certaine vitesse. Les expériences des savants anglais démontrent la proportionnalité très approximative de $\Delta\Theta$ au carré de la vitesse [comprise entre

[1]) Kelvin. Mathem. Phys. Papers, I p. 400, 445.

30 $\frac{m}{sec}$ et 100 $\frac{m}{sec}$] et son indépendance de la forme et de la grandeur du corps [à peu près 1°C par 55 $\frac{m}{sec}$]. Imaginons 1) un corps donné dont la vitesse serait v dans l'air 2) un deuxième, pareil, dans un autre gaz 3) un troisième dans le dernier gaz, à dimensions augmentées en raison de $\frac{\mu}{\mu_0}\sqrt{\frac{M_0}{M}}$, et doué d'une vitesse $v\sqrt{\frac{M_0}{M}}$; en appliquant notre théorème à la comparaison des corps 1—3, le résultat empirique de Kelvin à la comparaison des corps 3—2, nous pouvons dire que: dans des gaz différents (mais pour lesquels k a la même valeur) un corps animé de la vitesse v s'échauffe proportionnellement à la quantité $\Delta\Theta = a M v^2$, c'est-à-dire en raison du poids spécifique du gaz et du carré de la vitesse. Il résulte en outre, de l'application des théorèmes du § 8 et du § 9, le résultat inattendu que la constante a est indépendante de la pression du gaz et de sa température. Si l'extension de cette formule à des vitesses supérieures à la vitesse du son était permise, on pourrait évaluer, par exemple, l'échauffement d'un météore traversant l'air à une vitesse de 2·8 km. à 2500°C.

Il faut noter que la formule empirique ne s'applique plus aux petites vitesses $\left(\text{moindres que } 30 \frac{m}{sec}\right)$, mais les mesures n'étaient pas suffisamment exactes pour mettre en évidence les écarts de la loi en question.

§ 13. Supposons: $h = 1$, $n = 1$; donc: $m = \sqrt{a}$, $b = \beta\sqrt{a}$:

Même vase; même température; les mouvements de différents gaz seront semblables, pourvu que les pressions soient en raison de $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$; alors les vitesses (et les volumes) seront proportionnels à $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

α) En effet, cette proposition s'accorde avec la formule ordinaire pour la vitesse du son, et aussi avec la formule de Kirchhoff [§ 9 α) pour des tuyaux. De plus, on voit facilement que la formule de M. Strouhal (§ 9 γ) pour la hauteur du son produit par le mouvement d'un corps cylindrique, entraîne l'identité de la constante c pour les divers gaz, c'est-à-dire que le son est indépendant de la qualité du gaz. Nous ne connaissons pas encore d'expériences à ce sujet. De même que M. Emden, ayant établi la formule (§ 9 δ) pour

l'air, aurait pu en conclure a priori que la largeur des cannelures λ est indépendante de la nature du gaz, ce qu'ont démontré ses expériences, de même nous pouvons prédire (d'après le § 8) qu'on la trouvera indépendante de la température. De semblables considérations peuvent souvent faciliter les recherches expérimentales et étendre la portée des résultats obtenus.

β) Le rapport du volume d'un gaz qui s'écoule à l'active différence de pression sera, pour des gaz différents, proportionnel à leur fluidité:

$$\frac{V}{p_1 - p_2} \sim \frac{1}{\mu},$$

si l'on emploie des pressions correspondantes. En vertu de cette conclusion, on peut appliquer un procédé plus exact aux mesures de la viscosité. La formule de Poiseuille-Meyer

$$\frac{V}{p_1 - p_2} = \frac{R^4 \pi}{8 L} \frac{1}{\mu}$$

ne tient compte ni de l'inertie du gaz, ni de l'effet visqueux de la variabilité de la vitesse le long du tube, ni des différences de température (§ 27). On peut trouver pourtant la valeur exacte de la viscosité relative, en employant des pressions non pas quelconques, mais proportionnelles à $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ pour les divers gaz. Il est remarquable que ce résultat est indépendant de la forme du tube ou de l'orifice, et qu'il subsiste même pour l'écoulement par un trou dans une lame mince.

γ) La méthode des „disques oscillants" de Maxwell-Meyer qui n'est pourtant pas à l'abri des objections, à cause de l'inexactitude de la théorie mathématique sur laquelle elle repose, peut aussi servir à des mesures exactes de la viscosité; seulement, il faut y employer des pressions correspondantes, et la suspension du disque doit varier de sorte qu'on puisse produire des durées d'oscillation proportionnelles à $\sqrt{M}$.

Évidemment, tout ce qui a été dit s'applique rigoureusement, sous la condition seulement que k et $\frac{\varkappa M}{\mu}$ soient égaux, aux gaz com-

parés, et même lorsqu'il y a de petites différences, ces mesures seront plus exactes que d'après les méthodes ordinaires [1]).

III. Phénomènes thermiques d'écoulement.

§ 14. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer nos équations à l'examen des phénomènes thermiques qui se manifestent dans un gaz s'écoulant par des tubes ou des orifices, phénomènes qui ont fait le sujet des célèbres recherches de Joule et de Kelvin [2]). Il est vrai qu'il n'y a pas de doute possible quant à l'interprétation générale de ces expériences, lesquelles sont classiques en Thermodynamique; cependant, leur explication détaillée offre des difficultés qui ne peuvent être résolues que par une théorie aérodynamique détaillée. Ainsi l'explication usuelle du phénomène Joule-Kelvin ne tient pas compte de la variabilité de la vitesse et peut être de la température dans les différentes couches du gaz; on comprend aisément qu'il y ait un abaissement de température dans un gaz qui se dilate, mais la manière dont il se répartira sur le gaz qui s'écoule et sur celui qui reste dans le réservoir, n'est pas évidente.

Nous transformerons l'équation (12) en la multipliant par un élément de volume et en l'intégrant sur tout l'espace en question. Remarquons, en outre, que

$$\iiint p \operatorname{div} d\omega = \iint p(ul + vm + wn)\, dS - \iiint \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} \right) d\omega \quad (17)$$

introduisons les valeurs de $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ données par (10) et transformons les intégrales triples, exceptée celle qui renferme $\frac{\partial}{\partial t}$, en intégrales doubles. En désignant la vitesse normale à la surface par v_n, la vitesse totale par $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, nous obtenons l'équation

[1]) On pourrait en profiter pour élucider la cause des divergences, problématique jusqu'à présent, qui existent entre les résultats donnés par les deux méthodes mentionnées. [Schumann, Wied. Ann., 23 p. 353 (1884)].

[2]) Kelvin, Mathem. Physic. Papers, I p. 333; Joule, Mechan. Wärmeäquivalent, Braunschweig 1872.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left[\frac{p}{k-1}+\varrho\frac{V^2}{2}\right]d\omega+$$

$$+\iint\left[\left(\frac{k}{k-1}p+\varrho\frac{V^2}{2}\right)v_n-\frac{\mu}{3}v_n\,\mathrm{div}-\mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right]dS+$$

$$+\mu\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\ldots+\frac{1}{3}\mathrm{div}^2\right]d\omega=$$

(18) $$=\iiint\Phi\,d\omega+\varkappa\iint\frac{\partial\theta}{\partial n}dS.$$

L'intégrale triple de gauche multipliée par μ, annule les termes correspondants de Φ, les autres peuvent être transformés par intégration partielle, d'après la formule

(19) $$\iiint\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\omega=\iint w\left(m\frac{\partial v}{\partial z}-n\frac{\partial v}{\partial y}\right)dS.$$

en une intégrale, désignée par l'expression symbolique

$$\iint\left[\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)(ul+vm+wn)-v_n\,\mathrm{div}\right]dS=$$

$$=\iint\left[\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)v_n-v_n\,\mathrm{div}\right]dS.$$

Le résultat final est l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left[\frac{p}{k-1}+\varrho\frac{V^2}{2}\right]d\omega+\iint\left\{\left[\frac{k}{k-1}p+\varrho\frac{V^2}{2}\right]v_n+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\mu v_n\,\mathrm{div}-\mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right)-\mu\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)v_n\right\}dS=$$

(20) $$=\varkappa\iint\frac{\partial\theta}{\partial n}dS.$$

§ 15. Lorsque le courant du gaz est stationnaire, le premier terme de cette équation disparaît. Le reste, l'intégrale double, peut être appliquée à la surface d'un tube de flux, de longueur s, fermé par deux sections transversales q_1 et q_2. Eu égard à l'équation de continuité qui prend la forme $\varrho v q=\text{const.}$, on aura:

(21) $$\frac{kR}{k-1}(\theta_1-\theta_2)+\frac{V_1^2-V_2^2}{2}+\frac{2}{3}\mu\left[\frac{\mathrm{div}_1}{\varrho_1}-\frac{\mathrm{div}_2}{\varrho_2}\right]-$$

$$-\mu\left[\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial V_1}{\partial s}-\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial V_2}{\partial s}\right]=\frac{1}{\varrho V q}\iint\left[\mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right)+k\frac{\partial\theta}{\partial n}\right]dS.$$

Donc, la différence de température en deux points de la même ligne de flux est en relation avec les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial s}$ et div. et du carré de la vitesse, en ces deux points, et aussi avec la longueur du chemin entre les deux points, qui définit la valeur de la dernière intégrale. Dans les endroits où le gaz se meut avec une lenteur et une uniformité suffisantes, comme par exemple à l'intérieur de deux réservoirs qui communiquent par un tube étroit, on peut négliger ces premiers termes, mais on ne peut pas faire de même avec l'intégrale qui dépendra de la distribution des vitesses et de la température entre ces deux points et qui, en général, ne sera pas négligeable. Cela serait vrai, par exemple, si l'équation

$$-2\left[\mu \frac{V^2}{2} + \varkappa\theta\right] = 0;$$

avait lieu, mais évidemment, ce serait là un cas exceptionnel.

A) Donc, on ne peut pas prétendre que la température d'un gaz, s'écoulant d'une manière stationnaire, reste invariable; ses différentes couches auront des températures différentes.

§ 16. Le théorème de constance de la température ne s'applique que dans un cas particulier, à la température moyenne. Ce que nous appelons température moyenne d'un profil, c'est la température qui s'établirait dans le gaz passant par une surface orthogonale aux lignes de flux, si toutes ses couches étaient mélangées d'une façon complète, c'est-à-dire:

$$\theta = \frac{\Sigma \theta \varrho V q}{\Sigma \varrho V q} \qquad 22$$

où la sommation s'étend sur tous les éléments de la surface orthogonale. Supposons, pour fixer les idées, que le point *1* soit situé à l'intérieur du réservoir *1*, où les conditions de lenteur et d'uniformité du mouvement sont satisfaites. Envisageons maintenant les équations (21) ou (20) et notons le fait que les parois du réservoir et du conduit sont formées par des tubes de flux adhérents, c'est-à-dire qu'on peut développer V — en désignant la distance d'un point des parois par δn — de la façon suivante:

$$V = \delta n \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0, \text{ par conséquent: } \frac{\delta}{\partial n}(V^2) = 2\,\delta n \,.\, \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0^2$$

ce qui disparaît à la surface (pour $\delta n = 0$) de même que V. Donc on aura, pour la température moyenne, l'équation

$$(23) \quad \frac{kR}{k-1}[\theta_0 - \Theta] = \frac{\frac{1}{2}\Sigma \varrho q V^3 + \mu \Sigma\left(\frac{2}{3}\operatorname{div} + 2\frac{\partial V}{\partial s}\right) q V + \int \varkappa \frac{\partial \theta}{\partial n} dS}{\Sigma \varrho q V}$$

L'intégrale $\int \varkappa \frac{\partial \Theta}{\partial n} dS$ peut être divisée en trois parties qui correspondent aux parois du vaisseau et aux deux sections transversales. La première partie sera nulle, si l'on suppose que les parois sont des isolateurs idéaux de la chaleur; de même les deux autres, si la section passe par des endroits où il y a uniformité suffisante.

B) Donc, dans des endroits où le courant stationnaire est assez lent et uniforme, la température moyenne du gaz qui s'écoule est égale à celle qui règne dans le réservoir primaire. C'est ce qu'ont démontré les expériences de Joule et de Kelvin sur le gaz qui présente les moindres écarts de la loi Boyle-Charles, l'hydrogène, et où le bouchon de ouate remplace un système de tubes d'efflux. Il serait intéressant, d'autre part, de vérifier notre résultat précédent, concernant les différences de température dans les couches diverses d'un gaz quittant un tube étroit, résultat qui distingue notre théorie du raisonnement usuel. Cette différence provient de ce que le travail dans un gaz visqueux n'est pas donné par $\int (ul + vm + wn)\, p\, dS$, mais par $\int (up_{xn} + vp_{yn} + wp_{zn})\, dS$. L'identité de ces deux expressions peut être démontrée facilement, pour le mouvement stationnaire, à l'aide de transformations semblables à celles du § 14, mais seulement pour toute la quantité du gaz comprise entre les parois et les deux sections dans les réservoirs, et non pas pour des tubes de flux considérés isolément. Evidemment, ces remarques ne concernent pas du tout les conclusions qu'on tire du phénomène de Joule et Kelvin, concernant les écarts de la loi Boyle-Charles.

§ 17. Envisageons encore l'équation (21) et considérons que, pour les tubes de flux adhérents aux parois: V, div et $\frac{\partial V}{\partial s}$ sont nuls. Puisque la température dans ces couches doit rester finie, ceci entraîne la conclusion que l'intégrale de droite disparaît. Transformons cette intégrale en

$$\iiint \left[\mu \nabla^2 \left(\frac{V^2}{2}\right) + \varkappa \Delta^2 \theta\right] d\omega ,$$

et considérons que V peut être développé dans la proximité des parois (la normale étant prise pour direction ζ) de la manière suivante:

$$V = \zeta \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 + \frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right)_0 + \zeta_\eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \, \partial n}\right)_0 + \cdots$$

ce qui donne la valeur limite de

$$\nabla^2 \left(\frac{V^2}{2}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 ;$$

nous retrouvons ainsi la condition

$$\mu \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = - \varkappa \Delta^2 \theta$$

qui a été établie auparavant comme équation (13). D'ailleurs, la température des couches superficielles sera égale, naturellement, à celle des parois.

§ 18. Considérons encore un détail: la manière dont se manifeste l'effet de l'énergie cinétique, en supposant, pour l'accentuer et pour simplifier le calcul, que la vitesse soit si grande qu'on puisse négliger les termes du premier degré en comparaison des carrés des vitesses. Nous aurons pour chaque tube de flux

$$\frac{kR}{k-1} (\theta_0 - \theta) = \frac{V^2}{2} . \tag{24}$$

Un gaz idéal, sans viscosité, satisferait à l'équation [1])

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{V^2}{2} = \text{const.}, \tag{25}$$

où l'intégrale s'étend sur la longueur s de la ligne de flux allant du réservoir jusqu'au point considéré. La différentiation des deux équations (24) et (25) donne:

$$- \frac{k}{k-1} R \frac{d\theta}{ds} = V \frac{dV}{ds} = - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{ds}$$

[1]) Voir p. ex. Lamb, p. 23.

dont l'intégration, en combinaison avec la loi B. Ch., mène à la formule ordinaire de détente adiabatique:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{k-1}. \tag{26}$$

On est habitué à considérer cette formule comme évidente a priori, dans de pareils cas. Mais cette hypothèse est tout à fait fausse dans le cas des gaz réels visqueux. C'est ce que l'on démontre en remarquant que la formule (26) exigerait un refroidissement d'un courant stationnaire, correspondant à la chute de pression de p_1 à p_2:

$$\theta_2 = \theta_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

tandis que nous avons vu au § 16 que la température moyenne reste invariable.

C) L'équation (24), au contraire, reste approximativement applicable dans ce cas, pour un gaz visqueux, puisque l'abaissement de température ne correspond pas à l'expansion du gaz, mais au gain de son énergie cinétique. La température s'abaisse le plus où la vitesse est maxima, p. ex. à l'orifice d'une bombe à gaz comprimé, et c'est cet abaissement [1]) qui a été utilisé par divers observateurs pour la liquéfaction des gaz, d'après la méthode dynamique. A mesure que le gaz perd sa vitesse, il regagne aussi sa température première par suite de la chaleur de friction. Donc, l'emploi direct de l'équation (26) n'est justifié que dans le cas d'une expansion infiniment lente; autrement il faut employer l'équation complète (21), dans le cas des grandes vitesses l'équation approximative (24) et dans le cas où la conductibilité de la chaleur est prépondérante, on peut supposer l'isothermie.

§ 19. Jusqu'ici nous avons supposé que le courant reste stationnaire, par conséquent que la pression dans les réservoirs est maintenue constante — p. ex. à l'aide d'un dispositif pareil à celui des gazomètres, ou de la bouteille de Mariotte, ou bien par suite de la communication avec une source constante de gaz. Mais au moment où nous interrompons l'efflux, de sorte que le gaz ne sort du réservoir que par expansion, la distribution de la température changera puisqu'alors il faut ajouter, à la partie droite de l'équation (21), le terme

[1]) Augmenté par suite du phénomène Joule-Kelvin.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{R\theta}{k-1}+\frac{V^2}{2}\right)dm.$$

A l'intérieur du réservoir *1*, où les vitesses sont petites et la température uniforme, on aura, d'après (20):

$$\frac{\partial p}{\partial t}\iiint d\omega = -kp\iint v_n\,dS \tag{27}$$

ce qui, joint à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{t}\iiint d\omega = -\varrho\iint v_n\,dS \tag{28}$$

donne

$$p = p_0\,e^{-\frac{k}{\Omega}\iiint v_n\,dS\,dt} \tag{29}$$

[Ω désignant le volume total du réservoir *1*] et la formule (26).

D) Donc, à l'intérieur du réservoir *1*, la pression et la température s'abaissent d'après la formule ordinaire de détente adiabatique.

§ 20. Dans le tuyau de décharge, le problème sera plus compliqué et ne peut être analysé que par le moyen d'une solution détaillée, mais on peut trouver la température approximative du gaz qui l'a traversé. Appliquons les équations (27, 28) à deux sections transversales des lignes de flux, l'une située dans le réservoir *1*, près de son issue, l'autre au réservoir *2*, près de l'entrée, et désignons les volumes correspondants par Ω_1 et Ω_2. On obtient les équations: pour Ω_1, comme plus haut:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1\frac{dp_1}{dt} + kp_1\iint_{\ldots 1} v\,dS &= 0 \\ \Omega_1\frac{d\varrho_1}{dt} + \varrho_1\iint_{\ldots 1} v\,dS &= 0 \end{aligned}\right| \tag{30}$$

Pour $\Omega_1 + \Omega_2$, en négligeant le volume du conduit, d'une manière analogue

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2) + k\iint_{\ldots 2} p_2\,v\,dS &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\Omega_1 \varrho_1 + \Omega_2 \varrho_2) + \varrho_2\iint_{\ldots 2} v\,dS &= 0 \end{aligned}\right| \tag{31}$$

En divisant (31,1) par (31,2) et en diminuant Ω_2 en comparaison avec Ω_1, on obtient

$$k\frac{p_2}{\varrho_2} = \frac{d(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2)}{d(\Omega_1 \varrho_1 + \Omega_2 \varrho_2)} = \frac{dp_1}{d\varrho_1} = k\frac{p_1}{\varrho_1}$$

c'est-à-dire: $\Theta_2 = \Theta_1$.

E) Donc, pourvu que les hypothèses de l'énoncé *B* soient remplies, la température moyenne du gaz entrant dans le réservoir *2* sera (approximativement) la même que celle du gaz renfermé dans le réservoir *1*, qui s'écoule d'après la formule adiabatique (quoique la pression soit inférieure).

On peut vérifier ce résultat, en calculant le travail extérieur et la quantité de chaleur „absorbée", ce qui donne des valeurs égales à $V\frac{(p_0 - p_1)}{k}$, moindres évidemment que les valeurs qui correspondent à une expansion réversible.

§ 21. Ces résultats méritent d'attirer l'attention des physiciens qui étudient l'effusion, la transpiration et les phénomènes analogues, parce qu'ils démontrent l'inexactitude des recherches sur l'efflux stationnaire exécuté à l'aide de réservoirs fermés où la pression diminue. Ainsi M. Donnan[1]), en mesurant le temps nécessaire à un abaissement de la pression de 525 mm. à 322 mm. dans le réservoir, n'a pas obtenu, en réalité, des nombres relatifs pour le temps d'effusion des divers gaz, puisque la température ne restait pas constante et, comme il le croyait, égale à 25°C, mais pouvait s'abaisser: pour l'air à — 14°C; pour CO_2 à — 9°C; pour l'argon à — 28°C. Ces nombres sont sans doute exagérés puisque les différences devaient être diminuées par suite de la conduction de la chaleur aux parois du vaisseau, mais en tout cas, cette grave source d'erreurs indique la nécessité de l'emploi de gazomètres à pression constante. (§ 19). C'est une condition dont l'importance a été bien appréciée par Joule et Kelvin dans leurs travaux. Les mêmes considérations s'appliquent à la plupart des recherches semblables et aussi, en quelque sorte, aux travaux intéressants de M. Emden (loc. cit.). Cet expérimentateur n'y a pas remédié par l'emploi de la soupape régulatrice (Druckreducirungsventil), puisqu'il n'a pas pris soin de réchauffer le gaz sortant à une température invariable. Cette ob-

[1]) Philos. Magazine 49 p. 423 (1900).

jection est encore plus importante pour les expériences de Mach et Salcher, faites à une pression plus haute et avec un réservoir de moindre capacité, ce qui peut expliquer aussi l'écart entre les observations de l'abaissement de la température dans le jet de gaz (une dizaine de degrés d'après M. Emden, une centaine d'après M. Mach). Le thermomètre, d'ailleurs, n'est nullement applicable à la mesure de la température d'un gaz animé d'une grande vitesse, puisque le mouvement du gaz et la distribution de chaleur changeraient complètement par suite de sa présence.

IV. Solutions spéciales de quelques problèmes d'Aérodynamique.

§ 22. Nous nous bornerons à l'étude de quelques problèmes simples dont quelques-uns toutefois montreront l'application de méthodes plus générales.

L'exemple le plus simple est le mouvement stationnaire d'un gaz compris entre deux parois cylindriques, concentriques; l'extérieure dont le rayon est r_2 est fixe, et l'intérieure, de rayon r_1, effectue une rotation de n tours par seconde. Désignons par ω la vitesse angulaire correspondant au rayon r; nous aurons la solution des équations (10) et (11)

$$u = -\omega \frac{y}{r}; \quad v = \omega \frac{x}{r},$$

sous la condition que ω satisfasse à l'équation:

$$\omega = -\frac{a}{2r^2} + b = \frac{2\pi n}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right] \tag{33}$$

Les pressions résultent de $\frac{dp}{dr} = \omega^2 r \varrho$, si la température est connue. Celle-ci est déterminée par l'équation (12) qui, intégrée, donne

$$\theta = \theta_0 + \frac{\mu}{4\varkappa} a^2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right] + c \log \frac{r}{r_2} \tag{34}$$

où Θ_0 désigne la température de la paroi extérieure. Pour déterminer le coefficient c, supposons que le cylindre intérieur soit isolé au point de vue thermique. Il atteindra l'équilibre thermique lorsque:

$$\varkappa \frac{d\theta}{dr}\Big|_{r=r_2} = 0.$$

La température correspondante est

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{\mu a^2}{4z}\left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1^2}\log\frac{r_1}{r_2}\right] \tag{35}$$

ou approximativement, pour une petite épaisseur $r_1 - r_2$,

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{2\mu}{z}(\pi n r_2)^2 \tag{36}$$

indépendamment de l'épaisseur, ce qui donne p. ex. pour $n = 100$, $r_2 = 10$ cm., dans l'air: $\Theta_2 = \Theta_0 + 1{\cdot}4^0$.

§ **23.** En supposant $r = \infty$ dans l'exemple précédent, ou bien en supposant $u = w = 0$; $v = fc.(x)$, on aura un flux lamelliforme, stationnaire, qui est identique à celui qui se produit dans des circonstances analogues dans les liquides: $v = bx + c$. Mais, au sein des liquides, un mouvement variable lamelliforme est aussi possible: lorsque le plan OYZ exécute des oscillations dans la direction des Y: $v_0 = A\cos\gamma t$. Ce mouvement se propage dans la direction des X, en vertu de l'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\varrho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, de la même manière que la chaleur dans un corps chauffé:

$$v = A e^{x\sqrt{\frac{\varrho_0}{2\mu}}} \cos\left(\gamma t - x\sqrt{\frac{\varrho_0}{2\mu}}\right) \tag{37}$$

Dans les gaz, au contraire, il y a cette singularité que les équations (10, 11, 12) ne peuvent pas être satisfaites par l'hypothèse $u = w = 0$, $v = f(x, t)$, puisque la chaleur produite par le frottement donnera naissance à des vitesses dans la direction des X. Il est facile d'en faire l'évaluation approximative.

Voilà un exemple intéressant de la manière dont des vibrations transversales peuvent produire des ondulations longitudinales sonores; ce sont les premières qui seront prédominantes dans la proximité de la paroi OYZ, les autres dans des distances plus grandes, puisque leur coefficient d'extinction sera plus petit. L'effet d'une raréfaction du gaz sera d'augmenter l'extinction pour les ondes longitudinales et de la diminuer pour les ondes transversales.

§ **24.** Un autre exemple qui met en évidence une différence des liquides et des gaz, est le suivant: un courant stationnaire dans

la direction X, dont la vitesse ne dépend que de la valeur de x, les parois étant parfaitement polies ou à une distance telle qu'on peut négliger leur présence. En négligeant la conduction, on aura donc les équations:

$$\left.\begin{aligned} \varrho u \frac{du}{dx} &= \frac{dp}{dx} + \frac{4\mu}{3}\frac{d^2u}{dx^2}; \\ \frac{d}{dx}(\varrho u) &= 0 \\ u\frac{dp}{dx} + k\,p\frac{du}{dx} &= (k-1)\frac{4\mu}{3}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \end{aligned}\right| \qquad (38)$$

Ce qui est intéressant c'est que, dans ce cas, on a une solution exacte, tandis que dans l'Hydrodynamique, on ne connaît pas de solution exacte des équations complètes, sauf dans quelques cas très simples comme le précédent. Un mouvement stationnaire analogue d'un liquide serait impossible, puisqu'il n'y aurait pas de forces d'expansion visqueuse qui pourraient s'opposer à l'accélération produite par les différences de pression.

Les équations (38,2) et (38,1) peuvent être intégrées immédiatement:

$$\varrho u = b \qquad (39,2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4\mu}(b u + p - a). \qquad (39,1)$$

De même (38,3) après avoir été divisée par $\frac{du}{dx}$, dont la valeur est donnée par l'équation précédente:

$$p = \frac{(k-1)}{2} b u - \frac{c}{u} - (k-1) a. \qquad (39,3)$$

La substitution de cette valeur dans (39,1) et l'intégration donnent:

$$x = m + \frac{4\mu}{3}\int \frac{u\,du}{(k+1)\frac{b}{2}u^2 - k a u - c} \qquad (40)$$

où l'intégrale peut être évaluée par des fonctions cyclométriques ou logarithmiques.

Le problème est résolu, mais il paraît assez douteux qu'il possède des applications dans la pratique. Nous avons trouvé ici quatre constantes arbitraires, alors que nous sommes habitués à définir le

flux, p. ex. dans les tubes de Poiseuille, par trois données: la pression en deux points et la température du gaz. Mais, comme nous le verrons plus loin, il n'y a là qu'une apparente simplicité de la loi de Poiseuille, causée par l'omission de facteurs secondaires, notamment de l'influence de l'état de mouvement dans la proximité des extrémités du tube.

§ 25. Un exemple qu'il serait plus facile de réaliser est le mouvement variable défini par les conditions: $v = w = 0$; $u = f(x, t)$; mais ce problème ne pourrait être résolu dans toute sa généralité.

Nous supposerons donc que le gaz, à pression initiale p_0 et température θ_0, soit contenu dans un cylindre, à parois polies, fermé d'un côté, de l'autre côté admettant un piston, à masse négligeable, qui y soit enfoncé par une force constante a; pour simplifier, nous négligerons aussi l'effet de l'inertie du gaz, en supposant un mouvement instantané, analogue dans toute son étendue:

$$u = x f(t). \tag{41}$$

Or, la force extérieure a doit être balancée par la somme de la pression intérieure du gaz et du frottement intérieur, c'est-à-dire, d'après (1):

$$p_{xx} = a = p - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{42}$$

L'introduction de $\frac{\partial u}{\partial x} = f(t)$ et la substitution de p dans l'équation thermique:

$$\frac{dp}{dt} + k p \frac{\partial u}{\partial x} = (k-1)\frac{4\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

donne l'équation:

$$\frac{df}{dt} + \frac{3ak}{4\mu} f + f^2 = 0. \tag{43}$$

On en déduit par intégration:

$$\frac{1}{f} = A e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}; \quad \text{où:} \quad \alpha = \frac{3ak}{4\mu} \tag{44}$$

et, en introduisant la valeur initiale

$$\frac{4\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = p_0 - a,$$

on obtient:

$$u = \frac{a x}{\left(\frac{a k}{p_0 - a} + 1\right) e^{\alpha t} - 1} \tag{45}$$

Pour trouver la densité, intégrons l'équation de continuité:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

ce qui donne:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\int_0^t f\, dt} \tag{46}$$

où l'intégrale peut être développée de la manière suivante:

$$\int \frac{dt}{A e^{\alpha t} - B} = \frac{1}{\alpha B} \log \left(\frac{A e^{\alpha t} - B}{A e^{\alpha t}}\right).$$

C'est-à-dire:

$$\varrho = \varrho_0 \left[1 + \frac{p_0 - a}{a k} (1 - e^{-\alpha t})\right]^{-1}. \tag{47}$$

La densité, la pression et la température approcheront, par conséquent, d'une manière asymptotique des limites:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_\infty &= \frac{\varrho_0}{1 + \frac{p_0 - a}{a k}}; \qquad p_\infty = a; \\ \theta_\infty &= \frac{p_\infty}{R \varrho_\infty} = \frac{a\left(1 + \frac{p_0 - a}{a k}\right)}{R \varrho_0} = \theta_0 \left[\frac{1}{k} + \frac{a}{p_0} \frac{k-1}{k}\right] \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Ce qu'il y a d'intéressant dans cet exemple, c'est la comparaison avec la formule adiabatique ordinaire qui donnerait:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{a}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}; \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{a}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Les valeurs qui en résultent pour l'élévation de la température finale, sont inférieures à celle de notre calcul (48), ce qui est naturel, puisque la formule adiabatique n'est applicable qu'au cas d'une expansion infiniment lente et ne tient pas compte du frottement intérieur.

Il est vrai que nous aussi, nous avons négligé un facteur: l'effet de l'inertie du gaz, qui diminuera cette différence et produira des oscillations qui tendront à s'évanouir. Par conséquent, notre calcul ne serait exact que pour un gaz très raréfié. Cependant, cet exemple prouve qu'une erreur — très petite peut-être — est inévitable si l'on emploie la formule adiabatique à l'évaluation des mesures de la chaleur spécifique des gaz faites d'après la méthode de Clément-Desormes. Leur effet sera une augmentation apparente du coefficient k, le contraire de l'effet de la conductibilité. D'ailleurs, il dépendra de la manière dont se produit la compression; si le réservoir avait, par exemple, une forme sphérique, à parois dilatables, la diminution des longueurs serait la même dans toutes les directions:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \text{const.}$$

et, par conséquent, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$, c'est-à-dire que la viscosité n'aurait aucun d'effet, ni mécanique, ni thermique (puisque $\Phi = 0$).

§ 26. Le système des équations aérodynamiques est si compliqué qu'on ne peut espérer de le résoudre directement que dans des exemples d'une simplicité exceptionnelle, tels que ceux que nous venons de citer. On peut aussi employer, outre les méthodes des § 7 — § 13, la méthode des approximations successives. En voici des cas particuliers: Si le coefficient $\varkappa$ de conductibilité thermique était infini, on aurait un mouvement rigoureusement isothermique. La même conclusion s'applique approximativement à tous les cas où la conductibilité joue un rôle prépondérant, comme les mouvements „calmes" dans les conduits étroits; à mesure que $\frac{1}{\varkappa}$ diffère de zéro, la distribution de chaleur et de mouvement s'écarte de l'état limite, de sorte qu'on pourra développer toutes les variables en séries potentielles de la forme

$$(49) \qquad \begin{aligned} u &= u_0 + \frac{u_1}{\varkappa} + \frac{u_2}{\varkappa^2} + \frac{u_3}{\varkappa^3} + \cdots \\ \theta &= \theta_0 + \frac{\theta_1}{\varkappa} + \frac{\theta_2}{\varkappa^2} + \cdots \end{aligned}$$

En décomposant les équations (10, 11, 12) après avoir substitué ces expressions, d'après les degrés de $\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$, on aura une série d'équa-

tions à approximations progressives (pourvu que la convergence soit établie) dont les trois premières représentent l'état le plus simple isothermique:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= \text{const} = \frac{p_0}{R\,\varrho_0} \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} &= \mu\,\Delta^2 u_0 + \frac{\mu}{3}\,\frac{\partial\,\text{div}_0}{\partial x} \text{ etc.} \\ \frac{\partial\,(p_0\,u_0)}{\partial x} &+ \frac{\partial\,(p_0\,v_0)}{\partial y} + \frac{\partial\,(p_0\,w_0)}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned} (k-1)\,\Delta^2\,\theta_1 &= u_0\,\frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0\,\frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0\,\frac{\partial p_0}{\partial z} + k\,\text{div}_0 - (k-1)\,\Phi_0 \\ \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \mu\,\Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3}\,\frac{\partial\,\text{div}_1}{\partial x} \text{ etc.} \\ \frac{\partial\,(\varrho_0\,u_1 + \varrho_1\,u_0)}{\partial x} &+ \frac{\partial\,(\varrho_0\,v_1 + \varrho_1\,v_0)}{\partial y} + \frac{\partial\,(\varrho_0\,w_1 + \varrho_1\,w_0)}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

§ 27. Essayons d'appliquer cette méthode d'approximation à la théorie ordinaire[1]) du mouvement dans les tubes Poiseuille. Le raisonnement usuel correspond aux équations (50), simplifiées encore par l'hypothèse $v = w = 0$ et par l'omission des termes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ etc. Pour obtenir une approximation plus grande, il faut substituer les formules qui en résultent, c'est-à-dire:

$$p = \sqrt{p_1^2 - \frac{x}{l}\,(p_1^2 - p_2^2)} = \sqrt{a - c\,x} \tag{52}$$

$$u = \frac{\delta^2 - r^2}{8\mu}\,\frac{c}{\sqrt{a - c\,x}} \tag{53}$$

dans l'équation (51,1) qui se transforme en

$$\Delta^2\,\theta_1 = \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right) = \frac{c^2}{16\,\mu}\,\frac{\delta^2 - 2r^2}{a - c\,x} \tag{54}$$

L'intégration donne:

$$\theta_1 = -\frac{c^2}{128\,.\,\mu}\,\frac{(\delta^2 - r^2)^2}{a - c\,x} = -\frac{1}{128\,.\,\mu}\left[\frac{(\delta^2 - r^2)\,(p_1^2 - p_2^2)}{l\,p}\right]^2 = \\ = \frac{u^2\,\mu}{2}\,. \tag{55}$$

[1]) O. E. Meyer, Pogg. Ann., 127, p. 253, 353 (1866); 148, p. 1 (1873).

Nous aurons donc:

$$\theta = \theta_0 - \frac{\mu}{2\varkappa} u^2$$

et, ce qui est remarquable, $\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$, c'est-à-dire: le gaz n'échange pas de chaleur avec les parois du tube. L'abaissement maximum, dans l'axe du tube, s'élève à

$$\Delta \theta = \frac{g \,.\, \delta^4}{16 \,.\, 128 \,.\, \varkappa \mu} \left[\frac{p_1{}^2 - p_2{}^2}{l p}\right]^2 . \tag{56}$$

Ainsi on trouve, pour les experiences de Koch[1]) sur la viscosité de la vapeur de mercure, avec les nombres approximatifs:

$$p_1 = 100\, cm., \quad p_2 = 1\, cm., \quad l = 10\, cm., \quad r = 0{\cdot}00425\, cm.$$

un abaissement sur l'axe de $0{\cdot}04^0$ jusqu'à 400^0C.

Ce résultat n'est point exact, sans doute, mais il suffit pour démontrer que la formule de Poiseuille, fondée sur l'hypothèse d'un mouvement lent et isothermique, n'est pas applicable dans un pareil cas et que le résultat final de ce travail — proportionnalité de μ à $\Theta^{1.6}$ - est dénué de fondement. Des objections de même nature s'attachent aux travaux de L. Meyer et Steudel[2]) et même à quelques-unes des mesures de O. E. Meyer (loc. cit.), quoique l'influence sur les nombres définitifs de celles-ci ne soit probablement pas importante. Elles font apprécier l'importance des conditions: petitesse du diamètre et de la différence des pressions; et longueur du tube. La formule (56) d'ailleurs ne servira qu'à la vérification de la supposition d'isothermie. On ne serait pas en droit de pousser plus loin le calcul d'approximation, à cause de l'inexactitude de la formule primaire (52, 53) qui provient des simplifications mentionnées[3]).

D'autre part, si l'on voulait exécuter le calcul en tenant compte de ces effets secondaires — de la viscosité „de volume" et de l'inégalité de pression dans les différentes couches d'un profil, — on

[1]) Wiedem. Ann., 19, p. 857 (1883).

[2]) Wiedem. Ann., 16, p. 368, 394 (1882).

[3]) Il y faut ajouter l'omission des termes d'inertie

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ etc.}$$

rencontrerait un autre obstacle: la connaissance de la pression en deux points de l'axe, p_1, p_2 et de la température initiale ne suffirait pas à la détermination des constantes et des fonctions arbitraires du calcul; il faudrait connaître encore la distribution détaillée de la vitesse et de la pression dans le profil initial. Cela veut dire que le problème n'est pas défini d'une façon exacte, si l'on n'a pas précisé la forme des deux réservoirs qui communiquent par le tube, surtout dans le voisinage de ses extrémités. L'effet de ces circonstances, qui se manifeste par exemple dans les phénomènes de la „vena contracta", peut modifier d'une manière considérable la transpiration par des tubes larges, de petite longueur. Cependant la méthode de Poiseuille, employée de la manière décrite au § 13, peut toujours servir à des mesures exactes de la viscosité relative.

§ 28. Une autre catégorie de problèmes peut être illustrée par l'exemple suivant. Supposons une sphère, en repos, dans un gaz animé d'un mouvement „calme" stationnaire, avec une vitesse uniforme c à l'infini; cette hypothèse, qui implique l'omission des termes $\varrho u \frac{\partial u}{\partial x}$ en comparaison avec $\mu \Delta^2 u$, exige que $\frac{\varrho c a}{\mu}$ soit une quantité petite. La solution serait très simple, si le gaz était comprimé à une densité infinie, parce que dans ce cas *div* serait égal à zéro [d'après (11)] et le mouvement serait celui d'un liquide incompressible. Pour trouver les corrections qui résultent de la compressibilité, considérons que la distribution de la densité et aussi des autres variables dépend de la valeur constante de la pression à l'infini, que nous appellerons P. A mesure que $\frac{1}{P}$ s'éloigne de zéro, le mouvement s'écartera du type incompressible. Donc, on pourrait développer toutes les variables en séries d'après les degrés de $\frac{1}{P}$ comme au § 26, ce qui permettrait de décomposer les équations (10, 11, 12) en un système d'équations à approximations progressives. Pour simplifier, nous nous bornerons à la considération de deux termes, en supposant que toutes les variables soient composées de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{lll} u = u_0 + u_1 ; & v = v_0 + v_1 ; & w = w_0 + w_1 ; \\ p = p_0 + p_1 ; & \varrho = \varrho_0 + \varrho_1 ; & \theta = \theta_0 + \theta_1 ; \end{array}\right\} \qquad 57$$

où les premiers termes représentent le type limite d'incompressibi-

lité, les seconds termes les corrections à y ajouter, petites en comparaison avec ceux-là. L'équation (9) donne:

$$\frac{p_0}{\varrho_0} = R\theta_0 \,; \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} + \frac{\theta_1}{\theta_0}. \tag{58}$$

Puisque nous supposons que les variations de la pression, définies par $\frac{\partial p_0}{\partial x}$ etc., sont petites par rapport à p_0 etc., on pourra déduire de l'équation (11), comme première approximation:

$$\mathrm{div}_0 = 0$$

approximation seconde:

$$\varrho_0 \,\mathrm{div}_1 + u_0 \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \varrho_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} = 0. \tag{59}$$

De l'équation (12):

$$u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + k p_0 \,\mathrm{div}_1 = (k-1)\,[\Phi_0 + \varkappa \Delta^2 \theta_0] \tag{60}$$

qui se transforme, eu égard à (59,2) et (58,1), en:

$$\begin{aligned} & u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \Phi_0 = \\ & = \frac{k}{k-1} R \varrho_0 \left[u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right] = -\varkappa \Delta^2 \theta_0 \end{aligned} \tag{61}$$

De l'équation (10) enfin:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial p_0}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_0 \,; \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{div}_1 \,; \\ & \frac{\partial p_0}{\partial y} = \mu \Delta^2 v_0 \,; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \mu \Delta^2 v_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{div}_1 \,; \\ & \frac{\partial p_0}{\partial z} = \mu \Delta^2 w_0 \,; \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} = \mu \Delta^2 w_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \mathrm{div}_1 \,. \end{aligned} \right. \tag{62}$$

L'approximation première est représentée par le système (62,1) qui détermine avec (59,1), le problème analogue de l'Hydrodynamique, dont voici la solution:

$$\left.\begin{aligned}
u_0 &= -\frac{3}{4}\,ca\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{x^2}{r^3} + c\left(1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)\\
v_0 &= -\frac{3}{4}\,ca\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{xy}{r^3}\\
w_0 &= -\frac{3}{4}\,ca\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{xz}{r^3}\\
p_0 &= P - \frac{3\mu}{2}\,\frac{cax}{r^3}
\end{aligned}\right| \qquad (63)$$

Nous en ferons usage pour évaluer les variations de la température d'après (61). Le côté gauche de cette équation a la valeur:

$$u_0\frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0\frac{\partial p_0}{\partial z} = \qquad (64)$$

$$= -\frac{3}{2}\,\mu\,\frac{c^2a}{r^3}\left(1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{9}{2}\,\mu\,\frac{c^2\,a\,x^2}{r^3}\left(1-\frac{5}{4}\frac{a}{r}+\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)$$

$$\Phi_0 = \frac{9}{4}\,\mu\,\frac{c^2a^3}{r^4}\left(3\frac{x^2}{r^2}+\frac{a^4}{r^4}-6\frac{a^2x^2}{r^4}-2\frac{a^4x^4}{r^6}\right) \qquad (65)$$

ce qui démontre que la chaleur provenant de la compression et du frottement intérieur sont des grandeurs du même ordre.

Les équations de la forme (61), appartenant au type „elliptique“

$$\Delta^2\vartheta + u_0\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v_0\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w_0\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = F$$

qui se rencontre souvent dans des problèmes semblables, sont peu étudiées jusqu'à présent. Elles peuvent être intégrées par la méthode laborieuse d'approximations successives, en résolvant les équations

$$\begin{aligned}
\Delta^2\vartheta' &= F\\
\Delta^2\vartheta'' &= F - \left(u_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial x} + v_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial y} + w_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial z}\right)\\
\Delta^2\vartheta''' &= F - \left(u_0\frac{\partial\vartheta''}{\partial x} + v_0\frac{\partial\vartheta''}{\partial y} + w_0\frac{\partial\vartheta''}{\partial z}\right) \text{ etc.}
\end{aligned}$$

et en tenant compte de la condition de surface $\vartheta = \Theta$.

On peut se restreindre à la première approximation, lorsque le coefficient $\frac{caR\varrho_0}{k}$, qui détermine la convergence de la série, est

petit, condition qui ne diffère pas beaucoup, au point de vue quantitatif, de la supposition antérieure d'un mouvement „calme". Dans ce cas, on déduirait la valeur suivante de (61), qui définit l'écart de l'isothermie:

$$\theta_0 = \Theta + \frac{\mu c^3}{32 \varkappa} \left\{ \frac{a}{r} \left[19 + 13 \frac{a^2}{r^2} + 24 \frac{x^2}{r^2} - 39 \frac{x^2 a^2}{r^4} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{3a^3}{r^2} \left[-9 + \frac{3x^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a^4}{3r^4} + \frac{4a^2x^2}{r^4} - \frac{2a^4x^2}{r^6} \right] \right\} \tag{66}$$

En substituant cette valeur dans (58,1), (59,2), on déduit la correction de la pression qui correspond à la compressibilité et à la variabilité de la température. Elle sera très petite, d'ailleurs, en comparaison avec la pression de résistance p, lorsqu'on suppose un mouvement „calme" [1]).

§ 29. Puisque la température s'élève, d'après cette formule, suivant la direction de la normale à la surface, en raison de

$$\left. \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right|_{r=a} = \frac{\mu c^2}{32 \varkappa a} [20 + 111 \cos^2 \varphi], \tag{67}$$

une sphère solide, animée d'une vitesse c dans l'air tranquille devrait s'échauffer de même; l'effet serait plus grand aux „pôles", qu'à „l'équateur"; sa valeur moyenne serait, d'après un calcul approximatif

$$\delta \theta = \frac{57}{32} \frac{\mu c^2}{\varkappa} \tag{68}$$

indépendamment des dimensions de la sphère. La considération des corrections suivantes dans la série ϑ', ϑ'', ϑ''' changerait ce résultat de telle façon que la distribution deviendrait asymétrique, le réchauffement étant plus considérable au pôle „postérieur" qu'à l'„antérieur". Ce résultat, de même que l'excès comparatif de la température à l'équateur, est en accord avec les expériences de Joule et Kelvin [2]) pour de petites vitesses; et la formule (68) s'accorde aussi avec leurs mesures pour des vitesses moyennes, en ce qui concerne l'indépendance de l'échauffement des dimensions du corps

[1]) Voir un calcul analogue approximatif, sans considération de la variabilité de la température: O. E. Meyer. Crelle Journal, 75 (1873).

[2]) Voir § 12, δ.

et la proportionnalité au carré de la vitesse, seulement le coefficient numérique est plus petit $\left[1^{\circ}\text{C. pour } 28 \frac{\text{m}}{\text{sec.}}\right.$, tandis que l'on a 1°C. pour $55 \frac{\text{m}}{\text{sec.}}$ d'après Kelvin$\left.\right]$.

Cependant, on aurait tort de considérer ceci comme une confirmation de la théorie, puisque les conditions de ces expériences s'écartent de beaucoup des suppositions du calcul. Rappelons que $\varrho c a$ doit être petit en comparaison de μ ($= 0{\cdot}00018$) afin que le mouvement soit „calme"; par conséquent les vitesses employées par Kelvin ne seraient admissibles que dans un gaz très raréfié.

§ 30. Nous voyons que l'importance pratique de pareils exemples est limitée assez sérieusement par l'hypothèse du „calme". Un intérêt beaucoup plus considérable s'attacherait aux mouvements „violents" (voir § 6), où d'ailleurs la compressibilité et les phénomènes thermiques jouent un rôle beaucoup plus considérable. Les méthodes approximatives qui pourraient être appliquées à des phénomènes pareils, où l'omission des termes d'inertie ne serait plus justifiée, sont les suivantes:

1) En considérant que le mouvement d'un gaz plus léger [c'est-à-dire ayant un coefficient R plus grand] sera plus rapproché du type „calme", on peut développer toutes les variables en séries de $\frac{1}{R}$, ce qui donne des corrections successives à ajouter aux formules du type limite, d'après un procédé semblable à celui des § 26, 28.

2) Un développement pareil, d'après les degrés de μ, donnerait les corrections à faire dans les résultats se rapportant au type limite du gaz idéal, à cause de la viscosité.

L'avantage de ces méthodes consiste dans la linéarité des équations résultantes, mais leur complication est cependant plus considérable que dans les exemples précédents. En outre, lorsqu'une certaine limite d'inertie est dépassée, par suite de l'augmentation de la vitesse ou de la densité, l'état devient instable et les mouvements „turbulents" prennent naissance.

Nous avons noté, dans les chapitres précédents, quelques cas semblables comme les ondulations fixes dans le jet d'un gaz, et les sons de friction, qui semblent être la cause primaire du son dans les instruments à vent. Il faudrait chercher d'autres méthodes pour le traitement de ces phénomènes, puisque les développements pré-

cédents supposent la continuité des fonctions. Mais nous ne nous occuperons pas ici des problèmes du mouvement visqueux inerte, considérant que dans un cas beaucoup plus simple — dans l'Hydrodynamique des liquides visqueux — les recherches analogues sont à peine abordées et, jusqu'à présent, n'ont fourni que des résultats très insuffisants.

---

14. M. MARIE SMOLUCHOWSKI. **Przyczynek do teoryi endosmozy elektrycznej i niektórych zjawisk pokrewnych.** ***(Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs).*** Mémoire présenté par M. Lad. Natanson m. t.

§ 1. Nous avons été amenés à cette étude par une question concernant la stabilité des solutions colloïdales et des milieux troubles: il s'agissait notamment de savoir si la théorie[1]) qui explique cette stabilité par des forces semblables à celles qui produisent l'endosmose électrique et les courants diaphragmatiques, pouvait être justifiée. Dans ce but, il fallut d'abord généraliser la théorie de ces phénomènes, développée par Helmholtz[2]) pour le cas spécial d'un liquide contenu dans un tube Poiseuille. Nous croyons que cette extension de la théorie en question, pour le cas général, présente en soi-même quelque intérêt d'autant plus que — comme nous le verrons plus loin — les expériences fondamentales de Wiedemann et Quincke dépassaient déjà les conditions où le calcul primitif de Helmholtz est applicable.

Ce qui nous paraît aussi intéressant c'est la comparaison avec la théorie rivale de Lamb[3]), basée sur des hypothèses simplifiées, mais un peu différentes. Toutes les deux donnent des résultats tout-à-fait analogues dans le cas des tubes Poiseuille, mais on aurait pu croire que le cas général présenterait une différence qui permettrait d'arriver à une conclusion. Les résultats définitifs démentent pourtant cet espoir, car l'analogie subsiste toujours; au point de vue

[1]) Proposée par J. J. Thomson et M. Hardy: Proc. Roy. Soc. 66, p. 123 (1900)

[2]) Wiedem. Ann. 7, p. 337 (1879); Ges. Abhandlg. I, p. 855.

[3]) Philos. Mag. 25, p. 52 (1888); elle n'est pas mentionnée dans le résumé, assez bon, des phénomènes analogues dans Winkelmann Handb. III, 1, p. 493, et je n'en ai eu connaissance qu'après avoir trouvé les résultats exposés ci-dessus.

mathématique, on pourrait même considérer la théorie de Lamb comme une spécialisation de notre calcul.

Tel est l'objet principal de ce travail. Nous y ajouterons quelques considérations sur le problème mentionné au commencement, et sur quelques autres phénomènes qui sont en connexion avec cette théorie.

§ 2. On désigne par endosmose électrique un phénomène connu depuis longtemps, étudié surtout par Wiedemann et Freund[1]: le passage d'un liquide par un diaphragme, ou bien par des tubes étroits, des fentes etc., par suite d'un courant électrique qui circule dans la même direction[2]) ou dans la direction inverse.

Si le passage du liquide est interrompu, le vaisseau étant fermé, il s'y établit une différence de pression: agrandissement à la cathode, diminution à l'anode, que nous appellerons pression électroosmotique. Le phénomène inverse, qui sera appelé courant diaphragmatique, consiste dans la production d'une différence de potentiel (respectivement d'un courant électrique) par suite du passage du liquide par des diaphragmes, tubes etc., causé par la pression extérieure.

Ces phénomènes ont été expliqués par Quincke, en considérant la réaction entre le mouvement mécanique du liquide et les couches électriques, étendues sur les parois du vaisseau. Dans le premier cas, la partie positive des couches, du côté de l'électrolyte liquide, mise en mouvement par l'influence du champ électrique extérieur, entraîne le liquide; dans le cas inverse, le mouvement de cette couche produit un courant électrique de convection.

En effet, le calcul de Helmholtz, qui s'applique au mécanisme de ces phénomènes dans des tubes réguliers, à section circulaire et satisfaisant à la formule d'écoulement de Poiseuille, est en accord parfait avec les mesures analogues de Quincke et Dorn[3]), en ce qui concerne leur dépendance des dimensions des tubes, des pressions — respectivement des forces électromotrices et de la conductibilité électrique du liquide. Cet accord, cependant, est lié

[1]) Wiedemann, Pogg. Ann. 87, p. 321 (1852); Freund, Wied. Ann. 7, p. 53 (1879).

[2]) Les directions sont identiques pour l'eau et les électrolytes, inverses p. ex. pour l'huile de térébenthine en contact avec du soufre.

[3]) Quincke, Pogg. Ann. 113, p. 513 (1861); 107 p. 1 (1859), 110 p. 38 (1860); Dorn, Wied. Ann. 9, p. 513 (1880); 10 p. 46 (1880).

à la validité de la loi de Poiseuille, et les tubes plus larges, qui n'y obéissent plus, comme ceux de Clark et de Edlund[1], s'écartent tout-à-fait des formules de Helmholtz. Par conséquent, il nous semble fort risqué d'appliquer les mêmes calculs aux diaphragmes d'argile de Wiedemann (et Freund), qui sont considérés par Helmholtz comme un système de tubes Poiseuille[2].

Leur structure ressemble certainement plutôt à celle d'un tas de petits grains, dont les pores ont une forme très irrégulière, peu semblable aux tubes Poiseuille; et ceci s'applique d'autant plus aux diaphragmes de Quincke, formés de sable, de soufre ou de laque pulvérisés, de retaille d'ivoire, d'étoffes de soie etc. L'application à priori des résultats de Helmholtz n'est pas justifiée dans ces cas. La généralisation indispensable de sa théorie peut être effectuée de la manière suivante.

§ 3. Lorsque le liquide est à l'état normal, en repos, le potentiel électrique φ, qui correspond à l'action des couches superficielles, aura une valeur constante φ_i à l'intérieur du liquide, et la valeur constante φ_a à l'intérieur des parois; il varie brusquement dans les couches de passage, d'épaisseur δ, dans la direction de la normale, mais reste constant dans la direction des tangentes. Par conséquent, la densité électrique

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2},$$

positive du côté de l'eau, négative de l'autre côté, est une grandeur de l'ordre $\frac{1}{\delta^2}$.

Lorsqu'il y aura un champ électrique extérieur, défini par le potentiel Φ, le potentiel total correspondra à la superposition:

$$U = \varphi + \Phi.$$

Puisque les forces mécaniques qui en résultent produisent un mou-

[1]) Clark, Wied. Ann. 2 p. 335 (1877); Edlund, Wied. Ann. 1 p. 184 (1877).

[2]) Le fait qu'ils laissent passer un volume de liquide proportionnel à la pression active, ne prouve rien autre que ceci, c'est qu'on a à faire à un mouvement „lent", où les équations

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \Delta^2 u$$

etc. sont applicables.

vement tangentiel, il faudrait y ajouter encore, pour être exact, un troisième terme V, pour rendre compte de la modification des couches de passage qui se produit par ce mouvement. Nous nous bornerons cependant à l'étude des mouvements „lents" où l'on peut négliger cette réaction du phénomène secondaire sur le phénomène primaire, en comparaison avec φ et Φ. Dans ce cas, on peut négliger aussi l'inertie du liquide, et les équations de l'Hydrodynamique, eu égard aux forces mécaniques $-\varepsilon \nabla U$, seront:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \Delta^2 v - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \Delta^2 w - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Les facteurs $\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ etc. feront naître le mouvement du liquide, tandis que les facteurs $\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ne serviront qu'à produire une pression uniforme dans chaque couche individuelle. Pour éliminer cette partie des forces, qui ne nous intéresse pas, introduisons une grandeur définie [en désignant la distance normale par ζ] par

$$P = p - \int_0^\zeta \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\zeta = p - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)^2 \Big|_\zeta^0. \tag{2}$$

Par conséquent, on aura:

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \tag{3}$$

et d'autre part, en supposant ξ et η dirigés dans les directions tangentes, p. ex. des lignes de courbure:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \zeta};$$

puisque partout $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ est égal à zéro, à cause de l'uniformité de la couche, ce résultat se simplifie et devient:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi}; \text{ et de même } \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta}. \tag{4}$$

En appliquant les équations (1) aux directions ζ, ξ, η, on aura le système:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \mu \Delta^2 v_\zeta - \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \mu \Delta^2 v_\xi - \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} &= \mu \Delta^2 v_\eta - \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{aligned}\right.$$

Pour mettre mieux en évidence la signification de P, dérivons les équations (5) par rapport à ζ, ξ, η, ce qui donne, eu égard à la condition d'incompressibilité et à l'équation $\Delta^2 \Phi = 0$:

$$(6)\qquad \Delta^2 P = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$$

tandis qu'en opérant d'une manière analogue sur les équations (1) on aurait

$$(7)\qquad \Delta^2 p = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial q}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right).$$

Puisque la dérivée $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$ devient zéro à la surface des parois isolantes, le courant électrique ayant une direction tangente, elle aura une valeur de l'ordre δ dans la couche de passage. Nous en concluons ceci: en dehors de la couche, P est identique à la pression hydraulique p; mais, tandis que p subit une variation brusque $\left(\text{de l'ordre } \frac{1}{\delta^2}\right)$ dans ces couches, à cause de la pression électrostatique, la grandeur P en est approximativement dépourvue; il y reste seulement les termes d'ordre plus petit qui ne peuvent produire que des différences finies de P dans les divers points de la couche.

§ 4. Envisageons maintenant les équations $(5, {}_2)$, $(5, {}_3)$ et remarquons que les forces tangentes $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ sont finies, par conséquent les termes de droite ont une valeur de l'ordre $\frac{1}{\delta^2}$, ceux de gauche sont finis. Donc, en multipliant ces équations par ζ et en les intégrant entre les limites 0 et δ, on fera disparaître les termes de gauche:

$$\int_0^\delta \frac{\partial P}{\partial \xi} \zeta d\zeta = 0 \tag{8}$$

pendant que, du côté droit, on obtiendra des quantités finies de la manière suivante:

L'opérateur Δ^2 ne peut pas être remplacé, en général, par

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

puisque nous avons supposé les directions des axes ξ, η, ζ variables, suivant la direction normale à la surface. Mais en tout cas, le terme de l'ordre le plus grand, qui seul entre dans ce calcul, puisque les autres disparaissent par l'intégration, sera $\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \zeta^2}$, $\left(\text{ou } \frac{\partial^2 v_\eta}{\partial \zeta^2} \text{ respectivement}\right)$. Lorsqu'on considère que $\frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta}$ est fini dans la distance δ, et que v_ξ disparaît pour $\zeta = 0$, l'intégration partielle donne par conséquent:

$$\int_0^\delta \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \zeta^2} \zeta d\zeta = \zeta \frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta}\Big|_0^\delta \quad \int_0^\delta \frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta} d\zeta = \delta\left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta}\right)_\delta - v_\xi\Big|_0^\delta = - v_\xi\Big|_0^\delta \tag{9}$$

Dans l'intégrale

$$\int_0^\delta \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \zeta d\zeta,$$

on peut supposer la constance approximative de $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, ce qui donne lieu à un développement semblable:

$$\int_0^\delta \varepsilon \zeta d\zeta = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \zeta d\zeta = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \tag{10}$$

Le résultat définitif est que la vitesse tangente, à la distance δ des parois, aura une valeur finie, notamment:

$$v_\xi = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad v_\eta = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \tag{11}$$

§ 5. Il est évident que les lignes de flux seront approximativement parallèles aux parois; par conséquent, les vitesses normales ne peuvent pas excéder l'ordre de grandeur δ, puisque le flux traversant la couche d'épaisseur δ suivant une direction tangente sera

égal au flux passant par une partie finie de la surface suivant la direction normale. La distribution de ces vitesses et de la pression P sera définie par l'équation de continuité et par (5_1); mais nous n'en aborderons pas la discussion, puisqu'il suffit pour ce qui suit de savoir que la vitesse normale est évanescente par rapport aux vitesses tangentes.

Il est facile maintenant de déterminer la distribution des vitesses dans l'intérieur du liquide. Elles seront définies par les équations:

$$(12)\quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta^2 u\,; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta^2 v\,; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta^2 w\,; \quad \Delta^2 p = 0\,;$$

et par les conditions de surface, correspondant, avec omission de différences infiniment petites, à:

$$v_\zeta = 0\,; \quad v_\xi = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\,; \quad v_\eta = -\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\,;$$

Eu égard aux propriétés de Φ, on en déduit la solution:

$$(13)\quad \left| \begin{array}{l} u = -\dfrac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\,; \quad v = -\dfrac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\,; \\ w = -\dfrac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\,; \quad p = \text{const.} \end{array} \right.$$

C'est à dire que les courants mécaniques seront proportionnels aux courants électriques et auront la même direction, si $\varphi_i - \varphi_a$ est positif.

Cependant, il faut restreindre ce résultat en ce qui concerne les électrodes auxquelles ce calcul, qui suppose des parois isolantes, ne peut être appliqué. D'ailleurs, il mènerait à une conclusion absurde, car il exigerait qu'une quantité $\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\frac{I}{\lambda}$ du liquide [I désignant l'intensité du courant électrique] passe à travers la surface des électrodes. On évite cette difficulté en superposant un mouvement correspondant à une source du liquide $\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\frac{I}{\lambda}$ dans la cathode et un écoulement de la même quantité dans l'anode, avec adhésion complète aux parois. Les vitesses et les pressions qui en résultent, conformément aux problèmes ordinaires de l'Hydrodynamique d'un fluide visqueux, seront désignées par u_0, v_0, w_0, p_0. Donc, le mouvement caractérisé par:

$$\left.\begin{aligned} u = u_0 - \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial x}; \quad v = v_0 - \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial y}; \\ w = w_0 - \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{aligned}\right| \qquad (14)$$

satisfera aux équations fondamentales, aux conditions aux limites pour les parois isolantes, et à la condition de repos à la surface des électrodes; ce sera la solution cherchée [1]).

§ 6. Supposons maintenant, afin d'introduire les conditions qui correspondent aux travaux expérimentaux: un vaisseau sous forme de deux réservoirs, dans lesquels sont plongées les électrodes, avec un conduit resserré quelconque (tube ou diaphragme) qui opposerait une résistance considérable au passage du liquide.

Il faut distinguer deux cas:

α) le liquide a toute liberté d'effluer de l'extérieur dans les réservoirs ou de les quitter, de sorte qu'il n'y peut naître aucune différence de pression, ou

β) les réservoirs sont fermés et le liquide ne peut circuler que dans l'intérieur du vaisseau.

Le premier cas servira à réaliser l'endosmose électrique: la pression p_0 sera évanescente et de même les u_0, v_0, w_0 dans le conduit. Il n'y reste que les expressions (13). La quantité totale du liquide passant par le diaphragme (dans le sens du courant électrique) sera: $M = \int v_n ds$ où l'intégrale s'étend sur tout un profil équipotentiel $\Phi =$ const. dans le conduit, donc:

$$M = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\int\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,ds = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\,I\sigma\,. \qquad (15)$$

Ici σ désigne la conductibilité électrique. Dans le second cas, il y aura, en dehors du courant mentionné, un courant (u_0, v_0, w_0) superposé en sens inverse, animé d'une vitesse telle que la quantité totale du liquide passant devienne égale à zéro:

[1]) On pourrait se demander si les surfaces des électrodes ne pourraient pas donner naissance à des mouvements tangents comme les parois isolantes; mais en tout cas la modification du mouvement qui en résulterait, serait limitée à la proximité des électrodes; d'ailleurs, si les électrodes sont de bons conducteurs, leur surface sera une surface équipotentielle, ce qui ne donne pas lieu à des forces tangentes.

$$0 = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} I\sigma + \int v_{no}\, ds.$$

D'autre part, le passage de cette quantité $\int v_{no}\, ds$, à travers le diaphragme, correspond à une différence de pression p_0, proportionnelle au produit de cette quantité par le coefficient de viscosité, c'est-à-dire que la pression cathodique sera supérieure, à celle qui règne auprès de l'anode, de $p_1 - p_2$ (ce que nous appelons pression électroosmotique):

$$(16) \qquad p_1 - p_2 = -C\mu \int v_{no}\, ds = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} C I \sigma.$$

§ 7. Notons d'abord le fait que la formule générale pour l'endosmose électrique (15) est identique à celle qui a été déduite par Helmholtz pour le cas des tubes Poiseuille, et aussi que sa formule pour la pression électroosmotique est contenue comme cas spécial dans notre résultat général; ce qui devient évident par la substitution de la loi de Poiseuille:

$$C = \frac{8l}{R^4\pi}$$

et de la loi d'Ohm:

$$\sigma I = \frac{R^2\pi(V_2 - V_1)}{l}$$

dans (16), d'où résulte l'équation de Helmholtz:

$$(17) \qquad p_1 - p_2 = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi} \frac{8(V_2 - V_1)}{R^2}.$$

Remarquons aussi que les mesures de Wiedemann et Freund sont en accord parfait avec la formule (15). Elles ont démontré, en effet, la proportionnalité du courant mécanique au courant électrique indépendamment de l'épaisseur ou de la surface du diaphragme; la dépendance de σ est aussi confirmée approximativement pour des solutions de concentrations différentes. On ne peut pas s'attendre à rencontrer une preuve tout à fait exacte, puisque $\varphi_i - \varphi_a$ aussi dépend de la concentration.

D'autre part, la pression électroosmotique est, d'après les expériences de Wiedemann[1], proportionnelle à $\frac{I\sigma d}{\Omega}$, [où d = épais-

[1]) Voir aussi Tereschin, Wied. Ann. 32 p. 333 (1887).

seur. $\Omega =$ surface du diaphragme], ce qui résulte aussi de la formule (16), en considérant que la constante C (définie plus haut) doit être proportionnelle, pour des diaphragmes à structure homogène, à $\frac{d}{\Omega}$.

§ 8. Mais il y a un troisième phénomène, outre ceux-ci, qui est embrassé par notre théorie: celui du transport électrique des petites particules suspendues dans un liquide, phénomène étudié surtout par Quincke [2]).

Imaginons une sphère isolante, plongée dans un liquide, sous l'influence d'un champ électrique homogène. En acceptant la direction de celui-ci comme axe d'un système de coordonnées polaires, nous aurons l'expression suivante du potentiel extérieur Φ:

$$\Phi = -c\,x\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) = -c\cos\theta\left[r + \frac{a^3}{2r^2}\right]. \tag{18}$$

Donc, si la sphère était fixe, elle produirait d'après (13) un mouvement potentiel du liquide environnant dans la direction des lignes de force; la vitesse à grande distance aurait la valeur constante

$$u = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu}\,c. \tag{19}$$

Mais si nous la supposons mobile, dans un liquide sans mouvement, il est évident qu'elle sera poussée avec cette vitesse dans la direction de la cathode vers l'anode. Pour donner une idée de la valeur de cette vitesse, qui est indépendante des dimensions de la sphère, supposons:

$$\varphi_i - \varphi_a = 2 \text{ Volt}, \quad \mu = 0{\cdot}018, \quad c = 1\,\frac{\text{Volt}}{cm};$$

ce qui donne

$$u = 0{\cdot}000093\,\frac{cm}{sec}.$$

C'est justement l'ordre des vitesses des ions dans l'électrolyse, fait curieux, qui pourrait suggérer des spéculations d'ailleurs hasardées.

Les mesures de Quincke mettent en évidence la proportionnalité de u avec la force électromotrice, mais il est à regretter qu'on n'y trouve pas toutes les données nécessaires à une compa-

[2]) Wiedem. Ann. 113 p. 546 (1861).

raison complète avec les expériences. Toutes les substances étudiées par ce physicien se mouvaient vers l'anode dans l'eau, pendant que dans l'huile de térébenthine le sens du mouvement était, pour la plupart, l'inverse (c'est à dire que la différence $\varphi_i - \varphi_a$ avait le signe contraire). En outre, il y avait cette singularité dans des tubes étroits que (l'intensité du courant dans l'eau étant très petite) les particules situées dans la proximité des parois avaient un mouvement inverse qui faisait place cependant au mouvement régulier lorsque le courant augmentait. Le premier fait est explicable par la circonstance que, dans des tubes étroits, il y a (d'après § 6 β) un courant du liquide dirigé vers la cathode près des parois, vers l'anode dans l'axe du tube, courants qui s'ajoutent au mouvement propre des particules. Ceci donnera lieu, en outre, à des mouvements rotatoires qui, en effet, ont été observés par Quincke. Mais la réversion du mouvement par augmentation du courant ne peut être expliquée ni par notre calcul, ni de la manière indiquée par Quincke (loc. cit.). Elle semble dépendre de facteurs secondaires, négligés dans ce calcul, ou d'autres phénomènes qui se manifestent dans des rotations des corps mauvais conducteurs dans le champ électrique[1]).

Dans ces dernières années, des observations nombreuses ont été faites sur ce transport électrique, à propos des recherches sur les milieux troubles, émulsions, solutions colloïdales etc. Spring[2]) a énuméré les difficultés à vaincre pour obtenir une pureté parfaite des solutions (solutions optiquement vides); il trouve que la purification par un courant électrique en est le meilleur moyen.

§ 9. Passons maintenant à la théorie du phénomène inverse; les courants diaphragmatiques. Nous nous bornerons, comme auparavant, à une première approximation: en négligeant cette fois la réaction du champ électrique produit par le mouvement, sur celui-ci. Le calcul sera basé sur l'équation fondamentale des courants stationnaires qui exige dans ce cas que l'ensemble des courants de convection et de conductibilité ne produise pas d'accumulation d'électricité.

[1]) Quincke, Wied. Ann. 59 p. 417 (1896); Schweidler, Sitzgber. Wien. Akad. 106, p. 526 (1857); Heydweiller, Wied. Ann. 69 p. 521 (1899); Graetz, Drudes Ann. 1 p. 530 (1900).

[2]) Bull. de Belg. (1899) p. 174, p. 300.

Puisque le premier terme du potentiel total:

$$U = \varphi + \Phi + V$$

ne produit pas de courant, et que le second est supposé nul dans ce cas, il ne reste que V pour la conduction, de sorte qu'on aura, en employant les symboles vectoriels:

$$\operatorname{div}\left[\frac{1}{\sigma} \nabla V + \varepsilon v\right] = 0 \tag{20}$$

ou sous la forme explicite:

$$\frac{1}{\sigma} \Delta^2 V + \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon v) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon w) = 0$$

ce qui se transforme, grâce à l'équation d'incompressibilité, en

$$\Delta^2 V = -\sigma\left[u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right]. \tag{21}$$

Il en résulte la valeur de V, en considérant que le courant normal à la surface de l'isolateur $\frac{1}{\sigma}\frac{\partial V}{\partial n}$ doit être nul:

$$V = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\sigma}{r}\left[u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right] d\omega. \tag{22}$$

L'expression intégrée ne diffère de zéro que dans la couche superficielle; nous pouvons donc admettre pour élément de volume une couche de surface dS et d'épaisseur $d\zeta$: $d\omega = dS \,.\, d\zeta$, et puisque ε varie dans la direction normale à la surface, on peut écrire:

$$V = \frac{\sigma}{4\pi} \iint \frac{dS}{r} \int v_\zeta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} d\zeta \, dS.$$

Pour des points situés à une distance assez grande en comparaison de δ, l'intégrale peut être développée de la façon suivante:

$$V = \frac{\sigma}{4\pi} \iint \frac{dS}{r} \int v_\zeta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} d\zeta \tag{23}$$

où l'intégration de $d\zeta$ peut être effectuée par opération partielle répétée, en considérant que v_ζ, $\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}$ deviennent zéro à la surface de même $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}$ à des distances supérieures à δ:

$$(24) \qquad 4\pi \int_0^\delta v_\zeta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} d\zeta = -\int_0^\delta v_\zeta \frac{\partial^3 q}{\partial \zeta^3} d\zeta = \int_0^\delta \frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \zeta^2} \frac{\partial q}{\partial \zeta} d\zeta.$$

Considérons maintenant l'équation mécanique formée d'après (5), mais avec Φ égal à zéro:

$$(25) \qquad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \mu \Delta^2 v_\zeta$$

où P satisfait à l'équation $\Delta^2 P = 0$ et, à la surface de la couche, se transforme d'une façon continue en la pression hydraulique ordinaire p. Par conséquent, on peut considérer P comme constant dans l'étendue de la couche δ; d'autre part, en négligeant les termes plus petits, on aura:

$$\Delta^2 v_\zeta = \frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \zeta^2}.$$

Donc, la valeur de l'intégrale (24) sera:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \int_0^\delta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\zeta = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \zeta}.$$

Nous aurons:

$$(26) \qquad V = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \iint \frac{\partial P}{\partial \zeta} \frac{dS}{r}$$

et par suite de $\Delta^2 P = 0$:

$$(27) \qquad V = \sigma \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} P + \text{const.}$$

Donc, la différence du potentiel en deux points de l'intérieur du liquide sera:

$$(28) \qquad V_2 - V_1 = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\mu} \sigma (p_2 - p_1).$$

§ 10. Cette formule aussi paraît identique avec le résultat analogue de Helmholtz, avec cette différence qu'elle ne s'applique pas seulement aux tubes capillaires, mais à des vaisseaux quelconques, où le liquide est animé d'un mouvement lent. En effet, les mesures de Quincke, où la pression et les dimensions des diaphragmes variaient, ont démontré la proportionnalité de la force électromotrice à la pression active et l'indépendance des dimensions du diaphragme. La relation avec σ est indiquée par l'observation

que l'addition de sels ou d'acides diminuait de beaucoup l'effet. Mais les conductibilités n'ont pas été mesurées, ce qui ne permet pas d'utiliser les nombres $\frac{V_2 - V_1}{p_2 - p_1}$ $\left[\text{p. ex. pour le soufre dans l'eau } 10 \frac{\text{Volt}}{\text{atm}}\right]$ pour une détermination de $\varphi_i - \varphi_a$.

Remarquons qu'on ne peut pas appliquer les formules (15), (16) et (28) au cas des mouvements rapides (p. ex. pour des tubes larges), dans lesquels l'effet de l'inertie $\varrho u \frac{\partial u}{\partial x}$ etc., omis dans (1) et (25), est sensible. C'est l'inertie du liquide qui pourrait peut-être expliquer aussi un phénomène singulier d'asymétrie, observé par M. C. Zakrzewski[1]), avec des tubes argentés à l'intérieur. Car ce fait que la différence du potentiel entre la surface argentée et une électrode située auprès du bout du tube capillaire, changeait en valeur absolue, lorsque le sens du courant d'eau était inverti — ce phénomène ressemble à l'asymétrie du mouvement de l'eau dans un cas analogue, la formation d'un jet d'écoulement, qui est causée de même par l'inertie du liquide. D'ailleurs, ces expériences dépassent la portée de notre théorie, parce qu'on ne peut pas considérer la surface argentée comme isolante.

§ 11. Dans le § 1 nous avons mentionné la théorie de Lamb, rivale de celle de Helmholtz. La différence consiste en ce que Lamb n'accepte pas le principe de continuité dans la double couche électrique, mais qu'il la considère comme un condensateur dont les lames, à une distance d, sont couvertes d'une densité superficielle: $\varrho = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi d}$. D'autre part, au lieu de la variabilité continue des vitesses, il suppose un glissement de ces lames avec une vitesse $u = \frac{lX}{\mu}$ sous l'influence d'une force tangente X $\left[\frac{\mu}{l}\right.$ désignant le coefficient de glissement$\left.\right]$.

Ces suppositions, simplifiées (et un peu généralisées), comparées à celles de Helmholtz, lui servent de fondement à des calculs qui mènent à des résultats presque identiques avec (15), (16) et (28), et qui en diffèrent seulement en ce que la valeur $\varphi_i - \varphi_a$ y est

[1]) Bull. de l'Acad. de Cracovie (1900) p. 224.

remplacée par $\frac{l}{d}(\varphi_i - \varphi_a)$. La question de savoir laquelle de ces hypothèses est la plus justifiée, ne peut être tranchée, ni „a priori", ni par des expériences directes, puisque nous ne connaissons ni $\frac{l}{d}$, ni $(\varphi_i - \varphi_a)$, à moins qu'on puisse mesurer la différence de potentiel à l'aide d'une méthode indépendante. Mais si l'on pouvait démontrer, par des mesures faites sur des corps divers, que les valeurs considérées par Helmholtz comme $(\varphi_i - \varphi_a)$, par Lamb comme $(\varphi_i - \varphi_a)\frac{l}{d}$, se rangent dans une série de tension[1]), on serait alors en droit d'accepter un tel fait comme preuve indirecte de la théorie de Helmholtz, puisque en tout cas $\frac{l}{d}$ devrait avoir un caractère plutôt accidentel. On aurait alors, pour déterminer la différence du potentiel de contact entre de mauvais conducteurs, trois méthodes très faciles à appliquer, puisque, l'usage de tubes capillaires n'étant plus indispensable, on pourrait employer ces substances sous forme de diaphragmes (comme Quincke). Une application bien intéressante serait la vérification de l'hypothèse énoncée par Cohn: que le potentiel de contact entre des isolateurs dépend de leurs constantes diélectriques.

§ 12. Revenons encore à l'hypothèse, mentionnée au commencement, qui tâche d'expliquer la stabilité merveilleuse de certaines solutions troubles par les mêmes forces électriques. D'après cette hypothèse, les particules suspendues produiraient en tombant des courants, analogues à ceux des diaphragmes, qui empêcheraient leur mouvement et retarderaient la sédimentation. En effet, la sensibilité extrême de ces solutions pour une augmentation de conductivité, produite par des doses minimes de sels ou d'acides — suffisantes pour précipiter la matière suspendue — semble prêter appui à cette hypothèse. Notre théorie ne peut pas servir à un calcul exact d'un tel phénomène, puisque nous avons négligé la réaction de l'effet secondaire sur la cause primaire, mais on pourra du moins se rendre compte de l'ordre des grandeurs en question. Voici comment on peut raisonner:

[1]) C'est à dire que p. ex. les différences entre les valeurs pour l'eau et l'huile de térébenthine en contact avec d'autres corps seraient toujours les mêmes.

α) Le potentiel V [équation (27)] auprès d'une sphère animée d'une vitesse c dans le liquide, est proportionnel à la pression[1]):

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{3}{2}\,\frac{c\mu\, a x}{r^3}, \\ \text{donc}\quad V &= \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi}\,\frac{3}{2}\,\frac{c\, a\, \sigma x}{r^3} = \frac{3}{2}\,\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\mu}\,\frac{c\, a\, \sigma \cos\theta}{r^2} \end{aligned}\right| \qquad (29)$$

La composante tangente de la force électrique

$$\frac{\partial V}{\partial (a\,\theta)} = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi}\,\frac{3}{2}\,\frac{c\,\sigma \sin\theta}{a^2}$$

produirait, dans un liquide libre, un mouvement défini par les vitesses:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right| \left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi}\right)^2 \frac{c\,\sigma\, x}{\mu\, a^2}\left(1 - \frac{a}{2r^2}\right) \qquad (30)$$

correspondant, pour une grande distance, à la vitesse constante:

$$c' = \left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi}\right)^2 \frac{c\,\sigma}{a^2\,\mu};$$

mais comme le liquide ne peut pas traverser les parois du vaisseau fermé, à sa place une pression électrosmotique prendra naissance:

$$p = \frac{3}{2}\, c'\, \frac{\mu\, a\, x}{r^3},$$

dans la direction opposée au mouvement primaire. Les forces résultantes satisferont à la condition d'équilibre:

$$6\pi\mu\, a\, c\left[1 + \left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi}\right)^2 \frac{\sigma}{a^2\,\mu}\right] = g\,(\varrho' - \varrho)\,\frac{4\, a^3 \pi}{3}. \qquad (31)$$

β) Considérons quelle sera l'énergie W dissipée par le courant électrique correspondant à V. La formule générale

$$W = \iiint \lambda \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\omega$$

[1]) Voir p. ex. Lamb, Hydrodynamics p. 532.

donne la valeur:

$$W = \frac{6\pi c^2 \sigma}{a}\left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi}\right)^2. \tag{32}$$

Puisque cette énergie est produite aux dépens de l'énergie mécanique, il faut ajouter une force convenable à la résistance de friction $\sigma\pi\mu a c$. Il en résulte la même équation que plus haut.

L'expression

$$a = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}$$

détermine la petitesse des particules. En y substituant pour l'eau

$$\sigma = 10^9\,[\mathrm{Hg} = 1] = 1{\cdot}17\,.\,10^{-7}\ [\mathrm{C.\ G.\ S.}]$$

$$\varphi_i - \varphi_a = 2\ \mathrm{Volt} = \frac{2}{300}\ [\mathrm{C.\ G.\ S.}],$$

on aura: $a = 10^{-6}$ cm. Donc cette théorie n'explique pas la stabilité des solutions troubles lorsque les particules sont de grandeur plus considérable, p. ex. de grandeur microscopique; pour des particules de dimensions si petites que ci-dessus, au contraire, la viscosité elle-même suffit à expliquer l'extrême petitesse des vitesses; on a:

$$c = \frac{2}{9}\frac{a^2 g}{\mu}(\varrho - \varrho') = 10^{-8}\,cm\ [\text{pour } \varrho - \varrho' = 1]$$

c'est-à-dire que les particules ne s'abaisseront durant une année que d'un centimètre. L'épaisseur de la couche électrique d n'est peut-être pas négligeable devant de telles dimensions; mais en tout cas, ce raisonnement paraît démontrer que l'hypothèse mentionnée est insuffisante.

§ 13. Notons encore un détail qui n'a pas été observé jusqu'à présent: de même qu'au **§ 12,** *b* on pouvait conclure de l'augmentation de l'énergie dissipée, par le courant diaphragmatique, un agrandissement correspondant de la résistance mécanique, de la même manière on peut conclure (en se basant sur la dissipation de l'énergie mécanique) que l'intensité du courant électrique augmente par suite de l'endosmose électrique. Cette conclusion est mise en évidence par la considération du mécanisme de ce phénomène, qui consiste dans la production d'un courant électrique de convection dans les couches superficielles. Nous avons l'intention de con-

sacrer une étude spéciale à ce phénomène, qui peut jouer un rôle important dans les mauvais conducteurs.

§ 14. La portée de ces phénomènes n'est pas restreinte aux cas discutés plus haut; mentionnons encore quelques sujets qui mériteraient d'être soumis à une étude expérimentale.

D'abord c'est l'électrisation par friction, dont nous voyons ici le mécanisme dans le cas le plus simple; cette remarque a déjà été faite par Helmholtz. Il est probable que l'explication d'autres cas, p. ex. du frottement des corps solides sera analogue. Ces théories s'appliquent aussi aux gaz: d'après Quincke, de petites bulles d'air, d'hydrogène etc. sont conduites vers l'anode. Il est probable que le phénomène inverse est présenté par l'électricité des chutes d'eau [d'après Lenard][1]) et par la méthode de Kelvin[2]) d'électriser l'air en le faisant passer en bulles par l'eau. L'air peut jouer aussi le rôle de fluide conducteur, comme dans les tubes Geissler et Crookes; dans ce cas, on devrait trouver le phénomène de la pression électroosmotique: une différence de pression entre la cathode et l'anode, qui pourrait être mise en évidence, lorsqu'il s'agit de raréfactions très grandes[3]). D'autre part, il y a des phénomènes analogues au transport électrique, comme l'épuration de l'air des poussières, fumées etc., par des décharges électriques, qui manifestent une polarité marquée.

[1]) Wiedem. Ann. 46 p. 584 (1892).

[2]) Proceedings Roy. Soc. 57 p. 335 (1895).

[3]) Des observations pareilles ont été faites p. ex. par Séguy. Comptes Rendus 127, p. 385 (1898).

15. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau les dernières publications de la Classe:

M. Federowski. „Lud białoruski na Rusi Litewskiej". Materyały do etnografii słowiańskiej zgromadzone w latach 1877—1894. Tom II. Baśnie, powieści i podania ludu z okolic Wołkowyska, Słonima, Lidy, Nowogródka i Sokółki. Część II. Tradycye historyczno-miejscowe, oraz powieści obyczajowo-moralne. *(Les Blancs-Ruthènes de la Ruthénie lithuanienne; Contribution à l'Ethnographie Slave. Résultats de recherches effectuées en 1877—1894. Second Volume, deuxième partie).* 8-o, p. 314.

Katalog literatury naukowej polskiej, wydawany przez Komisyę bibliograficzną Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Tom II. Rok 1903, zeszyt III. *(Catalogue of Polish Scientific Literature, vol. II., fasc. III. 1903).* 8-o, str. 47—65.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

29 Kwietnia 1903.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise

(Spółka wydawnicza polska)

à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 10 k. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Jagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI. XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 6 k. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol. VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 k. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski 4 k. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674—1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo, 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol I. II. IV. V épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in-fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo. 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

N° 4. 12,229 AVRIL 1903.

BULLETIN INTERNATIONAL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE :

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR : S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. STANISLAS SMOLKA.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de **M. Ladislas Natanson,**
Membre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 4. **Avril** **1903.**

Sommaire: 16. M. ROMAIN GUTWIŃSKI. De algis, praecipue diatomaceis a Dre J. Holderer anno 1898. in Asia centrali atque in China collectis.
17. M. BRONISLAS PAWLEWSKI. Sur une nouvelle synthèse directe du α-phénylbenzimidazole.
18. M. ROMAIN ZAŁOZIECKI. Sur la nitration des fractions du pétrole de la Galicie dont le point d'ébullition est peu élevé.

Séance du lundi 6 Avril 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

16. M. ROMAIN GUTWIŃSKI. **De algis, praecipue diatomaceis a Dre J. Holderer anno 1898. in Asia centrali atque in China collectis.** Mémoire présenté par M. J. Rostafiński m. t.

(Accedit tabula duplex IX.)

Dr. J. Holderer Asiam a mari Caspio usque ad Schang-hai peragravit permultaque vitra cum algarum speciminibus in Tartaria orientali, in occidentali parte vastitatis Gobi, in Tibete orientali atque in China collecta professori W. Schmidle Mannheimio dedit. Quae specimina ille cum scrutatus esset et 22 species, quarum 12 ad Chlorophyceas, 9 ad Cyanophyceas et 1 ad Desmobacteria pertinent, in „Hedwigia" Vol. XXXIX, pag. 141—143. sub titulo: „Einige von Dr. Holderer in Centralasien gesammelten Algen" publicavisset, algarum specimina supra commemorata benevolentissime mihi communicavit.

Itaque mihi propositum erat, Diatomaceas, quae in speciminibus copiose aderant, scrutari. In has scrutandas summo cum studio animum intendi. nam — quamquam de algarum flora Asiae (insulis australibus exclusis) auctores [1]): Boldt, Brun et Tempère, Dickie, Edwards, Ehrenberg, Gomont, Greville, Grunow, Gutwiński, Harvey, Hirn, Hutton, Kozłowski,

[1]) Vide: Bibliographiam apud: De-Toni, Sylloge algarum, Nordstedt: Index Desmidiacearum et Just: Jahresberichte.

Lagerheim. Lütkemüller, Petit. Roy et Bisset, Schaarschmidt-Istvanffi, Schmidle. Schwarz, Suringar. Turner, W. West et G. S. West scripserunt, tamen flora algarum Asiae centralis nondum satis nota est [1].

Cum autem eas minutas algas scrutaturus specimina diligentissime perquirere coactus eram, factum est, ut praeter 150 Diatomaceas etiam 16 Chlorophyceas, 6 Cyanophyceas et 2 Flagellatas a W. Schmidle in libello prima dissertatione a nobis citato non commemoratas invenerim.

Designatio speciminum non est subtilis, quod dolendum est; Dr. J. Holderer tamen in litteris die 24. Februarii c. a. ad me datis mihi has algas parvis in stagnis et locis palustribus collectas esse communicavit. Ita nempe:

a) ad Dscham, quae in Tartaria orientali sita, ad orientem ab Aksu vergit; ca. 900 *m* s. m. die 14. III;

b) inter Jagniabad et Bugur, quae ab Kutscha ad orientem vergunt; ca. 900 *m* s. m. die 27. III;

c) in Kurlja, ad flumen Kontsche-Darja in planitie fluvii Oechardes (Tarim) sita; ca. 830 *m* s. m. die 2. IV;

d) ad Tawelgu, quod ab Karaschar inter septentriones et orientem solem spectat et ad flumen ex septentrionibus in lacum Bagrasch-kul exeuntem situm est; die 5. IV;

e) inter Toksun et Dadun; die 12. IV;

f) ad Süngüm, quae ad orientem ab Turfan spectat; die 17. IV;

g) ad Pitschan; die 19. IV;

h) ad Astün inter Turfan et Chami; die 27. IV;

i) in margine vastitatis Gobi ad Chami; ca. 840 *m* s. m. die 2. V;

k) in Gobi, ad stationem in Krmaktschi; die 8. V;

l) in media parte Gobi; ca. 1900 *m* s. m.; die 14. et 17. V;

m) in parte meridionali Gobi, inter Chami et Soutschou; die 21. V;

n) ante Pingfan, ca. 600 *m* s. m. in Nanschan orientali; die 4. VII;

o) inter Tungfanye et Pingkouye ca. 600 *m* s. m.; die 8. VII;

p) in regione, quae 73 *km* a media parte litoris meridionalis lacus Kukunor inter occasum brumalem et meridiem spectat; die 4. IX;

r) in margine septentrionali montium Semenow, ca. 3.900 *m* s. m; die 8. IX;

[1]) Cfr. K. E. Hirn, Einige Algen aus Central-Asien. Öfversigt af Finska Vet.-Soc. Förhandlingar. B. XLII. 1900.

s) in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali; die 4. XI;

t) ad Tsin-ning, quod inter Mintschou et Ping-liang-fu in occidentem a Sin-gan vergit; die 9. XII.

Propter mancam designationem speciminum subtiliorem descriptionem locorum, quibus algae collectae erant, construere non potui. Verisimilem altitudinem supra mare nonnulorum supra citatorum locorum ex chartis geographicis, quibus Dr. Holderer in itinere usus erat quasque mihi miserat, deliberavi; quae vero ad naturam regionum, quas ille peragraverat, pertinent, ea benevolentissimus lector in opere Dris. K. Futterer, quod „Durch Asien" inscribitur Berolinique anno 1901. editum erat, invenire potest.

Class. Chlorophyceae (Kuetz. ex parte) Wittr.

Ordo Confervoideae (Ag.) Falk.

Fam. Ulotrichiaceae (Kuetz.) Borzi em.

Gen. Hormiscia Fries.

1. *H. zonata* (Web. et Mohr.) Aresch. var. *inaequalis* (Kuetz.) Rabenh., De-Toni Sylloge algarum Vol. I, pag. 163.

Lg. cell. = 13 μ — 20 μ; lat. cell. = 20 μ — 40 μ

Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.

Ordo Siphoneae Grev. em.

Fam. Vaucheriaceae (Gray) Dum.

Gen. Vaucheria DC.

2. *V. De-Baryana* Wor. J. Götz, Zur Systematik der Gattung Vaucheria pag. 45—47. fig. 51—55.

var. *Schmidlei* nov. var. Tab. nostra IX. fig. 1.

Typo crassior, thallo dense intricato sparse ramoso, saepe dissepimentis transversis in cellulas breviores et longiores diviso; fructificatio semper terminalis (rarissime in ramis brevibus lateralibus); oogoniis semper binis, rarius singulis aut ternis, antheridio singulo. Oogonia ovalia, aut semicirculari elliptica uno latere recta aut lenissime concava, obtuso brevique rostellata. Antheridia iisdem formae typicae (Götz l. c. fig. 51. et 55.) identica, sed orificiis fere ut apud *Vaucheriam geminatam* (Götz l. c. fig. 45.) positis.

Crass. fil. thal. = 48 μ — 55 μ — 68 μ — 74·8 μ — 84 μ

Long. oogon. = 94 μ — 110 μ — 114 μ — 121 μ — 128 μ — 130 μ — 147 μ

Lat. oogon. = 81 μ — 108 μ — 99 μ — 99 μ — 99 μ — 103 μ — 108 μ

Oosporae 90 μ crassae, 112 μ longae.

Crass. anther. = 37 μ — 51 μ, in apice ipsa = 66 μ.

Hab.: Inter Toksun et Dadun. 12. IV. 1898.

Varietas a nobis descripta atque delineata medium locum inter *V. geminatam* (Vauch.) DC. et *V. De-Baryanam* Wor. tenet, ut ex comparatione figurarum nostrarum cum iisdem a J. Götz. l. s. c. in „Flora oder Allgem. bot. Zeitung" 1897. 83. Volum. München 1897. pag. 42., 43., atque pag. 46. et 47. delineatis facile appareat. Oogoniarum forma etiam ad *Vaucheriam racemosam* (Vauch.) DC., *V. terrestrem* Lyngb. atque *V. hamatam* (Vauch.) DC. spectat, sed forma antheridiorum planissime cum figuris apud J. Götz l. c. pag. 46. fig. 51. atque pag. 47. fig. 55. varietas nostra congruit.

Ordo Protococcoideae (Menegh.) Kirchn.

Fam. Palmellaceae (Decaisn.) Naeg. em.

Gen. Scenedesmus Meyen.

3. *S. quadricauda* (Turp.) Bréb.

Hab: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

4. *S. obliquus* (Turp.) Kuetz.

Hab: Ad Chami in extrema vastitate Gobi.

Ordo Conjugatae (Link.) De-By.

Fam. Zygnemaceae (Menegh.) Rabenh.

Gen. Spirogyra Link.

5. *S. Spreciana* (Rabenh.) P. Petit, Spirogyra, pag. 7. Tab. I, fig. 7—9.

Cell. veg. lat. = 18 μ, lg. = 81 μ — 125 μ — 136 μ

Zygotae „ = 33 μ, lg. = 73 μ.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem ad Krmaktschi. 8. V, 1898. (tantum pauca specimina zygotifera vidi).

6. *S. catenaeformis* (Hass.) Kuetz., P. Petit, l. c. pag. 17. Tab. III, fig. 9—12.

Cell. veg. lat. = 19·8 μ — 22 μ, lg. = 66 μ — 70 μ — 81 μ — 122 μ 132 μ

Cell. fructif. lat. = 38 μ, lg. = 88 μ

Zygotae „ = 28·6 μ — 30 μ — 31 μ, long. = 55 μ — 59 μ — 61 μ.

Taenia chlorophyl. 1, anfractibus: 3, 4, 4·5—5.
Hab: Cum specie antecedenti 8. V, 1898. (tantum pauca specimina zygotifera observavi).

7. *S. Lutetiana* P. Petit, Spirogyra. pag. 21. Tab. IV, fig. 9—13.
Cell. veg. lat. = 35 μ, long. = 88 μ
Zygotae lat. = 41·8—44 μ — 44 μ — 44 μ — 44 μ — 44 μ
„ long. — 74·8 μ — 92 μ — 74·8 μ — 83·6 μ — 62 μ
Taenia chloroph. 1, anfractibus 3—3½ - 4.
Hab.: In valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali, 4. XI. 1898.
(Inter specimina sterilia unum tantum specimen zygotiferum observavi, sed zygotae copiosae erant.)

Fam. Desmidiaceae (Kuetz.) De By.

Gen. Closterium Nitzsch.

8. *C. lanceolatum* Kuetz., Ralfs Brit. Desm. Tab. XXVIII. fig. 1.
Long. = 403 μ, lat. = 48 μ, lat. apic. = 4·4 μ.
Hab.: In Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye.

9. *C. Pritchardianum* Archer., Schmidle Alpine Algen, pag 10. Tab. XVI, fig. 19. Tab. nostra IX. fig. 2.
Long. = 436 μ, lat. = 42 μ, lat apic. = 4·4 μ — 6·6 μ.
Hab.: Ad Tawelgu.

10. *C. spec.?* inter *Lunula* et *moniliferum* Tab. nostra IX. fig. 3.
Long. = 286 μ, lat. = 48·4 μ, lat. ap. = 8·8 μ.
Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

11. *C. moniliferum* (Bory) Ehrenb., Klebs Desm. Ostpr. Tab. I. fig. 4 c et 8 b.
Long. = 264 μ, lat. = 44 μ; lat. apic. = 4·4 μ.
Hab.: Cum specie antecedenti, et cum *Cystopleura Zebra* var. *Porcellus* [vide: Nr. 159].

Gen. Tetmemorus Ralfs.

12. *T. granulatus* Ralfs.
Long. = 205 μ, lat. = 42 μ, incis. mediana = 40·7 μ, apic. = 22 μ.
Hab.: In Nanschan orientali ad Pingfan.

Gen. Disphinctium Naeg.

13. *D. tumens* (Nordst.) Hansg., De-Toni l. c. pag. 892. Tab. nostra IX. fig. 4.

Long. = 57 μ, lat. = 37 μ, lat. isth. = 22 μ, crass. cell. = 31 μ.
Hab.: In Nanschan orientali ad Pingfan.

Gen. Cosmarium Corda.

14. *C. Meneghinii* Bréb.
Hab.: In margine septentrionali montium Semenow. (Unam semicellulam observavi!)

15. *C. Botrytis* (Bory) Menegh. Tab. nostra IX. fig. 5.
Long. = 53 μ, lat. = 46 μ, lat. isth. = 13·2 μ, apex = 19·8 μ; crass. cell. = 26·4 μ.
Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja.

16. *C. tetraophthalmum* (Kuetz.) Bréb.
Long. = 66 μ, lat. = 53 μ, lat. isth. = 18 μ, apex = 15 μ — 18 μ.
Hab.: (In vitro designatione et Nro carente!)

Class. Bacillarieae Nitzsch.

Ordo. Rhaphideae H. L. Smith.

Fam. Naviculaceae (Kuetz.) Heib. p. p.

Gen. Navicula Bory.

17. *N. major* Kuetz. V. Heurck, Synopsis. Tab. V, fig. 3—4.
Hab.: In planitie fluvii Oechardes (Tarim) ad Kurlja.

18. *N. viridis* (Nitzsch) Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. V, fig. 5.
Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi.
var. *commutata* Grun. in V. Heurck, l. c. Tab. V, fig. 6.
Hab.: Cum forma typica, etiam inter Jagniabad et Bugur atque ad marginem septentrionalem montium Semenow.

19. *N. borealis* (Ehrenb.) Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. VI, fig. 3.
Hab.: Inter Jagniabad et Bugur.

20. *N. Brebissonii* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. V, fig. 7.
Hab.: Cum specie antecedenti; etiam in planitie Tarim ad Kurlja, ad Chami in extrema vastitate Gobi, in Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye, atque ad Tsin-ning.
var. *subproducta* Grun. V. Heurck, l. c. fig. 9.
Hab.: Cum typo ad Tsin-ning.
var. *angusta* Grun. Naviculaceae, Wien. Verh. 1860, pag. 519. Tab. (3) V, fig. 18.
Hab.: In planitie Tarim ad Kurlja.

21. *N. mesolepta* Ehrenb. V. Heurck, l. c. Tab. VI, fig. 11.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi.

22. *N. oblonga* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 1.
Hab.: Ad Kurlja in planitie Tarim; ad marginem septentrionalem montium Semenow.

23. *N. cincta* (Ehrenb.) Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 14.
Hab.: Ad Tsin-ning.
var. *Heufleri* Grun., Naviculaceae. Wien. Verh. 1860. Tab. (1) III, fig. 32. et V. Heurck. l. c. Tab. VII, fig. 15.
Hab.: Inter Jagniabad et Bugur; ad Süngüm; inter Tungfanye et Pingkouye in Nanschan orientali; atque ad Tsin-ning.

24. *N. gracilis* Kuetz., Grun. Naviculaceae. l. c. Tab. 2. fig. 27, V. Heurck. l. c. Tab. VII, fig. 7—9.
Hab.: Ad Tawelgu; ad Donkyr in Nanschan orientali.

25. *N. angustata* Sm., A. Schmidt, Atlas. Tab. XLVII, fig. 23.
Hab.: Ad marginem septentrionalem montium Semenow.

26. *N. radiosa* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 19. et 20.; Grun. Naviculaceae. Tab. (3) V, fig. 19.
Hab.: Ad Kurlja in planitie Tarim; ad Süngüm; ad Astün inter Turfan et Chami; in vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.
var. *acuta* (W. Sm.) Grun. V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 19.
Hab.: Ad Tsin-ning.

27. *N. viridula* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 25. et 26.
Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Tarim; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

28. *N. rhynchocephala* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 31.; Grunow, Naviculaceae. Tab. (2) IV, fig. 31 b.
Hab.: Inter Jagniabad et Bugur; ad Tawelgu (hic specimina cum iis in A. Schmidt. Atlas, Tab. XLVII, fig. 31. delineatis congrua!); inter Toksun et Dadun; ad Chami in extrema vastitate Gobi; ad Tsin-ning.
var. *amphiceros* (Kuetz.) Grun. V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 30.
Hab.: Inter Toksun et Dadun.
var. *brevis* Grun., Naviculaceae l. c. Tab. (2) IV, fig. 31 c.
Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Tarim; inter Toksun et Dadun; ante Pingfan in Nanschan orientali et inter Tungfanye et Pingkouye.
var. *dubia* Grun. Naviculaceae l. c. Tab. (2) IV, fig. 32.

Hab.: In Dscham.

var. *elongata* Grun. l. c. fig. 31 a.

Hab.: Inter Toksun et Dadun; in Nanschan orientali — ante Pingfan.

var. *rostellata* Grun. V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 24.

Hab.: Ad Chami in extrema vastitate Gobi.

29. *N. cryptocephala* Kuetz., Grun. Naviculaceae Tab. (2) IV, fig. 28. a et b.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes (Tarim); ad Donkyr in Nanschan orientali; ad Tawelgu; ad Süngüm; in Nanschan orientali ante Pingfan atque inter Tungfanye et Pingkouye; etiam ad Tsin-ning.

var. *intermedia* V. Heurck, l. c. Tab. VIII, fig. 10.

Hab.: Ante Pingfan in Nanschan orientali; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

30. *N. hungarica* Grun. var. *humilis* (Donk.) Grun., V. Heurck, l. c. Tab. XI, fig. 23.

Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja; ad Tawelgu; ad Chami in extrema vastitate Gobi.

31. *N. digito-radiata* (Greg.) Ralfs, V. Heurck, l. c. Tab. VII, fig. 4.

Hab.: In Dscham (copiose!); ad Tawelgu; inter Tungfanye et Pingkouye in Nanschan orientali.

32. *N. Gastrum* Ehrenb. V. Heurck, l. c. Tab. VIII, fig. 27.

Hab.: Ad marginem septentrionalem montium Semenow.

33. *N. Placentula* (Ehrenb.) Kuetz. V. Heurck. l. c. Tab. VII. fig. 28.

Hab.: Ad Tawelgu; ad marginem septentrionalem montium Semenow; in Dscham; ad Donkyr in Nanschan orientali.

var. *subsalsa* Grun. V. Heurck, l. c. Tab. VIII, fig. 31.

Hab.: Ad Tawelgu cum typo; ad Chami in extrema vastitate Gobi.

var. *anglica* (Ralfs) Grun. V. Heurck, l. c. Tab. VIII, fig. 30.

Hab.: In vastitate Gobi; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

34. *N. lanceolata* Kuetz. Grun. Naviculaceae Tab. (2) IV, fig. 26.

Hab.: Ad Donkyr atque ante Pingfan in Nanschan orientali; inter Toksun et Dadun; ad Süngüm.

35. *N. dicephala* Ehrenb., V. Heurck, l. c. Tab. VIII, fig. 34.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

36. *N. elliptica* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. X, fig. 10 (inferior).
Hab.: In Dscham; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in vastitate Gobi; ad Donkyr et inter Tungfanye et Pingkouye in Nanschan orientali; ad marginem septentr. montium Semenow.
forma *inflata* nob. **Tab. nostra IX.** fig. 6.
Forma elliptico-oblonga, medio paulo inflata ibique 22 μ. lata, striis non punctatis distantioribus ca. 9 in 10 μ.; 62 μ. longa.
Hab.: In Dscham cum typo.
var. *oblongella* Grun. Naviculaceae. l. c. Tab. (2) IV, fig. 4.
Hab.: Ad Süngüm.
37. *N. ovalis* Hilse. Cleve. Diatom. of Finland. Tab. II. fig. 13.
Hab.: In Dscham.
38. *N. Tuscula* Ehrenb. V. Heurck l. c. Tab. X. fig. 14. sed apices non tam distincte capitati!
Hab.: Ad Tawelgu.
39. *N. pusilla* W. Sm. (*N. gastroides* Greg.) V. Heurck l. c. Tab. XI, fig. 17.
Long. = 44 μ., lat. = 24 μ.; striae tantum 5 in 10 μ.
Hab.: In regione, quae 73 *km* a media parte litoris lacus Kukunor inter occasum brumalem et meridiem spectat.
40. *N. cuspidata* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. XII, fig. 4.
Hab.: In vastitate Gobi, inter Chami et Soutschou; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.
41. *N. ambigua* Ehrenb. V. Heurck, l. c. Tab. XII. fig. 5.. Grun. Naviculaceae Tab. (2) IV. fig. 33.
Hab.: In Dscham et in vastitate Gobi: ad stationem in Krmaktschi et inter Chami et Soutschou.
42. *N. sphaerophora* Kuetz.. Grun. Naviculaceae l. c. Tab. (2) IV. fig. 34.
Hab: Inter Jagniabad et Bugur; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.
43. *N. exilis* Kuetz.. Grun. Naviculaceae l. c. Tab. (2) IV. fig. 30; V. Heurck l. c. Tab. XII. fig. 12.
Hab.: In Dscham; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.
44. *N. amphisbaena* Bory. V. Heurck l. c. Tab. XI. fig. 7.
Hab.: Inter Jagniabad et Bugur: in planitie fluvii Oechardes ad Kurlja; ad Tawelgu.
45. *N. limosa* Kuetz.. V. Heurck l. c. Tab. XII. fig. 13.

Hab.: In Nanschan orientali ad Donkyr; ad Chami in extrema vastitate Gobi.

46. *N. gibberula* Kuetz. (*N. limosa* Kuetz. var. *gibberula* Grun. l. c. Tab. (3) V, fig. 8. a. et *N. limosa* Kuetz. var. *truncata* Grun. l. c. Tab. (3) V, fig. 8. c et fig. 10]. De-Toni, Sylloge algarum. Vol. II, pag. 148.

Hab.: In Dscham; inter Jagniabad et Bugur; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in Nanschan orientali: ante Pingfan atque inter Tungfanye et Pingkouye.

47. *N. Iridis* Ehrenb.

var. *amphirhynchus* (Ehrenb.) De-Toni l. c. pag. 154. A. Schmidt, Atlas, Tab. XLIX, fig. 28., V. Heurck, l. c. Tab. XIII, fig. 5.; Grun. Naviculaceae Tab. (2) IV, fig. 35. et Tab. (3) V, fig. 5.

Hab. Inter Jagniabad et Bugur; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in vastitate Gobi inter Chami et Soutschou atque ad stationem in Krmaktschi.

var. *affinis* (Ehrenb.) V. Heurck, l. c. Tab. XIII, fig. 4. Grun. l. c. Tab. (2) IV, fig. 2.

Hab.: Inter Jagniabad et Bugur; ad Kurlja.

48. *N. firma* Kuetz., A. Schmidt, Atlas XLIX, fig. 3., 14.

Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja.

var. *subampliata* Grun. A. Schmidt, Atlas Tab. XLIX, fig. 19.

Hab.: Cum typo ad Kurlja.

49. *N. Bacillum* Ehrenb., Grun. Naviculaceae l. c. Tab. (2) IV, fig. 1; V. Heurck, l. c. Tab. XIII, fig. 10.

Hab.: In Dscham; ad Tawelgu; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

50. *N. Pupula* Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. XIII, fig. 15.

Hab.: In Dscham; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; ad Tsin-ning.

51. *N. cocconeiformis* Greg., Grun. Naviculaceae Tab. (3) IV, fig. 9.

Hab.: Ad Süngüm.

52. *N. Rostellum* Grun. Naviculaceae Tab. (2) IV, fig. 10.

Hab.: In vastitate Gobi; ante Pingfan et ad Donkyr in Nanschan orientali.

53. *N. atomoides* Grun., V. Heurck l. c. Tab. XIV, fig. 13. a.

Hab.: In valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

54. *N. contenta* Grun., V. Heurck l. c. Tab. XIV, fig. 31. a. (*N. trinodis* Grun.).

Hab.: Eodem loco cum specie antecedenti.

55. *N. minuscula* Grun., V. Heurck l. c. Tab. XIV, fig. 3.
Hab.: Inter Toksun et Dadun; inter Tungfanye et Pingkouye in Nanschan orientali; atque ad Tsin-ning.

Gen. Stauroneis Ehrenb.

56. *S. Phoenicenteron* (Nitzsch) Ehrenb., V. Heurck l. c. Tab. IV, fig. 1.
Hab. Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.
var. *lanceolata* (Kuetz.) Brun., De-Toni Sylloge pag. 204.
Hab.: Cum typo.

57. *S. anceps* Ehrenb. var. *amphicephala* (Kuetz.) V. Heurck l. c. Tab. IV, fig. 6.
Hab.: In regione, quae 73 *km* a media parte litoris meridionalis lacus Kukunor inter occasum brumalem et meridiem spectat.

Gen Pleurostauron Rabenh.

58. *P. Legumen* (Ehrenb.) Rabenh. (*Stauroneis Smithii* Grun., V. Heurck l. c. Tab. IV, fig. 10).
Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja.

Gen. Pleurosigma W. Sm.

59. *P. attenuatum* (Kuetz.) W. Sm. V. Heurck l. c. Tab. XXI, fig. 11.
Long. = 224 μ, lat. = 28·6 μ, lat. apic. = 9 μ; striae longitud. 9 in 10 μ, transversales 12 in 10 μ.
Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes: ad Donkyr in Nanschan orientali.

60. *P. acuminatum* (Kuetz.) Grun. V. Heurck l. c. Tab. XXI, fig. 12.
Hab.: Inter Jagniabad et Bugur; ad Kurlja; Tawelgu; Süngüm; inter Chami et Soutschou; in Gobi; in Nanschan orientali: ad Donkyr et inter Tungfanye et Pingkouye; ad marginem septentrionalem montium Semenow; etiam in regione, quae 73 *km* a media parte litoris meridionalis lacus Kukunor inter occasum brumalem et meridiem spectat, atque ad Tsin-ning.

Gen. Frustulia Ag.

61. *F. rhomboides* (Ehrenb.) De-Toni, Sylloge pag. 277, var. *saxonica* (Rabh.) De-Toni (= *Navicula crassinervia* Bréb.).

Long. = 62 μ — 66 μ, lat. = 11 μ — 15 μ, lat. apicum = 2·2 μ — 4·4 μ.

Hab.: Inter Toksun et Dadun; in vastitate Gobi.

62. *F. viridula* (Bréb.) De-Toni l. c. pag. 278.

Long. = 44 μ, lat. = 9 μ; striae ad 14 in 10 μ.

Hab.: [In vitro signatura et Nr. carente!]

63. *F. vulgaris* (Thwait.) De-Toni. l. c. pag. 280, V. Heurck l. c. Tab. XVII, fig. 6.

Hab.: Ad Süngüm; inter Tungfanye et Pingkouye in Nanschan orientali; etiam ad Tsin-ning.

Gen. Mastogloia Thwait.

64. *M. Smithii* Thwait. var. *amphicephala* Grun., V. Heurck, l. c. Tab. IV, fig. 27.

Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja.

65. *M. Danseii* Thwait. V. Heurck l. c. Tab. IV, fig. 18.

Hab.: Inter Jagniabad et Bugur; etiam in regione, quae 73 *km* a media parte litoris meridionalis lacus Kukunor inter occasum brumalem et meridiem spectat.

66. *M. Braunii* Grun. var. *pumila* Grun., V. Heurck l. c. Tab. IV, fig. 23.

Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.

Fam. Amphitropidaceae (Pfitz.) De-Toni ampl.

Gen. Amphiprora Ehrenb.

67. *A. paludosa* W. Sm. De-Toni l. c. pag. 331. Schumann, Preussische Diatomaceen, Königsb. Schrift. 1863. pag. 190. Tab. IX, fig. 56.

var. *Holdereri* nov. var. Tab. nostra IX. fig. 7.

A typo differt valvarum apicibus protractis, subcapitatis, carina validius sigmatoidea (Cfr. figuram Schumanni l. c.); membrana connexiva in longitudinem lineis sigmatoideis (non rectis) donata, striis transversis alarum confertioribus; lineis intermediis undulato-fractis.

Long. = 62 μ, lat. later. connectivalis = 33 μ, lat. constrictionis medianae 18 μ.

Hab.: In vastitate Gobi; inter Jagniabad et Bugur atque in Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye.

Fam. Cymbellaceae (Kuetz.) Grun.

Gen. Cymbella Ag.

68. *C. Ehrenbergii* Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 2.
Hab.: In Dscham.

69. *C. cuspidata* Kuetz. A. Schmidt, Atlas Tab. IX. fig. 53.
Hab.: In regione, quae 73 *km* a media parte litoris meridionalis lacus Kukunor inter occasum brumalem et meridiem spectat.
var. *naviculiformis* Auersw. V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 5.
Hab.: In Dscham; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

70. *C. amphicephala* Naeg. A. Schmidt. Atlas Tab. IX, fig. 66.
Hab.: In Dscham.

71. *C. subaequalis* Grun. V. Heurck l. c. Tab. III, fig. 2.
Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.

72. *C. obtusa* Greg. V. Heurck Tab. III, fig. 1.
Hab.: In valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

73. *C. delicatula* Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. III, fig. 6.
Hab.: Ad Tawelgu.

74. *C. levis* Naeg. V. Heurck l. c. Tab. III, fig. 7. [et *C. gracilis* var. *laevis* Kuetz V. Heurck l. c. fig. 1. b.]
Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.

75. *C. affinis* Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 19.
Hab.: In Dscham; inter Jagniabad et Bugur; ad Tawelgu. (Observatio: Hic specimina cum fig. 38*. Tab. IX in A. Schmidt, Atlas delineata plane congrua!): in vastitate Gobi inter Chami et Soutschou.
var. *semicircularis* Lagerst. De-Toni l. c. pag. 353. Tab. nostra IX. fig. 8.
Long. = 36 μ, lat. = 9 μ, lat. apic. = 3·3 μ; striis ca. 9 in 10 μ.
Hab.: In speciminibus a Holderer in Asia centrali collectis, designatione autem quadammodo destitutis.

76. *C. leptoceras* Ehrenb. V. Heurck l. c. Tab. III, fig. 24.
Hab.: In margine septentrionali montium Semenow.

77. *C. anglica* Lagerst., A. Schmidt, Atlas Tab. IX, fig. 63. et V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 4.
Hab.: In Dscham; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in vastitate Gobi; in Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye.

78. *C. abnormis* Grun. V. Heurck, l. c. Tab. III. fig. 8.
Hab.: Ad Tawelgu.

79. *C. gastroides* Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 9.
Hab.: Ad Tawelgu cum specie antecedenti; atque cum *C. cuspidata* Kuetz.

80. *C. lanceolata* (Ehrenb.) Kirchn., V. Heurck l. c. Tab. II, f. 7.
Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja.

81. *C. cymbiformis* (Kuetz.) Bréb., A. Schmidt, Atlas Tab X, fig. 27. a; V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 11.
Hab.: Ad Tawelgu; ad Pitschan; ad Chami in extrema vastitate Gobi; ante Pingfan in Nanschan orientali; — cum Nr. 69.; atque ad Tsin-ning.
var. *parva* (W. Sm.) V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 14.; A. Schmidt, Atlas Tab. X, fig. 14.
Hab.: In Dscham; inter Jagniabad et Bugur; inter Tungfanye et Pingkouye in Nanschan orientali; cum Nr. 69. et ad Tsin-ning.

82. *C. Cistula* (Hempr.) Kirchn. V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 12. et 13.
Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in Nanchan orientali: ante Pingfan, ad Donkyr et inter Tungfanye et Pingkouye.
var. *maculata* (Kuetz.) Grun. V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 16. et 17.
Hab.: In Dscham; inter Tungfanye et Pingkouye in Nanschan orientali.

83. *C. tumida* (Bréb.) V. Heurck l. c. Tab. II, fig. 10.
Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.

84. *C. gibba* (Ehrenb.) („*Cocconema gibbum* Ehrenb. von Brébisson ausgegeben") A. Schmidt, Atlas Tab. X, fig. 27.
Hab.: Ad Süngüm; in Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye.

85. *C. nana* (Hantzsch.) (*Cocconema nanum* Hantzsch in A. Schmidt, Atlas Tab. LXXI, fig. 27.).
Hab.: Ad Chami in extrema vastitate Gobi.

86. *C. hercynica* A. Schmidt, Atlas, Tab. IX, fig. 31.
Hab.: Ad Tawelgu.

Gen. Encyonema Kuetz.

87. *E. gracile* Rabenh. V. Heurck l. c. Tab. III, fig. 20—22.
Hab.: Ad Dscham.

88. *E. ventricosum* (Ag.) Grun. V. Heurck l. c. Tab. III. fig. 15., 16. (inferior dextra) et 19.

Hab.: In Dscham; in planitie fluvii Oechardes ad Kurlja; ad Süngüm; in Nanschan orientali: ante Pingfan atque inter Tungfanye et Pingkouye; in margine septentrionali montium Semenow.

Gen. Amphora Ehrenb.

89. *A. libyca* Ehrenb. A. Schmidt, Atlas Tab. XXVI, fig. 102—105.

Hab.: In Dscham; ad Chami in extrema vastitate Gobi; in media parte Gobi; in Nanschan orientali ad Donkyr et ante Pingfan.

90. *A. salina* W. Sm. var. *minor* V. Heurck (*A. borealis* Kuetz.) De-Toni l. c. pag. 386.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

91 (?) *A. lineata* Greg. A. Schmidt. Atlas Tab. XXVI, fig. 84—86.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

92. *A. lineolata* Ehrenb. V. Heurck l. c. Tab. I. fig. 23.

Hab.: Ad Donkyr in Nanschan orientali.

93. *A. veneta* Kuetz. (*A. quadricostata* Rabenh.) A. Schmidt, Atlas Tab. XXVI, fig. 77—80.

Hab.: In Dscham.

94. *A. ovalis* (Bréb.) Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. I. fig. 1.

Hab.: Ad Tawelgu inter Karaschar et Turfan; ad Pitschan; in Nanschan ante Pingfan; in margine septentr. montium Semenow.

var. *Pediculus* (Kuetz.) V. Heurck. Tab. I. fig. 4—5.

Hab.: In Nanschan orientali ad Pingfan.

Fam. Gomphonemaceae (Kuetz.) Grun.

Gen. Gomphonema Ag.

95. *G. geminatum* (Lyngb.) Ag., De-Toni Sylloge pag. 420—421.

Long. = 127 μ — 143 μ; lt. capit. = 29 μ — 31 μ, colli = 22 μ, ventri = 48·4 μ, constrictionis inferior. = 16 μ; pedis = 24 μ — 26·4 μ; striae 7 — 9 in 10 μ.

Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan; ad Tsin-ning.

96. *G. constrictum* Ehrenb., V. Heurck l. c. Tab. XXIII, fig. 6.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; ad Chami in extrema vastitate Gobi.

forma *subcapitatum* V. Heurck l. c. Tab. XXIII, fig. 5.

Hab.: Ad Tawelgu.

97. *G. capitatum* Ehrenb. V. Heurck l. c. Tab. XXIII, fig. 7.

Hab.: Ad Tawelgu.

98. *G. longiceps* Ehrenb. (*G. Mustela* Ehrenb. V. Heurck l. c. Tab. XXIV, fig. 5).

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

99. *G. gracile* Ehrenb. (*G. auritum* A. Br. V. Heurck, l. c. Tab. XXIV, fig. 15).

Hab.: Ad Tsin-ning.

100. *G. dichotomum* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. XXIV, fig. 19—21.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; ad Tsin-ning.

101. *G. micropus* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. XXV, fig. 5.

Hab.: Ad Tsin-ning.

102. *G. angustatum* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. XXIV, fig. 49—51.

Hab.: In vali angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali; ad Tsin-ning.

var. *obtusatum* Kuetz. et var. *productum* Grun. V. Heurck. l. c. fig. 44—45 et fig. 52—55.

Hab.: Ad Tsin-ning.

103. *G. parvulum* Kuetz. V. Heurck, l. c. Tab. XXV, fig. 9.

Hab.: Ad Tawelgu; inter Tungfanye et Pingkouye in Nanschan orientali; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali; in vastitate Gobi inter Chami et Soutschou.

Fam. Cocconeidaceae (Kuetz.) Grun.

Gen. Cocconeis Ehrenb.

104. *C. brundusiaca* Rabenh. De-Toni Sylloge pag. 450.

Hab.: In vastitate Gobi. die 14. et 17. V.

105. *C. Pediculus* Ehrenb. V. Heurck l. c. Tab. XXX, fig. 28, 29.

Hab.: Ante Pingfan in Nanschan orientali.

106. *C. Placentula* Ehrenb. var. *lineata* (Ehrenb.) V. Heurck. De-Toni l. c. pag. 454.

Hab.: In vastitate Gobi inter Chami et Soutschou.

(?) var. *euglypta* (Ehrenb.) [*C. lineata* (Ehrenb.) Grun. var. *euglypta* Grun. V. Heurek l. c. Tab. XXX. fig. 33].
Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.

Fam. Achnanthaceae (Kuetz.) Grun.

Gen. Achnanthes Bory.

107. *A. subsessilis* Kuetz., V. Heurck, l. c. Tab. XXVI. fig. 21—24.
Hab.: In Nanschan orientali, inter Tungfanye et Pingkouye.

108. *A. gibberula* Grun., V. Heurck, l. c. Tab. XXVII, fig. 47—49.
Hab.: In margine septentrionali montium Semenow.

109. *A. microcephala* (Kuetz.) Grun., V. Heurck, l. c. Tab. XXVII. fig. 20—23.
Hab.: In Dscham; in vastitate Gobi inter Chami et Soutschou; in Nanschan orientali ad Pingfan; in margine septentrionali. montium Semenow; cum Nr. 69.

110. *A. minutissima* Kuetz., V. Heurck, l. c. Tab. XXVII, fig. 35.—36. et 41.—44.
Hab.: In Dscham; in Nanschan orientali: ad Donkyr et inter Tungfanye et Pingkouye; in margine septentr. montium Semenow; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

111. *A. lanceolata* (Bréb.) Grun. V. Heurck l. c. Tab. XXVII. fig. 8—11.
Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.
var. *dubia* Grun. V. Heurck l. c. Tab. XXVII. fig. 12—13.
Hab.: cum typo.

Gen. Achnanthidium Kuetz.

112. *A. flexellum* (Kuetz.) Bréb. V. Heurck l. c. Tab. XXVI, fig. 29—31.
Hab.: In Dscham; in planitie fluvii Oechardes ad Kurlja; in margine septentrionali montium Semenow.

Ordo Pseudorhaphideae H. L. Smith.

Fam. Nitzschiaceae Grun.

Gen. Bacillaria Gmel.

113. *B. paradoxa* (Gmel.) Grun. V. Heurck l. c. Tab. LXI. fig. 6.—7.
Hab.: Ad Tsin-ning.

Gen. Nitzschia Hass.

114. *N. angustata* (W. Sm.) Grun. var. *curta* V. Heurck, l. c. Tab. LII, fig. 25.

Hab.: In Nanschan orientali ad Pingfan.

115. *N. hungarica* Grun. Nitzschieae in Wien. Verh. 1862, pag. 568. Tab. XXII, fig. 13. V. Heurck, l. c. Tab. LVIII, fig. 19—20.

Long. = 40 μ. lat. = 8 μ; striae 18 in 10 μ.

Hab.: Ad Tsin-ning.

116. *N. apiculata* (Greg.) Grun. V. Heurck, l. c. Tab. LVIII, fig. 26., 27.

Hab.: Ad Süngüm; cum Nr. 69. et ad Tsin-ning.

117. *N. stagnorum* Rabenh. V. Heurck, l. c. Tab. LIX, fig. 24

Hab.: In vastitate Gobi inter Chami et Soutschou.

118. *N. serians* Rabenh. V. Heurck l. c. Tab. LIX, fig. 23.

Hab.: Inter Jagniabad et Bugur; ad Astün inter Chami et Turfan; in vastitate Gobi inter Chami et Soutschou.

119. *N. dubia* W. Sm., V. Heurck l. c. Tab. LIX, fig. 9—11.

Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.

120. *N. thermalis* (Ehrenb.) Auersw. Grun. l. c. Tab. XII, fig. 22.

Hab.: Ad Tsin-ning.

121. *N. commutata* Grun. V. Heurck l. c. Tab. LIX, fig. 14.

Hab.: In vastitate Gobi. inter Chami et Soutschou.

122. *N. Denticula* Grun. V. Heurck l. c. Tab. LX, fig. 10.

Hab.: Ad Pitschan; in Nanschan orientali ante Pingfan; in margine septentrionali montium Semenow; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

123. *N. dissipata* (Kuetz.) Grun., V. Heurck l. c. Tab. LXIII, fig. 1.

Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja; ad Süngüm.

124. *N. sigmoidea* (Nitzsch.) W. Sm., V. Heurck l. c. Tab. LXIII, fig. 7.

Hab.: Ad Kurlja; in Nanschan orientali ad Pingfan.

125. *N. vermicularis* (Kuetz.) Hantzsch. V. Heurck l. c. Tab. LXIV, fig. 2.

Hab.: Ad Tawelgu.

126. *N. Brebissonii* W. Sm., V. Heurck l. c. Tab. LXIV, fig. 5.

Long. = 220 μ., lat. = 15 μ., puncta carinalia 6, striae 8—9 in 10 μ.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi.

127. *N. Sigma* (Kuetz.) W. Sm. var. *subcapitata* Rabenh. (= *N. Clausii* Hantzsch. V. Heurck l. c. Tab. LXVI, fig. 10).

Hab.: Ad Tsin-ning.

128. *N. linearis* (Ag.) W. Sm., V. Heurck l. c. Tab. LXVII, fig. 13—15.

Hab.: Cum specie antecedenti.

var. *tenuis* (W. Sm.?) Grun. V. Heurck l. c. Tab. LXVII, fig. 16.

Hab.: Inter Jagniabad et Bugur; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in vastitate Gobi inter Chami et Soutschou; atque cum forma typica.

var. *recta* (Hantzsch.) V. Heurck l. c. Tab. LXVII, fig. 17.

Hab.: Cum forma typica.

129. *N. Palea* (Kuetz.) W. Sm., V. Heurck l. c. Tab. LXIX, fig. 22. b. c et 23.

Hab.: In Dscham; ad Tsin-ning.

var. *debilis* (Kuetz.) Grun. V. Heurck l. c. Tab. LXIX, fig. 28., 29.

Hab.: Ad Süngüm; ad Tsin-ning.

var. *tenuirostris* Grun., V. Heurck l. c. Tab. LXIX, fig. 31.

Hab.: Ad Tsin-ning.

var.: *fonticola* Grun. V. Heurck l. c. Tab. LXIX, fig. 19.

Hab.: Cum varietate antecedenti.

130. *N. Kuetzingiana* Hilse, V. Heurck l. c. Tab. LXIX, fig. 25.

Hab.: Ad Süngüm.

131. *N. communis* Rabenh. var. *abbreviata* Grun., V. Heurck l. c. Tab. LXIX, fig. 35.

Hab.: Ad Tsin-ning.

132. *N. amphibia* Grun. var. *acutiuscula* Grun., V. Heurck l. c. LXVIII, fig. 22., 23.

Hab.: Ad Tawelgu; ad Chami in extrema vastitate Gobi.

133. *N. acicularis* (Kuetz.) W. Sm., V. Heurck l. c. Tab. LXX, fig. 6.

Hab.: In planitie fluvii Oechardes; ad Kurlja; ad Tawelgu; ad Süngüm; in vastitate Gobi: ad Chami et inter Chami et Soutschou; in Nanschan orientali ad Pingfan.

Gen. Denticula Kuetz.

134. *D. frigida* Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. XLIX, fig. 26., 27—31.

Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja; ad Süngüm; in Nanschan orientali ad Pingfan.

Gen. Hantzschia Grun.

135. *H. amphioxys* (Ehrenb.) Grun., V. Heurck l. c. Tab. LVI, fig. 1.

Hab.: In Nanschan orientali ante Pingfan.

var. *vivax* (Hantzsch) Grun., V. Heurck l. c. Tab. LVI, fig. 6.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi; in margine septentrionali montium Semenow.

var. *intermedia* Grun., V. Heurck l. c. Tab. LVI, fig. 4.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi.

136. *H. elongata* (Hantsch.) Grun., De-Toni, Sylloge Vol. II, pag. 563.

Hab.: Cum varietate antecedenti.

Fam. Surirellaceae (Kuetz.) Grun.

Gen. Suriraya Turp.

137. *S biseriata* (Ehrenb.) Bréb., V. Heurck l. c. Tab. LXXII, fig. 2 et 3.

Hab.: In Dscham; in planitie fluvii Oechardes ad Kurlja.

138. *S. linearis* W. Sm., A. Schmidt Atlas Tab. XXIII, fig. 33.

Hab.: In Dscham.

139. *S. robusta* Ehrenb., V. Heurck l. c. Tab. LXXI, fig. 1—2.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

140. *S. ovalis* Bréb. A. Schmidt, Atlas Tab. XXIII, fig. 49., XXIV, fig. 3.; V. Heurck l. c. Tab. LXXIII, fig. 3.

Hab.: Inter Jagniabad et Bugur; in planitie fluvii Oechardes, ad Kurlja; ad Süngüm; in vastitate Gobi: ad stationem in Krmaktschi; inter Chami et Soutschou; in Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye; in margine septentrionali montium Semenow; ad Tsin-ning.

var. *ovata* (Kuetz.) V. Heurck l. c. Tab. LXXIII, fig. 5.

Hab.: Ad Kurlja; ad Süngüm; et inter Chami et Soutschou cum typo; cum Nr. 69. et ad Tsin-ning; ad Pingfan in Nanschan orientali.

var. *minuta* (Bréb.) V. Heurck l. c. Tab. LXXIII, fig. 10.
Hab.: Ad Süngüm cum typo; ad Tsin-ning.
var. *pinnata* (W. Sm.) V. Heurck l. c. fig. 11., 12.
Hab.: Ad Tsin-ning.
var. *angusta* (Kuetz.) V. Heurck l. c. Tab. LXXIII, fig. 13.; A. Schmidt Atlas Tab. XXIII, fig. 40.
Hab.: In Dscham; ad Pingfan in Nanschan orientali; in margine septentrionali montium Semenow; ad Tsin-ning.

Gen. Cymatopleura W. Sm.

141. *C. elliptica* (Bréb.) W. Sm., V. Heurck l. c. Tab. LV, fig. 1.
Hab.: In Nanschan orientali ad Pingfan.
142. *C. Solea* (Bréb.) W. Sm.
Hab.: In Dscham; inter Jagniabad et Bugur; in planitie fluvii Oechardes ad Kurlja; in margine septentrionali montium Semenow; ad Tsin-ning.

Fam. Diatomaceae (Grun.) Kirchn.

Gen. Diatoma DC.

143. *D. vulgare* Bory, V. Heurck l. c. Tab. L, fig. 4.
Hab.: Ad Kurlja, cum antecedenti.
144. *D. hiemale* (Lyngb.) Heib., V. Heurck l. c. Tab. LI. fig. 1—2.
Hab.: In Dscham; in Nanschan orientali ad Pingfan; in regione, quae 73 *km* a media parte litoris meridionalis lacus Kukunor inter occasum brumalem et meridiem spectat.

Gen. Odontidium Kuetz.

145. *O. mutabile* W. Sm., De-Toni, Sylloge Vol. II, pag. 639.
Hab.: In Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye.
var. *intermedium* Grun. V. Heurck l. c. Tab. XLV. fig. 9 et 11.
Hab.: In Nanschan cum typo et in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.
146. *O. Harrisonii* W. Sm., V. Heurck l. c. Tab. XLV, fig. 28.
Hab.: In Nanschan cum specie antecedenti.

Fam. Fragilariaceae (Kuetz.) De-Toni em.

Gen. Synedra Ehrenb.

147. *S. pulchella* (Ralfs) Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. XL, fig. 27—29.

Hab.: Ad Chami in extrema vastitate Gobi; in Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye.

var. *Smithii* (Ralfs) V. Heurck l. c. Tab. XLI, fig. 2., 4.

Hab.: In Dscham; in Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye.

148. *S. Vaucheriae* Kuetz., V. Heurck l. c. Tab. XL, fig. 19.

Hab.: Ad Tawelgu; in Nanschan orientali ad Pingfan.

var. *capitellata* Grun., V. Heurck l. c. Tab. XL, fig. 26.

Hab.: In valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali

149. *S. Ulna* (Nitzsch.) Ehrenb., V. Heurck l. c. Tab. XXXVIII, fig. 7.

Hab.: In Tawelgu; ad Pitschan; in margine septentrionali montium Semenow; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali; — cum Nr. 69.

var. *subaequalis* (Grun.) V. Heurck l. c. Tab. XXXVIII, fig. 13.

Hab.: In Dscham; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in Nanschan orientali inter Tungfanye et Pingkouye; in margine septentrionali montium Semenow.

var.: *longissima* (W. Sm.) Brun. V. Heurck l. c. Tab. XXXVIII, fig. 3.

Hab.: In Dscham; in margine septentrionali montium Semenow.

var.: *danica* (Kuetz.) V. Heurck l. c. Tab. XXXVIII, fig. 14. a. b.

Hab.: In Dscham; ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in Nanschan orientali ante Pingfan; in margine septentrionali montium Semenow; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali; ad Chami in extrema vastitate Gobi.

var. *lanceolata* (Kuetz.) Grun. V. Heurck l. c. Tab. XXXVIII, fig. 10.

Hab.: In Nanschan ad Pingfan.

var. *obtusa* (W. Sm.) V. Heurck l. c. Tab. XXXVIII, fig. 6.

Hab.: Ad Chami in extrema vastitate Gobi.

var. *vitrea* (Bory, Kuetz.) V. Heurck l. c. Tab. XXXVIII, fig. 11.

Hab.: In vàlli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

150. *S. Acus* Kuetz., V. Heurck l. c. Tab. XXXIX, fig. 4.

Hab.: Tawelgu; ad Chami in extrema vastitate Gobi; in vastitate Gobi inter Chami et Soutschou; in Nanschan orientali ad Donkir; in margine septentrionali montium Semenow; eodem loco, quo Nr. 69.

var. *delicatissima* (W. Sm.) Grun., V. Heurck l. c. Tab. XXXIX, fig. 7.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi

var. *angustissima* Grun., V. Heurck l. c. Tab. XXXIX, fig. 10.

Hab.: Cum varietate antecedenti.

151. *S. radians* Kuetz., V. Heurck l. c. Tab. XXXIX, fig. 11.

Hab.: Eodem loco, quo Nr. 69.

152. *S. affinis* Kuetz. var. *acuminata* Grun., V. Heurck l. c. Tab. XLI, fig. 14.

Hab.: Ad Chami in extrema vastitate Gobi.

Gen. Fragilaria Lyngb.

153. *F. virescens* Ralfs., V. Heurck l. c. Tab. XLIV, fig. 1

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

Fam. Plagiogrammaceae P. Petit.

Gen. Diadesmis Kuetz.

154. *D. confervacea* Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. XIV, fig. 36.

Hab.: In Nanschan orientali prope Pingfan

Fam. Striatellaceae (Kuetz.) Heib.

Gen. Tabellaria Ehrenb.

155. *T. fenestrata* (Lyngb.) Kuetz. V. Heurck l. c. Tab. LII fig. 6.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes

Fam. Eunotiaceae Kuetz.

Gen. Cystopleura Bréb.

156. *C. turgida* (Ehrenb.) Kunze. De-Toni Sylloge pag. 777.

var. *granulata* (Ehrenb.) Brun., V. Heurck l. c. Tab. XXI, fig. 6.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

157. *C. gibba* (Ehrenb.) Kunze. De-Toni l. c. pag. 780 V. Heurck l. c. Tab XXXII, fig. 1—2.

Hab.: In margine septentrionali montium Semenow; in valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

var. *ventricosa* (Ehrb.) Grun., V. Heurck l. c. Tab. XXXII, fig. 4., 5.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; in vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi; ad Tsin-ning.

158. *C. Argus* (Ehrenb.) Kunze, — De-Toni l. c. pag. 782. V. Heurck l. c. Tab. XXXI. fig. 15—17.

Hab.: In Nanschan ad Pingfan; in margine septentrionali montium Semenow.

159. *C. Zebra* (Ehrenb.) Kunze, V. Heurck l. c. Tab. XXXI, fig. 9.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

var.: *proboscidea* (Kuetz.) Grun., V. Heurck l. c. Tab. XXXI, fig. 10.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi.

var. *Porcellus* (Kuetz.) Grun. Öster. Diatom. in Wien. Verhandl. 1862, pag. 328. Tab. (6) III, fig. 3. a.

Long. = 77 μ, lat. = 13·2 μ, lat. apic. = 6·6 μ, costae 2·7!! in 10 μ.

Hab.: Ad Kurlja cum typo; [invenitur etiam in specimine signatura et Nro carente].

160. *C gibberula* (Ehrenb.) Kunze, De-Toni Sylloge, Vol. II, pag. 786.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi.

var. *producta* Grun. V. Heurck l. c. Tab. XXXII, fig. 11—13.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes; inter Jagniabad et Bugur.

Gen. Eunotia Ehrenb.

161. *E. Arcus* Ehrenb., V. Heurck l. c. Tab. XXXIV, fig. 2.

Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja.

Gen. Pseudo-Eunotia Grun.

162. *P. lunaris* (Ehrenb. Grun., V. Heurck l. c. Tab. XXXV, fig. 6. a. c.

Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

163. *P. subarcuata* (Naeg.) Grun. (*Eunotia lunaris* var. *subarcuata*, V. H. l. c. Tab. XXXV, fig. 2).
Hab.: Cum specie antecedenti.

Ordo Cryptorhaphideae H. L. Smith.

Fam. Melosiraceae (Kuetz.) De-Toni.

Gen. Lysigonium Link.

164. *L. varians* (Ag.) De-Toni, Sylloge Vol. II, pag. 1329. (*Melosira varians* Ag.).
Hab.: Ad Tawelgu.

Gen. Melosira Ag.

165. *M. distans* (Ehrenb.) Kuetz. var. *levissima* Grun., V. Heurck l. c. Tab. LXXXVI, fig. 24.
Hab.: In margine septentrionali montium Semenow.

166. *M. crenulata* (Ehrenb.) Kuetz., V. Heurck Tab. LXXXVIII, fig. 5.
Hab.: Ad Kurlja in planitie fluvii Oechardes.

Class. Cyanophyceae.

Ordo Gloeosipheae Hansg.

Fam. Nostoceae (Kuetz.) Born. et Fl.

Gen. Anabaena (Bory) Wittr.

167. *A. variabilis* Kuetz. (*Sphaerozyga variabilis* Kütz.) Hansg Prodromus pag. 67.
Cell. veg. long. = 2·2 μ — 3·3 μ — 4·4 μ — 6·6 μ, lat. = 3·3 μ — 4·4 μ.
Cell. limit. long. = 6·6 μ — 13·2 μ, lat. = 4·4 μ — 6·6 μ.
Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja; in vastitate Gobi ad stationem ad Krmaktschi.

Fam. Lyngbyaceae (Oscillariaceae).

Gen. Spirulina (Turp.) Link.

168. *S. subsalsa* Oersted., Gomont Monogr. pag. 273. Tab. VII, fig. 32.
Crass. spirae = 3·3 μ, filamenti = 2·2 μ; anfract. 1·1 μ inter se distantes.
Hab.: (In vitro designatione et Nro carente!)

Ordo Chamaesiphonaceae.

Fam. Chamaesiphoneae.

Gen. Sphaerogonium Rostaf.

169. *S. incrustans* (Grun.) Rostaf. Rozprawy Wydz. mat.-przyr. Vol. X, pag. 282.

Crass. = 3·3 μ — 4·4 μ; diam. gonidii = 2·2 μ.

Hab.: In valli angusta fluvii Lötsche in Tibete orientali.

Gen. Chamaesiphon A. Br. et Grun.

170. *Ch. confervicola* A. Br.

Crass. filam. cum vag. = 4·4 μ, sine vag. = 2·2 μ; long. fil. = — 13 μ, long. cell. = 1·7 μ.

Hab.: Cum specie antecedenti in *Plectonema Thomasianum* (Kuetz.) Bornet.

Ordo Chroococcoideae.

Fam. Chroococcaceae Itzings.

Gen. Merismopedium Meyen.

171. *M. glaucum* (Ehrenb.) Naeg.

Hab.: In Nanschan orientali ad Pingfan; in margine septentrionali montium Semenow. (Cfr. etiam W. Schmidle l. c. pag. 143).

Gen. Gleocapsa (Kuetz.) Naeg.

172. *G. quaternata* Kuetz. Kirchn. Algenflora von Schlesien, pag. 257.

Diameter: cell. c. integumento = 6·6 μ, lumin. cell. = 4·4 μ, familiae = 19·8 μ.

Hab.: In planitie fluvii Oechardes ad Kurlja.

Class. Flagellatae.

Fam. Euglenidae Stein.

Gen. Euglena Ehrenb.

173. *E. viridis* Ehrenb. et 174. *E. deses* Ehrenb.

Hab.: In vastitate Gobi ad stationem in Krmaktschi.

Explicatio tabulae.

Fig. 1. *Vaucheria De-Baryana* Wor. var. *Schmidlei* nov. var. *a* 280 × fructificatio: oogonium singulum, antheridium e tergo visum, orificiis binis; *a'* 280 × idem sed oogonia bina, *a''* 280 × idem, antheridium e latere visum; *a'''*, *a''''*, *a'''''* 130 × idem in statu iuniore; *a''''''* 130 × idem, antheridium e fronte spectatum; *b* 130 × antheridium novellum, *b'* 280 × antheridium e latere; *b''* 280 idem e fronte visum abnorme evolutum; *c* 280 × oogonium nondum apertum *c'* 280 × oogonium apertum; *c* 280 × oospora matura

Fig. 2. *Closterium Pritchardianum* Archer. *a* 130 ×, *a* 440 ×.

Fig. 3. *Closterium* spec? inter *Lunula* et *moniliferum* 280 ×.

Fig. 4. *Disphinctium tumens* (Nordst.) Hansg. forma. *a* semicellula e fronte, *b* e latere, *c* e vertice visa 440

Fig. 5. *Cosmarium Botrytis* (Bory) Menegh. 440 ×.

Fig. 6. *Navicula elliptica* Kuetz. var. *inflata* nov. var. 440 ×.

Fig. 7. *Amphiprora paludosa* W. Sm. var. *Holdereri* nov. var. *a* 660 . *a'* 440 ×, *a''* 280 × cellulae e facie connectivali visae, *b* 280 × cellulae e facie valvari, *b'* idem 440 ×.

Fig. 8. *Cymbella affinis* Kuetz. var. *semicircularis* Lagerst. 660

---

17. M. BRONISLAS PAWLEWSKI. **Nowa bezpośrednia synteza α-fenylobenzimidazolu.** ***(Sur une nouvelle synthèse directe du α-phénylbenzimidazole).*** Note présentée par M. L. Marchlewski m. c.

Le premier représentant des imidazoles aromatiques: le *α*-phénylbenzimidazole

$$C_6H_4 \begin{matrix} \diagup NH \\ \\ N \end{matrix} \diagdown C - C_6H_5$$

a été déjà obtenu plusieurs fois d'une manière indirecte, soit par la réduction, soit par la décomposition des corps correspondants. L'auteur obtient ce corps par une synthèse directe, basée sur la réaction suivante:

$$o\text{-}C_6H_4(NH_2 . HCl)_2 + C_6H_5 . CS . NH_2 =$$
$$= C_{13}H_{10}N_2 + HCl + NH_4Cl + SH_2 .$$

Cette réaction est analogue à celle dont s'est servi M. St. Niementowski qui a obtenu les benzimidazoles par la condensation des amides acides avec les orthodiamines.

En chauffant pendant quelques heures dans un tube scellé à 240—250° un mélange en proportions moléculaires du *o*-phény-

lènediamine et du thiobenzamide, on obtient le α-phénylbenzimidazole, $C_{13}H_{10}N_2$, avec un rendement presque théorique. Le α-phénylbenzimidazole forme des aiguilles et des paillettes blanches, fusibles à 290–292°. D'après MM. Hübner, Hinsberg et Koller, le point de fusion de ce corps est 280°; cependant l'auteur considère cette donnée comme inexacte.

---

18. M. ROMAIN ZAŁOZIECKI. **O nitrowaniu niżej wrących frakcyj ropy galicyjskiej.** ***(Über die Nitrierung der niedrig siedenden Fraktionen des galizischen Erdöles).*** *(Sur la nitration des fractions du pétrole de la Galicie dont le point d'ébullition est peu élevé).* Note présentée par M. St. Niementowski m. c.

Der Verfasser hat seine in Gemeinschaft mit G. Frasch begonnenen Untersuchungen fortgesetzt und auf Grund derselben seine früher geäusserte Ansicht, dass bei der Nitrierung mit Salpeter-Schwefelsäure sich in den bei 40—65°C siedenden Fraktionen tertiäre Trinitroprodukte der Isohexane bilden, teilweise modifiziert. Die vorliegende Arbeit umfasst die Untersuchung der festen Nitroprodukte aus den von 40—101° siedenden Fraktionen eines Erdöles von Kryg, die in 3 Gruppen geteilt wurden, entsprechend den von 2 zu 2° geschiedenen Fraktionen, und zwar umfasst die 1. Gruppe die Nitroprodukte der Fraktion 40—65°, die 2. Gruppe diejenigen der Fraktionen 65—85° und die 3. Gruppe diejenigen der Fraktionen 85—101°. Aus jeder Gruppe wurden die Nitroprodukte einer sehr langwierigen und sorgfältigen Fraktionierung durch Kristallisation aus Alkohol und Benzin unterworfen. Einzelne Bestandteile mit konstantem Schmelzpunkt wurden daraus isoliert und dann der Analyse unterworfen.

Aus der 1. Gruppe wurden 3 Körper, und zwar mit dem Schmelzpunkte 91°, 85° und 66—67° abgeschieden, die sich als m-Dinitrobenzol, Trinitroisohexan und das letzte als ein Gemisch von Dinitrobenzol und Dinitrotoluol, respek. ein mit dem ersten verunreinigtes Dinitrotoluol herausgestellt haben.

Aus der 2. Gruppe wurde ein bei 71°C schmelzendes 2, 4-Dinitrotoluol neben viel m-Dinitrobenzol und der früher bereits isolierten, bei 66—67°C schmelzenden Dinitroverbindung herausfraktioniert. Aus den Nitrokörpern der 3. Gruppe wurde der Haupt-

menge nach das bereits in der Gruppe 2 ausgeschiedene 2, 4-Dinitrotoluol erhalten und daneben das bei 48° C schmelzende 2. 5-Dinitrotoluol und ein bei 39—40° C schmelzendes Dinitroxylol von unbekannter Struktur.

Ausser diesen wurde in der niedrig siedenden Fraktion 29·5—31·5°C eine kleine Menge eines in dünnen glänzenden langen Nadeln kristallisierenden Nitrokörpers erhalten, der seiner Analyse nach und dem bei 69·5° C. gefundenen Schmelzpunkte sich als 1, 2-Orthodinitroxylol erwies.

Die Auffindung aromatischer Dinitroverbindungen in bei weitem niedriger siedenden Fraktionen des Erdöles, als das ihren Siedetemperaturen entspricht, so z. B. des Dinitrobenzols in der Fraktion von 40°, des Dinitrotoluols schon in den unter 65° und des Dinitroxylols in der unter 100° C siedenden Fraktion und speziell die Darstellung wenn auch nur einer kleinen Menge eines Dinitroxylols aus der Fraktion 29·5—31·5, legen die Ansicht nahe, dass sich die aromatischen Nitrokörper erst durch die Wirkung der Nitriersäure bilden können, und zwar wahrscheinlich aus den Kohlenwasserstoffen des Naphtentypus, doch kann ausser dieser Behauptung bezüglich der Kohlenwasserstoffe, die im Erdöl eine Umwandlung in aromatische Kohlenwasserstoffe durch Nitrierung erfahren, nichts Bestimmtes gesagt werden.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

7 Maja 1903

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise

(Spółka wydawnicza polska)

à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51. k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 10 k. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum 1408—1530, ed. B. Ulanowski 10 k. — Vol XV Rationes curiae Vladislai Jagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI. XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed Szujski. 6 k. Vol III. Stephani Medekszа commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol. VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 k. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski 4 k. Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674—1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo, 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol I. II. IV. V épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo. 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

12.229

N° 5. MAI 1903.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER
DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE :

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR : S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. STANISLAS SMOLKA.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de **M. Ladislas Natanson,**
Membre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

juin 1903

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 5. Mai 1903.

Sommaire: 19. SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE DU 12 MAI 1903.
20. M. ÉDOUARD JANCZEWSKI. Essai d'une disposition naturelle des espèces dans le genre Ribes L.
21. M. CHARLES OLSZEWSKI. Un appareil nouveau pour la liquéfaction de l'hydrogène.
22. M. JOSEPH PUZYNA. Sur les sommes d'un nombre infini de séries entières et sur le théorème de M. Mittag-Leffler.
23. M. STANISLAS DOBROWOLSKI. Sur les cytotoxines placentaires.
24. M. PHILIPPE EISENBERG. Sur les lois quantitatives de la réaction entre les toxines et les antitoxines.
25. M. LADISLAS NATANSON. Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité.
26. M. LADISLAS NATANSON. Sur l'approximation de certaines équations de la Théorie de la Viscosité.

19. SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE DU 12 MAI 1903.

S. E. M. Julien Dunajewski, Vice-Protecteur de l'Académie, ouvre la séance au nom de Son Altesse Impériale et Royale, le Protecteur.

Le Président de l'Académie, comte Stanislas Tarnowski, prononce l'allocution d'usage.

Le Secrétaire général rend compte des travaux de l'Académie pendant l'année qui vient de s'écouler et annonce que, dans la séance générale du 11 mai, ont été élus:

I. Dans la Classe de Philologie, membres correspondants: MM. le Dr. Vladimir Demetrykiewicz, Jean Rozwadowski, Stanislas Schneider.

II. Dans la Classe d'Histoire et de Philosophie, membres titulaires: MM. S. E. le comte Edouard Piniński, Louis Kubala; membres correspondants: MM. Jean Fijałek, Alexandre Hirschberg.

III. Dans la Classe des Sciences mathématiques et naturelles, membres titulaires: MM. Léon Marchlewski, Edouard Suess, François Vejdowsky; membres correspondants: MM. Michel Siedlecki et Stanislas Zaremba.

M. Jean Bołoz-Antoniewicz, membre correspondant de la Classe de Philologie, fait ensuite une conférence sur le sujet suivant: *„Amor Sacro e Profano du Titien“*.

Enfin, le Secrétaire général proclame les noms des lauréats de l'Académie.

Le Prix Barczewski, destiné à récompenser l'ouvrage d'Histoire le plus méritant, est décerné à M. Marie Sokołowski pour son ouvrage: *„Etudes sur l'histoire de la sculpture polonaise au XVe et XVIe siècle“*.

Le Prix Barczewski, destiné à récompenser l'oeuvre de peinture la plus remarquable, est attribué à M. Hyacinthe Malczewski pour son tableau: *„Trois têtes“*.

Séance du lundi 4 Mai 1903.

Présidence de M. E. GODLEWSKI.

20. M. EDOUARD JANCZEWSKI m. t. **Układ naturalny gatunków w rodzaju Porzeczka (Ribes).** ***(Essai d'une disposition naturelle des espèces dans le genre Ribes L.).***

Considéré jadis comme genre unique d'une famille particulière, les Grossulariées, le groseiller est habituellement incorporé aujourd'hui à la famille des Saxifragacées dont il constitue à lui seul la tribu des Ribesioïdées.

Le nombre des espèces décrites et surtout les différences notables dans le port, l'odeur, la grappe, les fleurs, les fruits etc. des espèces aussi communément cultivées que le *R. Grossularia, R. vulgare, R. nigrum, R. sanguineum, R. aureum, R. alpinum,* ont depuis longtemps obligé les phytographes de morceler le groseiller en sections, sous-genres ou genres; cependant leurs essais n'ont pas eu trop de succès, et les dispositions proposées par Berlandier [1]), Spach [2]), Maximowicz [3]), devaient être plus ou moins modifiées

[1]) Mém. de la Soc. physique de Genève. III. 2. 1826. DC. Prodromus syst. regni vegetabilis III. 1828.

[2]) Revisio Grossulariaearum, Ann. des sc. natur. 1 s. IV. 1835. Histoire des végétaux phanérogames VI. 1838.

[3]) Decad. pl. n. Jap. et Mandch. Bull. Acad. Pétersbourg XIX. 1874.

dans les traités de dendrologie, où il s'agissait de classer un nombre d'espèces plus considérable et de donner le moyen de les déterminer sans trop d'embarras. Elles étaient entièrement artificielles, ne résultaient pas d'observations suivies sur des plantes vivantes et, pour cette raison, rapprochaient des espèces fort disparates et en éloignaient de bien proches.

La disposition que nous allons tenter d'établir, reposera sur d'autres principes; si elle ne peut être encore définitive et complète, c'est que, à peu d'exceptions près, les espèces de l'Amérique méridionale et plus d'une de l'Asie et de l'Amérique septentrionale, ne pouvaient être étudiées à l'état vivant et leurs particularités ne pouvaient être connues autrement que par l'examen d'échantillons d'herbier ou par des diagnoses insuffisantes.

Ces principes, nous les exposerons brièvement et aborderons dans la suite la caractéristique des nouveaux sous-genres, dont les plus riches en espèces demanderaient encore à être divisées en sections conformes à la nature des espèces qui les constituent.

Mode de végétation. Dans les vrais groseillers à grappes, comme *R. vulgare* Lamarck (*R. domesticum* nob.), *R. rubrum* L., *R. petraeum* Wulf., *R. multiflorum* Kit. et autres, tout bourgeon à fleurs est axillaire, produit sur un scion robuste ou une petite brindille, dont le bourgeon terminal est toujours un bourgeon à bois, absolument comme dans nos arbres fruitiers à noyaux (Cerisier, Prunier, Pêcher etc.). Dans les cassis (*R. nigrum* L., *R. floridum* L'Hérit., *R. villosum* Gay etc.), les groseillers épineux (*R. Grossularia* L., *R. niveum* Lindl., *R. Lobbii* Gray, *R. speciosum* Pursh, etc.) et dans d'autres sous-genres, le bourgeon à fleurs prend naissance aussi bien à l'aisselle d'une feuille qu'au sommet de la branche — scion, brindille ou lambourde réduite à ce seul bourgeon — tout comme dans nos arbres fruitiers à pépins (Poirier, Pommier etc). Le prolongement de la branche est dans ce cas engendré à l'aisselle de la dernière feuille qui précède la grappe; les feuilles deviennent aussi, en partie, fasciculées. Rarement la grappe est portée par une petite brindille de l'année, longue de quelques centimètres (*R. Maximowiczii* Batal., *R. molle* de Poeppig, *R. villosum* Gay).

Ecailles. Pendant le repos de la végétation, les bourgeons sont couverts d'écailles imbriquées, tantôt herbacées, quelquefois colorées en beau rouge (*R. prostratum* L'Hérit., *R. laxiflorum* Pursh), tantôt

scarieuses, brunes ou cendrées, translucides ou plus épaisses et opaques. Les espèces voisines, appartenant au même sous-genre, ne diffèrent jamais par la nature de leurs écailles.

Pédicelles et pédoncules. La fleur des groseillers est habituellement portée par un pédicelle (axe de deuxième ordre) qui est court ou long, inséré à l'aisselle d'une bractée sur le rachis (axe de premier ordre), muni ordinairement de deux bractéoles et articulé immédiatement avec l'ovaire. Lorsque la fleur tombe, c'est à cette place qu'elle se détache du pédicelle persistant. Dans les groseillers épineux, le vrai pédicelle, même s'il porte deux bractéoles (*R. subvestitum* Hook et Arn.), est réduit à une toute petite excroissance articulée avec le faux pédicelle que nous appellerons pédoncule, parce qu'il rappelle à tout égard le pédoncule de la poire et tombe avec la fleur inféconde, exactement comme dans le poirier.

Organes sexuels. A l'exception des fleurs monstrueuses, toutes les autres contiennent les deux sexes. Ceux-ci sont tous les deux fertiles dans les fleurs hermaphrodites, tandis que dans les dioïques l'un des deux reste stérile, mais ne disparaît pas. Les anthères des fleurs femelles sont beaucoup plus petites que les fertiles, elles ouvrent cependant leurs loges; dans les fleurs mâles, le style et les deux stigmates existent toujours, mais l'ovaire ne contient ordinairement aucune cavité et est remplacé par un pédoncule articulé avec le pédicelle et aussi mince que lui. Dans les *Berisia*, toutes les espèces, dans les *Calobotrya* et *Coreosma* quelques-unes sont dioïques; les autres sous-genres ne contiennent que des espèces à fleurs bisexuées.

Inflorescence. Bien que la grappe soit quelquefois changée en épi, corymbe, capitule, ou en ombelle sessile pauciflore (*R. fasciculatum* Sieb. et Zucc.), même remplacée par une fleur solitaire dans des espèces voisines sous tout autre rapport, sa structure et sa direction peuvent être constantes dans toutes les espèces appartenant au même sous-genre. Ainsi, elle est toujours normale dans les *Ribesia*, pauciflore et corymboïde (épi en réalité) dans les *Grossularia*.

Trichomes. Il n'y a pas de *Ribes* entièrement dépourvu de poils de nature double, les uns simples, les autres glanduleux.

Les *poils simples*, unicellulaires ou cloisonnés une ou deux fois vers la base, varient considérablement, d'une espèce à l'autre, sous le rapport de la direction, longueur, diamètre et épaisseur de la membrane plus ou moins distinctement mamelonnée; leur abondance est au contraire très peu fixe dans les individus de la même

espèce et sert souvent à distinguer des formes d'ordre inférieur, considérées à tort comme variétés ou espèces dites élémentaires.

Les *poils glanduleux* sont encore plus variables sous le rapport de leur abondance et des dimensions de leur pédoncule, mais la nature de la glande ne change jamais dans les limites de l'espèce et se maintient constante dans la plupart des sous-genres. Nous connaissons trois types de ces glandes: cristallines, visqueuses et huileuses.

Les *glandes cristallines* sont des corps pluricellulaires, sphériques ou allongés, dont les cellules gorgées de substance réfringente et riche en tannin ne sécrètent rien à l'extérieur. Leur existence est bien éphémère. Leurs pédoncules, pluricellulaires et plurisériés, sont tantôt très courts, tantôt plus développés, parfois transformés en soies coniques, visibles à l'oeil nu, verticales sur le scion, obliques à la face supérieure de la feuille. Vers la base du pétiole, ces soies sont ordinairement plumeuses (ornées de poils simples) et monocéphales, rarement ramifiées et polycéphales. Sur le scion et même sur l'ovaire, elles peuvent être remplacées, en totalité ou en partie, par de véritables aiguillons, dépourvus de glande terminale, lignifiés et persistants.

Les *glandes visqueuses* sont sphériques, turbinées ou discoïdes, ressemblent beaucoup aux cristallines, mais sécrètent une substance visqueuse, souvent aromatique, protégée d'abord par la cuticule soulevée, ensuite mise à nu, collant au doigt ou au papier. Leurs pédoncules varient comme ceux des glandes cristallines et se développent quelquefois aussi en soies distinctes, glabres sur les scions et les feuilles, plumeuses (ornées de poils simples) et monocéphales vers la base du pétiole, plus rarement glabres, ramifiées et polycéphales en cet endroit (*R. orientale* Desf.).

Les *glandes huileuses* sont minces, discoïdes ou légèrement pelviformes, toujours sessiles, attachées par le centre un peu plus épais (à deux couches cellulaires) à l'épiderme. Elles sécrètent une substance huileuse, aromatique, jaune, qui soulève considérablement la cuticule, la distend sans la rompre et se conserve bien longtemps sous cette protection. A l'oeil nu ou à la loupe, ces glandes ont l'air de taches rondes, jaunes, brillantes, dispersées sur l'épiderme, quelquefois presque se touchant par les bords. Une bonne partie de ces glandes avorte de bonne heure, avant de sécréter la substance huileuse, et reste pour ainsi dire arrêtée à l'état cristallin, comme cela a lieu par exemple à la face supérieure des feuilles du cassis (*R.*

nigrum L). Les espèces munies de ces glandes sont toujours inermes et dépourvues de soies; si elles en portent de plumeuses à la base du pétiole, ces soies sont nécessairement acéphales, ne dérivent pas de glandes et constituent par conséquent une troisième forme de trichomes dans ces plantes.

De tous les caractères exposés, nous choisissons pour la clef analytique des sous-genres, seulement ceux qui ne souffrent aucune exception et ont le privilège d'être reconnus avec facilité sur des plantes vivantes, souvent aussi sur les échantillons d'herbier.

A. Écailles scarieuses.

1. Bourgeons à fleurs uniquement axillaires I. *Ribesia.*
2. Bourgeons à fleurs terminaux et axillaires:
   a. Fleurs dioïques . . . . . II. *Berisia.*
   b. Fleurs bisexuées.
      α. Grappe normale . . . . . III. *Grossularioides.*
      β. Grappe pauciflore, corymboïde . . IV. *Grossularia.*

B. Écailles herbacées.

1. Glandes visqueuses, rarement cristallines V. *Calobotrya.*
2. Glandes huileuses, sessiles . . . . . IV. *Coreosma.*

Une caractéristique plus détaillée de chaque sous-genre que nous allons maintenant donner, écartera les doutes possibles sur la place qui revient à toute espèce de *Ribes*, examinée de plus près, et démontrera, nous le croyons, que notre disposition n'est pas artificielle comme les antérieures, mais qu'elle correspond à la véritable affinité des espèces, généralement aussi à leur distribution géographique. Les noms admis sont pour la plupart anciens, mais employés pour des groupes autrement circonscrits et définis. Les caractères de nos sous-genres ne seront pas suivis de l'énumération des espèces qui les possèdent, parce que l'étude de l'espèce exige du temps et de l'expérience et constituera l'objet d'un travail postérieur.

1. Ribesia (Berl) nob [1]).

Arbustes inermes, érigés, parfois presque rampants (*R. triste* Pallas). Bourgeons moyens, à écailles scarieuses, plus ou moins pu-

[1]) Le nom de *Ribesia* fut donné par Berlandier à tous les groseillers inermes

bescentes. Feuilles moyennes ou assez grandes, caduques, plissées en bourgeon. Glandes cristallines pédonculées, quelquefois portées par de soies coniques. Bourgeons à fleurs uniquement axillaires; les terminaux, plus gros, toujours à bois. Grappe réclinée, quelquefois pendante. Fleurs petites ou moyennes, bisexuées. Sépales quelquefois réfléchis pendant l'anthèse (*R. multiflorum* Kit.). Ovaire glabre, articulé avec le pédicelle quelquefois très bref (*R. moupinense* Franch). Fruit glabre, petit ou moyen, rouge, rarement noir, juteux, acidulé ou acerbe, ordinairement comestible. Une dizaine d'espèces: *R. longeracemosum*, Franch., *R. sutchuense* sp. n., *R. himalayense* Dcne., *R. moupinense* Franch., *R. Meyeri* Maxim., *R. Griffithii* Hook. f. et Thom. sont exclusivement asiatiques, *R. vulgare* Lamarck (*R. domesticum* Jancz.) n'est spontané que dans l'Europe occidentale, *R. rubrum* L., *R. multiflorum* Kit. habitent l'Europe et l'Asie du nord, *R. petraeum* Wulf. l'Europe, l'Asie du nord et les monts Atlas en Afrique, *R. triste* Pall. l'Asie et l'Amérique boréales, depuis les embouchures du Yennissey jusqu'à l'Atlantique.

2. Berisia Spach [1]).

Arbustes inermes, rarement armés d'aiguillons peu nombreux, érigés ou nains (*R. Davidii* Franch.). Bourgeons moyens ou plus gros, à écailles scarieuses. Feuilles petites ou moyennes, rarement ovoïdes, indivises et coriaces (*R. Davidii*), plissées ou involutées (*R. diacantha* Pall.) en bourgeon. Glandes cristallines, plus rarement visqueuses (*R. orientale* Desf., *R. sardoum* Martelli), pédonculées, quelquefois portées sur des soies coniques. Bourgeons à fleurs terminaux sur lambourdes, brindilles et scions, axillaires sur brindilles et scions. Grappe ordinairement normale, érigée, plus rarement transformée en ombelle sessile pauciflore (2—4, *R. fasciculatum* ♀ Sieb. et Zucc., *R. sardoum* ♀ Martelli). Fleurs petites ou moyennes, dioïques par stérilité de l'autre sexe, rarement polygames (?). Ovaire glabre, quelquefois hérissé de poils glanduleux, articulé avec le pédicelle et remplacé dans les fleurs mâles par un pédoncule aussi mince que le

ou subinermes, sauf le *R. aureum* Pursh, érigé en sous-genre *Symphocalyx;* il a été maintenu par Maximowicz à peu près dans les mêmes limites.

[1]) Le nom de *Berisia* fut donné par Spach à une section de son genre *Ribes* (Hist. d. vég. phan.), absolument correspondante à la nôtre. Les autres sections de Spach, *Conostylium* et *Cylindrostylium*, de son *Ribes*, embrasssaient les espèces distribuées chez nous parmi les: *Grossularioides, Calobotrya* et *Ribesia*.

pédicelle. Fruit petit ou moyen, rouge, rarement orange, glabre, quelquefois hispide, insipide. Graines germant beaucoup plus vite et plus régulièrement que dans les autres sous-genres, quelquefois en quinze jours. Une dizaine d'espèces, presque toutes asiatiques: *R. diacantha* Pall., *R. fasciculatum* Sieb. et Zucc., *R. acuminatum* Wall., *R. Davidii* Franch., *R. Henryi* Franch. et autres, encore insuffisamment connues. Le *R. alpinum* L. est commun à l'Asie et à l'Europe, *R. orientale* à l'Asie (occidentale et centrale) la Grèce et l'Italie. Enfin le *R. sardoum* Martelli, fut assez récemment découvert dans les montagnes de la Sardaigne. Aucune espèce n'habite donc le nouveau monde.

3. Grossularioides nob. [1]).

Arbustes piquants, peu élevés, d'un port semblable à celui de notre groseiller épineux. Bourgeons petits, à écailles scarieuses. Glandes cristallines, pédonculées, quelquefois portées par des soies coniques. Feuilles petites ou presque moyennes, rarement munies d'aiguillons sur les deux faces (*R. lacustre var. horridum*), plissées en bourgeon. Bourgeons à fleurs terminaux sur brindilles et lambourdes, axillaires sur brindilles et scions. Grappe réclinée. Fleurs moyennes, bisexuées. Ovaire hérissé de soies à glandes cristallines rouges, articulé avec le pédicelle distinct. Fruit petit ou moyen, rouge ou noir, un peu hispide. Deux espèces: *R. montigenum* Mc Clatchie (*R. lacustre var. molle* Gray), habitant les montagnes Rocheuses, Sierra Nevada et autres de l'ouest de l'Amérique septentrionale, et *R. lacustre* Poiret, étendu dans ce pays depuis l'Atlantique jusqu'au Pacifique et au delà, sur l'île de Sachalin et en Mandchourie orientale.

4. Grossularia A. Rich. [2]).

Arbustes armés d'aiguillons. Bourgeons petits, à écailles scarieuses. Feuilles caduques, petites ou moyennes, quelquefois coriaces

[1]) Berlandier confondit ce type avec les groseillers épineux, Spach et Maximowicz avec les groseillers à grappes. En réalité, il constitue un lien entre les *Ribesia* et *Grossularia*, et ne peut être incorporé ni à l'un ni à l'autre.

[2]) Ce nom fut adopté par Ach. Richard pour les groseillers épineux. Berlandier mit dans les *Grossularia* le *R. lacustre* Poir. (un *Grossularioides*) et le *R. cuneifolium* Ruiz et Pav. (un *Calobotrya*), Maximowicz son *R. ambiguum* (un *Calobotrya*).

(*R. speciosum* Pursh), plissées en bourgeon. Glandes cristallines, rarement visqueuses, pédonculées ou portées par des soies coniques, quelquefois remplacées par des aiguillons. Bourgeons à fleurs terminaux sur brindilles et lambourdes. axillaires sur scions et brindilles. Grappe corymboïde, pauvre, ordinairement bi- ou triflore, souvent subsessile. Fleurs moyennes ou assez grandes et ornementales, bisexuées, rarement tétramères et tubuleuses (*R. speciosum* Pursh), ordinairement à sépales réfléchis (*R. Grossularia* L., *R. niveum* Lindl., *R. cynosbati* L., *R. divaricatum* Dougl., *R. stenocarpum* Maxim. et autres), quelquefois réclinés (*R. Lobbii* Gray, *R. Menziesii* Pursh, *R. subvestitum* Hook. & Arn.) pendant l'anthèse. Anthères glabres, quelquefois pubescentes (*R. niveum* Lindl.), même glanduleuses sur le dos (*R. Lobbii* Gray), ou sagittées (*R. Menziesii* Pursh, *R. subvestitum* Hook et Arn.). Ovaire glabre (*R. divaricatum* Dougl., *R. oxyacanthoides* L. et autres), pubescent (*R. Grossularia* L. *var. uva crispa),* épineux (*R. burejense* Fr. Schmidt, *R. Menziesii* Pursh, *R. Watsonianum* Koehne, *R. pinetorum* Greene, *R. cynosbati* L.) ou couvert de soies glanduleuses (*R. grossularia* L., *R. subvestitum* Hook. et Arn.) ou de glandes subsessiles (*R. Lobbii* Gray). L'ovaire est toujours pédonculé; la fleur tombe avec le pédoncule qui est articulé avec un pédicelle réduit à un petite excroissance quelquefois munie de bractéoles (*R. subvestitum*). Fruit petit, moyen ou gros. de couleur différente, glabre, pubescent, hispide ou armé d'aiguillons, comme l'ovaire, succulent ou dur, comestible ou insipide. Une vingtaine d'espèces bien variables, habitant pour la plupart l'Amérique du Nord; quelques-unes sont asiatiques, une seule européenne, le *R. Grossularia* L., habitant aussi les monts Atlas en Afrique.

5. Calobotrya (Spach) nob [1]).

Arbustes inermes, érigés, quelquefois humbles et presque rampants (*R. prostratum* L'Hérit., *R. laxiflorum* Pursh). Bourgeons moyens ou gros, couverts d'écailles herbacées. Feuilles petites, moyennes ou grandes, caduques, quelquefois coriaces et persistantes, plissées, rarement involutées en bourgeon (*R. aureum* Pursh). Glandes visqueuses (souvent odorantes), rarement cristallines, pédonculées, por-

[1]) Ce nom fut donné par Spach (Rev. Gross.) au *R. sanguineum* Pursh, ensuite abandonné (Hist. vég. phan.) par cet auteur qui finit par incorporer cette espèce dans son genre *Coreosma,* à côté du *R. floridum* L'Hérit.

tées quelquefois sur des soies assez rigides. Bourgeons à fleurs terminaux sur lambourdes, brindilles, quelquefois aussi sur scions, axillaires sur brindilles et scions. Grappes normales, réclinées ou érigées, quelquefois produites sur de courtes brindilles de l'année (*R. Maximowiczii* Batal., *R. molle* de Poeppig); grappes corymboïdes (*R. viscosissimum* Pursh), capituliformes (*R. cereum* Dougl.), ombelles pauciflores sessiles, ou fleurs solitaires (*R. ambiguum* Maxim). Fleurs de grandeur très différente, quelquefois ornementales, même odorantes, bisexuées, dioïques dans quelques espèces de l'Amérique méridionale. Ovaire glabre ou hérissé de poils glanduleux, pédonculés ou subsessiles, plus rarement pubescent, articulé avec le pédicelle. Fruit habituellement noir, pruineux, ou rouge, hispide, glabre ou pubescent, dur ou pulpeux, doux ou insipide. Environ une trentaine d'espèces habitant presque toutes l'Amérique occidentale, tant septentrionale que méridionale. Seulement le *R. aureum* Pursh s'étend depuis le Pacifique presque jusqu'aux monts Alléghanes, le *R. laxiflorum* Pursh traverse même le Pacifique pour habiter le Japon et la Mandchourie orientale, le *R. prostratum* L'Hérit. habite le nord, depuis les montagnes Rocheuses jusqu'à l'Atlantique. — Deux espèces sont asiatiques, le *R. ambiguum* Maxim. au Japon, le *R. Maximowiczii* Batal. en Chine centrale (Kansu oriental); aucune n'habite l'Europe.

6. Coreosma (Spach) nob [1]).

Arbustes érigés, parfois presque rampants (*R. procumbens* Pallas). Bourgeons moyens, couverts d'écailles herbacées, quelquefois pubescentes. Feuilles très grandes (*R. bracteosum* Dougl.), ordinairement moyennes ou petites, quelquefois ovoïdes ou lancéolées (*R. viburnifolium* Gray, *R. integrifolium* Phil., *R. nubigenum* Phil.), caduques, semi-persistantes, ou coriaces et complètement persistantes (*R. villosum* Gay, *R. sublobatum* Phil.), plissées en bourgeon. Glandes huileuses, jaunes, plates, rondes, sessiles, très nombreuses ou rares (*R. nubigenum* Phil.). Bourgeons à fleurs terminaux et axillaires. Grappe quelquefois très longue (*R. bracteosum* Dougl.), érigée ou réclinée,

[1]) Ce nom fut donné par Spach (Rev. Gross.) à une section renfermant les: *R. floridum* L'Hérit. *R. Kunthii* Berl., *R. campanulatum* HB, et *R. viscosum* R. & Pav., ensuite employé (Hist. végét. phan.) comme nom de genre embrassant le *R. floridum* l'Hér. et *R. sanguineum* Pursh.

rarement avec une ou deux fleurs basales remplacées par des grappes secondaires (*R. nigrum* L.), transformée, par réduction des pédicelles, en épi terminant une brindille de quelques centimètres (*R. villosum* Gay), ou en ombelle biflore (ou uniflore) sessile (*R. nubigenum* Phil). Fleurs bisexuées, rarement dioïques (*R. villosum*). Ovaire quelquefois glabre (*R. floridum* L'Hérit.), ou pubescent (*R. villosum* Gay, *R. valdivianum* Phil.), ordinairement couvert de glandes huileuses, aromatiques, articulé avec le pédicelle. Fruit glabre, pubescent ou glanduleux, ordinairement noir, quelquefois légèrement pruineux, ou rouge, pulpeux ou dur (?), sucré, acidulé ou insipide. Une vingtaine d'espèces, peut-être davantage, habitant surtout les montagnes de l'Amérique méridionale jusqu'à la Terre de Feu (*R. magellanicum* Poiret), peu nombreuses en Amérique septentrionale (*R. bracteosum* Dougl., *R. hudsonianum* Richards., *R. floridum* L'Hérit., *R. viburnifolium* Gray) et en Asie, où elles lui sont particulières (*R. procumbens* Pall.) ou très proches des espèces américaines (*R. japonicum* Maxim. du *R. bracteosum* Dougl., *R. Dikuscha* Fischer du *R. hudsonianum* Richards.). Enfin le seul *R. nigrum* L. habite l'Europe et l'Asie, jusqu'aux monts Himalaya et le Kamtchatka.

---

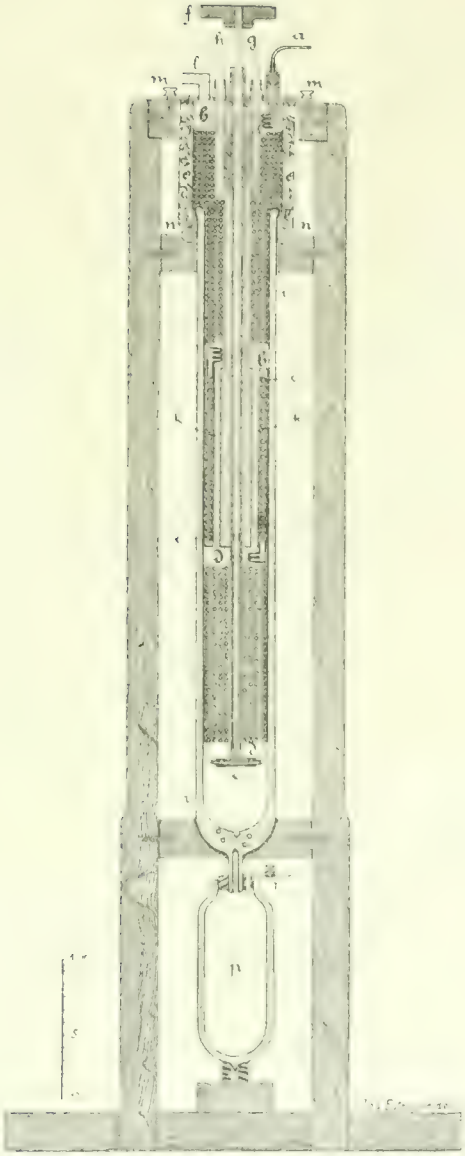
21. M. K. OLSZEWSKI m. t. **Nowy przyrząd do skraplania wodoru.** ***(Ein neuer Apparat zur Verflüssigung des Wasserstoffs).*** *(Un appareil nouveau pour la liquéfaction de l'hydrogène).*

In meiner früheren Abhandlung[1]) habe ich zwei Luftverflüssigungs- sowie einen Wasserstoffverflüssigungsapparat beschrieben. Unlängst habe ich einen neuen Wasserstoffverflüssiger erprobt, mit dessen Herstellung ich während der letzten Monate beschäftigt war. Die Probe ist sehr gut ausgefallen und hat bewiesen, dass dieser neue Apparat während der Verflüssigung des Wasserstoffs noch besser funktioniert als der von mir vorher beschriebene und dass er sowohl zur Verflüssigung von grösseren Mengen Luft wie auch zur demonstrativen Verflüssigung derselben Anwendung finden kann. Das Prinzip des Apparates ist dasselbe geblieben; der Unterschied

[1]) Rozprawy Wydz. Mat.-Przyr. Akad. Kraków, XLII, 457; 1902. — Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. Décembre 1902.

besteht hauptsächlich darin, dass die beiden Regeneratoren sowie der dazwischenliegende Kühler, welcher zur Aufnahme der flüssigen Luft dient, in demselben Vakuumgefässe untergebracht worden sind. Auf diese Weise wurde eine bessere Wärmeisolierung aller Apparatenteile erreicht, wodurch die Menge der flüssigen Luft, die zur Abkühlung des Apparates und des Wasserstoffs erforderlich ist, erheblich reduziert wurde. Es entfiel auch die Notwendigkeit, Wolle zur Isolierung des Apparates anzuwenden, wodurch die Ausmasse sowie das Gewicht des Apparates beträchtlich verkleinert wurden und der Apparat ein stattlicheres und übersichtlicheres Aussehen gewann.

Die beigefügte Figur stellt einen vertikalen Durchschnitt durch den Apparat dar. Der Verflüssiger *dd,* der Kühler *bd* und der Regenerator *bb* sind an einer Neusilberröhre befestigt, welche mit ihrem oberen Ende an die Messingplatte *mm* mit Hilfe einer entsprechenden Mutter, welche gleichzeitig zum Abdichten der Ventilstange *fe* dient, angeschraubt ist. Die Schrauben *m, m* dienen zum Befestigen der Messingplatte und somit des ganzen metallenen Teiles des Apparates an dem hölzernen Gestell. Der Verflüssiger *dd,* sowie der untere, engere Teil des Regenerators *bb* sind mit Flanell so umwickelt, dass sie in das Vakuumgefäss *ii* mit leichter Reibung hineinpassen; das Gefäss ist mit Ausnahme des unteren Teiles unterhalb des Ventils *e* innen versilbert. Das Messingrohr *oo,* welches im oberen Teile an den Messingdeckel dicht angeschraubt ist, ruht mit dem unteren Teile auf dem Kautschukringe *nn;* so dass man durch Anziehen der Schrauben *m, m* einen gasdichten Abschluss zwischen dem oberen Teile des Apparates *mm* und dem Vakuumgefässe *ii* erreichen kann. Der Raum zwischen dem Rohre *oo* und dem erweiterten Teile des Regenerators *bb* ist behufs Isolation mit Flanell ausgefüllt. Das Röhrchen *g* dient zum Hineingiessen von flüssiger Luft in den Kühler *bd,* die verdampfende Luft entweicht durch die Röhre *h* nach aussen. Aus dem Kompressor, bezw. aus dem Hochdruckreiniger, welcher mit Kalistangen beschickt ist, gelangt der Wasserstoff durch die Röhre *a* in den Regenerator *bb* und darauf durch die abgekühlte Spirale *cc* in den Verflüssiger *dd,* welcher in einem Ventil *e* endet; dieses Ventil, welches mittels des Griffrädchens *f* reguliert werden kann, dient zum Entspannen des Wasserstoffs. Das expandierte Gas strömt auf dem Rückwege zwischen den Windungen des Verflüssigers *dd*



hindurch und gelangt dann durch die Röhrchen *kk*, welche sich in dem Kühler *bd* befinden, zwischen die Windungen des Regenerators *bb* und entweicht schliesslich durch die Röhre *l* nach aussen, beziehungsweise zurück in das Gasometer und in den Kompressor.

Die Ausmasse der wichtigeren Teile des Apparates sind folgende: der Verflüssiger *dd* und der Regenerator *bb* bestehen aus je drei Kupferröhren, welche einander parallel gewickelt sind, ähnlich wie die Drähte der sekundären Spulen grösserer Induktoren. Der äussere Durchmesser der Röhren ist 2 mm, der innere 1·2 mm, die Höhe der Spirale *dd* 140 mm, die Weite derselben 48 mm, die Höhe des engeren Teiles der Spirale *bb* 120 mm, die Weite 48 mm, die Höhe des weiteren Teiles derselben Spirale 50 mm, die Weite 68 mm. Die Länge des Kühlers *bd* 140 mm, die Weite 50 mm, der äussere Durchmesser des Kupferrohres *cc* 3·8 mm, der innere 2·4 mm; die lichte Weite der Röhrchen *kk* 6 mm, die lichte Weite des Röhrchens *l* 8 mm, die Länge der Messingröhre *oo* 100 mm, ihre Weite 90 mm. Die innere Tiefe des Vakuumgefässes *ii* 500 mm, die innere Weite 51 mm, der äussere Durchmesser 65 mm, der Fassungsraum des Recipienten *p* 200 cm^3. Die ganze Höhe des Apparates bis zu der Messingplatte *mm* 810 mm. Zum Bau der Regeneratoren wurden Kupferröhren von möglichst kleiner lichter Weite angewandt, um die kühlende Oberfläche zu vergrössern; eine grössere Anzahl der Röhren vermindert die übermässige Reibung des Gases. Die angegebenen Dimensionen des Apparates haben sich bei der Verflüssigung des Wasserstoffs sowie bei der Verflüssigung der Luft während einer Vorlesung sehr gut bewährt. Sollte der Apparat auch zur Verflüssigung grösserer Mengen Luft (3—6 Liter pro Tag) Verwendung finden, dann würde eine geringe Vergrösserung (um $^1/_5$) der lichten Weite aller Röhren und Gefässe angezeigt sein, wobei die Länge der einzelnen Teile sowie die Höhe des ganzen Apparates (um $^1/_{10}$) kleiner ausfallen könnte.

Um Wasserstoff zu verflüssigen, muss man bekanntlich zuerst den Regenerator *dd* auf die Temperatur der flüssigen Luft abkühlen. Von den verschiedenen Kühlungsmethoden, welche angewandt werden können, hat sich die folgende als die beste erwiesen: man giesst in den Kühler *db* flüssige Luft durch das Röhrchen *g* solange hinein, bis die Flüssigkeit durch das Röhrchen *h* in Gestalt kleiner Tröpfchen herauszuspritzen anfängt; darauf verbindet man die Röhre *a* mit einer Stahlflasche, von 13 Liter Fassungsraum, welche tro-

ckene und kohlensäurefreie Luft unter einem Drucke von etwa 100 Atm. enthält, sowie mit einem Metallmanometer, welches an der rechten Seite des hölzernen Gestelles befestigt werden kann. Durch Öffnen des Ventils *e* mit Hilfe des Griffrades *f* bewirkt man die Entspannung der Luft, welche im Kühler *bd* auf die Temperatur der siedenden Luft abgekühlt wird, und innerhalb 4—5 Minuten den Regenerator *dd* auf diese Temperatur abkühlt. Wenn sich im unteren Teile des Gefässes *ii* etwa 20—30 cm^3 flüssige Luft angesammelt haben, verschliesst man die Flasche mit komprimierter Luft, wodurch der Druck im Apparate in kurzer Zeit auf 1 Atm. sinkt. Man verbindet darauf den Apparat mit Hilfe des Rohres *a* mit dem Kompressor bezw. mit dem Hochdruckreiniger des Hampsonschen Apparates, welcher Wasserstoff unter einem Drucke von etwa 150 bis 200 Atm. enthält, und leitet in den Apparat Wasserstoff hinein, indem man das Ventil des Reinigers vorsichtig aufmacht; zuerst leitet man den Wasserstoff unter schwachem Druck hinein, wodurch der Rest der flüssigen Luft, welche sich im Regenerator *dd* befindet, entfernt wird. Die flüssige Luft, welche sich im Gefässe *ii* aufgesammelt hat, wird in das Gefäss *p* durch Öffnen des Hahnes *r* abgelassen; das Gefäss *p*, welches mit dem Abflussrohre des Gefässes *ii* mit Hilfe eines Kautschukstopfens verbunden ist, kann leicht abgenommen und die verflüssigte Luft aus demselben herausgegossen werden.

Eine Stahlflasche, welche Luft unter einem Drucke von 100 Atm. enthält, kann einige Male zum Abkühlen des Apparates dienen. Diese Kühlungsmethode ist auch aus dem Grunde vorteilhaft, weil die flüssige Luft mit dem Flanell, welches zur Abdichtung des Regenerators *dd* dient, nicht in Berührung kommt und deshalb leichter aus dem Apparate zu entfernen ist.

Nach wiederholter Abdichtung des Recipienten *p* lässt man Wasserstoff noch einige Minuten durch den Apparat unter kleinem Drucke strömen, um die Luft gründlich zu entfernen. Nachdem dieses geschehen ist, verschliesst man das Expansionsventil *e* und setzt den Kompressor in Gang; wenn der Druck auf 200 Atm. gestiegen ist, beginnt man die Expansion, bezw. lässt man den Wasserstoff zirkulieren, indem man das Ventil *e* vorsichtig aufmacht. Um die Entspannung zu regulieren, bedient man sich der Angaben des oben erwähnten Metallmanometers für hohe Drucke, sowie eines Glycerinmanometers (welches in der Zeichnung nicht ersichtlich

ist); dieses ist oben an der linken Seite des hölzernen Gestelles befestigt und mit dem Röhrchen *l* mittels einer entsprechenden Abzweigung verbunden. Beinahe gleichzeitig mit dem Beginn der Entspannung des Wasserstoffs fängt die dieses Gas verunreinigende Luft an zu erstarren; nach Ablauf einer Minute ungefähr beginnt auch der Wasserstoff sich zu verflüssigen und sammelt sich im unteren Teile des Gefässes *ii* an. Durch Lüften des Hahnes *r* lässt man den flüssigen Wasserstoff durch ein Leinwandsieb (welches in der Figur nicht abgebildet ist) in den versilberten Recipienten *p* hinunterfliessen. Nach Ablauf von 8 bis 10 Minuten vom Beginn des Expandierens an gerechnet füllt sich der Recipient von 200 cm³ Fassungsraum vollständig mit flüssigem Wasserstoff an. Die zum Abkühlen des Apparates sowie zum Verflüssigen von 200 cm³ Wasserstoff verbrauchte Menge flüssiger Luft betrug blos 1700 gr. Die Verflüssigung weiterer Portionen Wasserstoff erfordert in dem bereits abgekühlten Apparate nur noch eine kleine Luftmenge. In einem versilberten Vakuumgefässe hält sich der flüssige Wasserstoff verhältnismässig lange; die vollständige Verflüchtigung einer Portion von 200 cm³ dieser Flüssigkeit fand erst nach Verlauf von fünf Stunden statt, obwohl dieselbe Portion zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit von sieben Spulen mit aufgewickelten Metalldrähten diente.

Der oben beschriebene Apparat funktioniert im allgemeinen tadellos; ich bemerkte nicht einmal eine zeitweilige Verstopfung des Expansionsventils, obwohl der Wasserstoff wahrscheinlich infolge des Undichtwerdens des Kompressors während des Versuches ziemlich stark mit Luft verunreinigt wurde. Die Analyse des Wasserstoffs nach Beendigung des Experimentes ergab einen Gehalt von 0·9% Sauerstoff. Das regelmässige Funktionieren des Expansionsventils ist dadurch erzielt worden, dass der Regenerator *dd* aus drei parallelen Kupferröhren zusammengewickelt ist sowie dass das Gewinde der Ventilstange in den unteren Teil des Kühlers *bd* versetzt worden ist, an welchem Orte die den Wasserstoff verunreinigende Luft nicht erstarren und die Bewegungen des Ventils nicht hemmen kann. Um jedoch die Verstopfung der dünnen Kupferröhrchen des Regenerators zu verhüten, soll man sie vor einem jeden Experimente genau trocknen, indem man durch dieselben vermittels einer Pumpe Luft durchzieht.

Krakau, I chemisches Universitätslaboratorium.

22. M. JOSEPH PUZYNA m. c. **O sumach nieskończenie wielu szeregów potęgowych i o twierdzeniach Mittag-Lefflera z teoryi funkcyi.** *(Über Summen unendlich vieler Potenzreihen und über die funktionen-theoretischen Sätze des Herrn Mittag-Leffler). (Sur les sommes d'un nombre infini de séries entières et sur le théorème de M. Mittag-Leffler).*

Der Verfasser beschäftigt sich im I Teile dieses Aufsatzes mit der Summe

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} \Psi_s(x)$$

unendlich vieler Potenzreihen

$$\Psi_s(x) = a_{s0} + a_{s1}x + a_{s2}x^2 + \ldots\ldots, \quad s = 1, 2, 3, \ldots.$$

Soll diese Summe im gemeinsamen Konvergenzbereiche (r) ihrer Addenten nicht nur gleichmässig, sondern auch absolut konvergieren so gilt der Satz, dass in ihrer Entwickelung nach Potenzen von x:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots \tag{1}$$

die Koëffizienten

$$A_\mu = a_{1\mu} + a_{2\mu} + a_{3\mu} + \ldots, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

ohne Ausnahme unbedingt konvergierende Reihen sein müssen.

Um die Umkehrung dieses Satzes ganz allgemein zu beweisen, wird die Summe S untersucht, ohne irgend welche Voraussetzungen über ihre Konvergenz resp. Divergenz in (r) zu machen.

Wenn man mit $R_s(x)$ den Rest

$$R_s(x) = a_{s,\nu_s} . x^{\nu_s} + \ldots\ldots$$

des Addenten $\Psi_s(x)$ bezeichnet, so kann man stets solche — mit s wachsende — Zahlen ν_s finden, welche die Grenze $\lim_{s=\infty} \nu_s = \infty$ erreichen und für welche die Summe

$$T_{\nu_1 \nu_2 \ldots} = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(x)$$

in (r) gleichmässig und absolut konvergent wird. Der Beweis stützt sich auf die Vergleichung der Reihe $\Sigma\, |R_s(x)|$ mit einer beliebigen konvergenten Reihe: $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots.)$ von lauter positiven Addenten ε_s. Die Summe $T_{\nu_1 \nu_2 \ldots}$ wird als eine dem S adjungierte Summe bezeichnet.

Es fragt sich nun, ob die Fälle vorkommen können, in welchen

auch $\lim_{s=\infty} \nu_s$ endlich sein kann. Dazu ist augenscheinlich notwendig (aber nicht hinreichend), dass

$$(A) \quad \lim_{s=\infty} \mathfrak{P}_s(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{c-1} x^{c-1} + 0 \,.\, x^c + 0 \,.\, x^{c+1} + \ldots\ldots$$

wird, und diese Bedingung lässt sich ohne Mühe direkt aus der gegebenen Summe S entnehmen.

Um nun auch die hinreichenden Bedingungen für die Endlichkeit aller ν_s zu bestimmen, wird zuerst die Summe $S = \sum_{s=1}^{\infty} \mathfrak{P}_s(x)$ von der Eigenschaft untersucht, dass sie die Bedingung

$$\text{(a)} \qquad \lim_{s=\infty} \mathfrak{P}_s(x) = 0 + 0\,x + 0\,x^2 + \ldots.$$

erfüllt und dass ihre formelle Entwickelung $\Sigma A_\mu x^\mu$ lauter unbedingt konvergierende Koëffizienten A_μ — mit endlichem oder divergierendem $\lim A_\mu$ — besitzt. Im ersten Falle ist die Reihe $\Sigma A_\mu x^\mu$ sicher konvergent. Im zweiten Falle wird ihre Konvergenz auf folgende Weise bewiesen.

Scheidet man aus S die Summe

$$T_{\nu_1 \nu_2 \ldots} = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots$$

mit $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots$ und mit $\lim \nu_s = \infty$ aus, so hat die Reihe $\Sigma B_\mu x^\mu$, als Entwickelung einer gleichmässig (und absolut) konvergenten Summe sicher einen bestimmten Konvergenzbereich.

Setzt man

$$\mathfrak{P}_s(x) = P_s(x) + R_s(x), \quad s = 1, 2, \ldots.$$

und wird noch die Summe

$$T'_{\nu_1 \nu_2 \ldots} = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(x),$$

deren formelle Entwickelung mit

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots$$

bezeichnet wird, gebildet, so sind die Koëffizienten C_μ alle endlich, denn in den hier bestehenden Gleichungen $B_\mu + C_\mu = A_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots.$, sind die Grössen A_μ und B_μ endlich.

Die Grenze

$$\lim_{\mu=\infty} C_\mu \text{ ist} = 0$$

infolge der Bedingung (a). Die Reihe $C_0 + C_1 x + \ldots.$ ist demnach konvergent und da

$$(B_0 + B_1 x + \ldots) + (C_0 + C_1 x + \ldots) = A_0 + A_1 x + \ldots$$

ist, so hat die Potenzreihe $\Sigma A_\mu x^\mu$, welche bis jetzt nur formell existierte, sicher (auch im Falle $\lim A_\mu = \infty$) einen bestimmten Konvergenzbereich. Da nun die Koëffizienten A_μ unbedingt konvergieren ($\lim A_\mu$ bleibt unendlich bei jeder Anordnung der Addenten), so muss S in ihren Addenten $\Psi_s(x)$ absolut konvergent sein. Dies zieht auch die gleichmässige Konvergenz nach sich[1]) und berechtigt die Gleichheit

$$S = A_0 + A_1 x + \ldots$$

für richtig zu halten.

Die Umkehrung des zu Anfang ausgesprochenen Satzes ist demnach bewiesen.

Jetzt kann die Frage nach den hinreichenden Bedingungen der Endlichkeit aller Zahlen ν_s beantwortet werden.

Betrachtet man wieder eine allgemeine Summe S und sind unter den Koëffizienten

$$A_0, \; A_1, \; A_2 \ldots\ldots$$

der Entwickelung (1), welche jetzt, da man über die Konvergenz der Summe S nichts vorausgesetzt hat, wieder nur formell existiert, die Koëffizienten

$$A_m, \; A_{m+1} \ldots\ldots\ldots$$

ohne Ausnahme brauchbar d. h. unbedingt konvergent, während dagegen A_{m-1} unbrauchbar (divergent oder bedingt konvergent) ist[2]), so ist jetzt klar, dass man allen Zahlen ν_s den gleichen Wert m oder $(m+1)$ u. s. w. beilegen und dem S die Summen

$$T_m, \; T_{m+1} \ldots\ldots\ldots$$

mit allen ν_s resp. $=$

$$= m, \; m+1, \ldots$$

adjungieren kann. Diese Summen werden als die dem S adjungierten Summen vom Range: m, $(m+1)$, u. s. w. bezeichnet.

[1]) Dasselbe lässt sich von der Summe $T'_{\nu_1 \nu_2 \ldots}$ behaupten. $[T'_{\nu_1 \nu_2 \ldots} + T_{\nu_1 \nu_2 \ldots} = S]$.

[2]) Unter den Koëffizienten A_0, A_1, A_{m-2} können sowol brauchbare wie unbrauchbare vorkommen. Die Grenze $\lim_{\mu=\infty} A_\mu$ kann divergent sein.

Es ist daher neben der Bedingung (a) die Brauchbarkeit der Koëffizienten A_μ — von einem bestimmten $\mu = m$ angefangen — auch die hinreichende Bedingung dafür, um in der Adjunktion der Summen $T_{\nu_1 \nu_2 \ldots\ldots}$ nur endliche Zahlen ν_s benützen zu können.

Ist $m = 0$, sind also die Koëffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ alle brauchbar, so ist die Summe S selbst ein T_0. Sie ist notwendig gleichmässig und absolut konvergent.

Die oben angeführten und bewiesenen Sätze werden im II Teile zur eingehenderen Diskussion der funktionen-theoretischen Theoreme von Herrn Mittag-Leffler[1]) benützt.

Soll nämlich eine Funktion gebildet werden, welche in einer unendlichen Punktmenge (a_s) mit einer einzigen Häufungsstelle im Unendlichen singulär sein soll und ihre Singularitäten durch die Addenten

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right) = \frac{C_{s1}}{x-a_s} + \frac{C_{s2}}{(x-a_s)^2} + \ldots\ldots$$

— [G_s sind ganze, rationale oder transzendente Funktionen] — aufweist, so verfährt man bekanntlich auf folgende Weise:

Man entwickelt vor allem $G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$. Ist diese Entwickelung

$$(2) \qquad \Phi_s(x) = A_{s0} + A_{s1}x + A_{s2}x^2 + \ldots\ldots,$$

so hat man:

$$A_{s\mu} = -\left[\binom{-\mu-1}{0}\frac{C_{s1}}{a_s} - \binom{-\mu-1}{1}\frac{C_{s2}}{a_s^2} + \right.$$
$$\left. + \binom{-\mu-1}{2}\frac{C_{s3}}{a_s^3} - \ldots\right]\frac{1}{a_s^\mu}.$$

Da nun $C_{s1}, C_{s2}, \ldots\ldots$ als Koëffizienten einer beständig konvergierenden Reihe — für endliche s — alle endlich sind und da daher ihre absoluten Beträge eine endliche obere Grenze g_s besitzen, so wird — wenn man dasselbe von $C_{s1}, C_{s2}, \ldots$ für $s = \infty$ voraussetzt —

[1]) Acta math. Bd. 4.; Weierstrass, Abhandlungen aus der Funktionenlehre.

$$|A_{s\mu}| < \frac{g_s}{|a_s|^{\mu+1}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{|a_s|}\right)^{\mu+1}} \qquad s = 1, \ldots, \infty \tag{3}$$

Beachtet man nun, dass $|a_s|$ für sehr grosse s selbst sehr gross werden und dass $\lim_{s=\infty} a_s| = \infty$ ist, so wird aus den letzten Ungleichheiten gefolgert, dass:

1⁰) alle Koëffizienten in (2) für hinreichend grosse s beliebig klein gemacht werden können,

2⁰) $\lim_{s=\infty} A_{s\mu} = 0, \; [\mu = 0, 1, 2, \ldots]$

und

3⁰) $\lim_{s=\infty} \Phi_s(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots\ldots$

wird.

Im vorliegenden Falle wird daher die notwendige Bedingung dafür, dass man der Summe

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \Phi_s(x),$$

deren formelle Entwickelung mit $\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu x^\mu$, $\left(A_\mu = \sum_{s=1}^{\infty} A_{s\mu}\right)$, bezeichnet sein soll, ein T_m eines bestimmten Ranges m adjungieren könnte, stets erfüllt. Man wird daher gezwungen, nach den hinreichenden Bedingungen zu fragen.

Diese ergeben sich aus den Ungleichungen (3). Setzt man nämlich dort für g_s die obere Grenze g aller

$$G_k, \; s = 1, 2, 3, \ldots \infty, \; k = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

und für $\left\{1 - \frac{1}{|a_s|}\right\}^{-\mu-1}$ die obere Grenze $\left\{1 - \frac{1}{|a_1|}\right\}^{-\mu-1}$ ein, so wird

$$A_{s\mu}| < \frac{g}{|a_s|^{\mu-1}} \cdot \frac{1}{\left\{1 - \frac{1}{|a_1|}\right\}^{\mu+1}}$$

Daraus kommt:

$$\left|\sum_{s=1}^{\infty} A_{s\mu}\right| = \left|A_\mu\right| < \frac{g}{\left\{1 - \frac{1}{|a_1|}\right\}^{\mu+1}} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{|a_s|^{\mu+1}}$$

und dies beweist, dass die Brauchbarkeit der Koëffizienten A_μ eine Folge der unbedingten Konvergenz der Summen

$$K_{\mu+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{|a_s|^{\mu+1}} \quad \mu = 0, 1, \ldots$$

ist. Sind nun die Summen $K_{\mu+1}$ für $\mu \geqq m$ alle unbedingt konvergent, während K_m noch divergent ist oder bedingt konvergiert, so sind die Koëffizienten $A_m, A_{m+1}, \ldots$ brauchbar und dem S können $T_m, T_{m+1}, \ldots$ adjungiert werden. Dieses Kennzeichen der Existenz eines bestimmten Ranges wurde bis jetzt öfters an bekannten Funktionen wie $\sec x$, $\zeta(x)$, $p(x)$ u. s. w. bemerkt. Es gilt — wie aus dem Obigen hervorgeht — für eine sehr ausgedehnte Klasse von Funktionen [mit endlichen $\lim_{s=\infty} C_{sk}$, $k = 1, 2, \ldots$] und kann bei jeder beliebigen Funktion der hier betrachteten Art angewendet werden.

Setzt man also

$$P_s(x) = A_{s0} + A_{s1} x + \ldots + A_{s,m-1} x^{m-1}$$
$$\text{oder} = A_{s0} + A_{s1} x + \ldots + A_{s,\nu_s-1} \cdot x^{\nu_s-1},$$

je nachdem die Existenz des Ranges m nachgewiesen werden konnte oder nicht, so kann eine der verlangten Funktionen die Form haben:

$$\text{(I)} \qquad f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) - P_s(x) \right].$$

Im Falle eines bestimmten Ranges m werden alle Funktionen, welche durch die Form (I) dargestellt werden und in welchen sich kein (äusserer) Addent, der eine ganze Funktion von x selbst wäre, vorfindet, einfache Funktionen m^{ten} Ranges genannt; [analog mit einfachen Produkten, welche Benennung H. Vivanti eingeführt hat].

Die Funktion $f(x)$ m^{ten} Ranges hat in $x = 0$ eine Nullstelle m^{ter} oder auch höherer, aber bestimmt keiner niederen Ordnung; denn man hat in der Umgebung der Stelle $x = 0$:

$$G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) - P_s(x) = A_{sm} x^m + \ldots\ldots = k_s(x),$$

und es lässt sich demnach aus allen Addenten der Summe (I) ein Faktor x^k, wo $k \geqq m$ ist, ausscheiden.

Um nun weiter die Funktion $f(x)$ m^{ten} Ranges in ihren Fortsetzungen zu untersuchen, werden die Gleichungen

$$\Phi_s(x) = P_s(x) + F_s(x)$$

in Betrachtung gezogen. Aus diesen — wenn man Φ_s, F_s von nun an in der Bedeutung analytischer Funktionen nimmt — ergeben sich in der Umgebung jedes beliebigen Punktes $x_0 \neq a_s$ folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} G_s\left(\frac{1}{(x-x_0)-(a_s-x_0)}\right) &= \Phi_s(x\,|\,x_0) = \\ = \Big[P_s(x_0)+F_s(x_0)\Big] &+ \frac{1}{1!}\Big[P_s'(x_0)+F_s'(x_0)\Big](x-x_0)+ \\ \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\Big[P_s^{(m-1)}(x_0)+F_s^{(m-1)}(x_0)\Big](x-x_0)^{m-1} &+ \\ + \frac{1}{m!}F_s^{(m)}(x_0).(x-x_0)^m + \frac{1}{(m+1)!}.F_s^{(m+1)}(x_0).(x-x_0)^{m+1} &+ \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Setzt man nun:

$$\sum_{h=0}^{m-1}\frac{1}{h!}\Big[P_s^{(h)}(x_0)+F^{(h)}(x_0)\Big](x-x_0)^h = Q_s(x-x_0)$$

und bildet die Summe:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{(x-x_0-(a_s-x_0)}\right)-Q_s(x-x_0)\right] \\ &= \sum_{s=1}^{\infty}\Big[\Phi_s(x\,|\,x_0)-Q_s(x-x_0)\Big], \end{aligned}$$

so wird diese sicher gleichmässig und absolut konvergierend, da man durch Substraktion des $Q_s(x-x_0)$ von $\Phi_s(x\,|\,x_0)$ die Glieder ausgeschieden hat, welche $P_s(x_0)$, $P_s'(x_0)\ldots$, $P_s^{(m-1)}(x_0)$ enthalten, also die Koëffizienten A_{s0}, $A_{s1},\ldots$, $A_{s,m-1}$, deren Summen $\sum_{s=1}^{\infty}A_{s0},\ldots,\sum_{s=1}^{\infty}A_{s,m-1}$ schon in der Entwickelung von $f(x)$ in (I) nach Potenzen von x unbrauchbar waren.

Berücksichtigt man nun, dass nach (4):

$$\Phi(x\,|\,x_0)-Q_s(x-x_0) = \frac{1}{m!}F_s^{(m)}(x_0).(x-x_0)^m+\ldots\ldots$$

ist, so hat man auch:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m!}F_s^{(m)}(x_0).(x-x_0)^m+\ldots\ldots\right] \\ &= \frac{f^{(m)}(x)}{m!}(x-x_0)^m+\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}+\ldots \end{aligned}$$

und, wenn man hier auf beiden Seiten die Summe

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(m-1)}(x_0)}{(m-1)!}(x-x_0)^{m-1} = g_{m-1}(x-x_0)$$

hinzuaddiert, gelangt man schliesslich zu folgender Formel:

$$f(x\,|\,x_0) =$$
$$= g_{m-1}(x-x_0) + \sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{(x-x_0)-(a_s-x_0)}\right) - Q_s(x-x_0)\right].$$

Die hier auftretende Summe ist wieder vom Range m, welcher auch ihr niedrigster Rang ist. Daraus ergiebt sich, dass die einfache Funktion $f(x)$ ihren, für die Umgebung des Punktes $x=0$ bestimmten Rang auch bei der Fortsetzung beibehält, hingegen ihre einfache Form verliert.

Nur an jenen Stellen, an welchen g_{m-1} identisch verschwindet — und diese sind Nullstellen der Funktion selbst von der Ordnung $\geqq m$ — tritt sie wieder in der einfachen Form auf.

Der Rang m ist demnach eine Invariante der gebildeten Funktion, und zwar in Bezug auf ihre Fortsetzung. Dieser Begriff der Invarianz des Ranges kann auf unendliche Produkte, welche Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen a_s darstellen sollen, übertragen werden.

Bilden a_s eine unendliche Punktmenge mit einer im Endlichen gelegenen Grenzstelle b, so hat man alle $G_s \frac{1}{(x-a_s)}$ in:

$$\Phi_s\left(\frac{1}{x-b}\right) = A_{s1}\frac{1}{x-b} + A_{s2}\frac{1}{(x-b)^2} + \ldots\ldots$$

zu entwickeln. Aus den

$$(5)\quad A_{s\mu} = \left[C_{s1}\,(a-b)^{\mu-1} + \binom{\mu-1}{2} C_{s2}(a_s-b)^{\mu-2} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \binom{\mu-1}{\mu} C_{s\mu}\right]$$
$$s = 1, 2, 3, \ldots, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

ersieht man, dass hier:

$$\lim_{s=\infty} A_{s\mu} = \lim_{s=\infty} C_{s\mu} \,.\, \mu = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

wird.

Bildet man nun die Summe

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \Phi_s\left(\frac{1}{x-b}\right)$$

mit ihrer formellen Entwickelung

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \left(\frac{1}{x-b}\right)^\mu; \quad A_\mu = \sum_{s=1}^{\infty} A_{s\mu}\,;$$

so ist hier die Möglichkeit der Adjunktion der Summen eines bestimmten Ranges von folgenden Umständen abhängig.

Die Grössen C_{sk}, als Koëffizienten beständig konvergierender Reihen $G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)$, sind alle für endliche s endlich. Es werden daher auch die Quotienten

$$\frac{|C_{sk}|}{|a_s - b|^k} \tag{a}$$

für alle endlichen s endlich sein.

Setzen wir noch voraus, dass auch die Grenzen

$$\lim_{s=\infty} \frac{|C_{sk}|}{|a_s - b|^k} \tag{b}$$

endlich sind und bezeichnen durch g die obere Grenze aller Quotienten (a), (b), so haben wir aus (5)

$$|A_{sk}| < |a_s - b|^k . g \,.\, 2^{\mu-1}.$$

Daraus ersieht man, dass:

$$|A_\mu| < 2^{\mu-1} . g \sum_{s=1}^{\infty} |a_s - b|^\mu$$

ist.

Soll nun der niedrigste Rang m existieren, so ist hinreichend, dass unter den Summen $K'_\mu = \sum_{s=1}^{\infty} (a_s - b)^\mu$ die Summen $K'_m, K'_{m+1}, \ldots$ ohne Ausnahme unbedingt konvergieren, während K'_{m-1} noch auf diese Weise nicht konvergiert.

Die hier gefundenen Bedingungen können — aber müssen nicht — erfüllt werden, wenn vor allem die Bedingung

$$\lim_{s=\infty} \Phi_s\left(\frac{1}{x-b}\right) = 0 \cdot \frac{1}{x-b} + 0 \cdot \left(\frac{1}{x-b}\right)^2 + \ldots$$

erfüllt wird [vgl. (5) und (6)].

Setzt man jetzt

$$P_s = A_{s1} \frac{1}{x-b} + \ldots\ldots + A_{s,m-1}\left(\frac{1}{x-b}\right)^{m-1}$$

$$\text{oder} = A_{s1} \frac{1}{x-b} + \ldots + A_{s,\nu_s-1}\left(\frac{1}{x-b}\right)^{\nu_s-1};$$

so kann bekanntlich eine der Funktionen, welche in a_s die mit $G_s\left(\frac{1}{x-b}\right)$ verursachten Singularitäten besitzen sollen, stets in der Form

$$\text{(II)} \qquad f(x)_b = \sum_{s=1}^{\infty} \left[G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right) - P_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)\right]$$

dargestellt werden.

---

23. M. STANISLAS DOBROWOLSKI. **O cytotoksynie łożyskowej.** ***(Über Cytotoxine der Plazenta).*** *(Sur les cytotoxines placentaires).* Mémoire présenté par M. T. Browicz m. t.

In den letzten fünf Jahren hat man viele Zellulargifte kennen gelernt, die man Cytotoxine benannt hat. Trotz der zahlreichen Arbeiten auf diesem Gebiete hat jedoch bisher niemand auf experimenteller Grundlage die Wirkung des Giftes sowol der tierischen als auch menschlichen Plazenta näher untersucht. Verfasser unternahm im bakteriologischen Institute des Prof. Nowak Experimente in dieser Richtung und untersuchte die Wirkung des plazentaren heterotoxischen Serums.

Verf. ging von der Voraussetzung aus, dass, wenn das heterotoxische Serum, welches für andere Gewebe bereitet wurde, die Fähigkeit besitzt, diese Gewebe zu vernichten, so muss auch das Plazenta-Serum in der Plazenta irgend welche Veränderungen hervorrufen.

Durch seine Experimente wollte Verf. folgende Fragen beantworten:

1) ob nach Einwirkung dieses Serums irgend welche anatomischen Veränderungen in der Plazenta entstehen?
2) ob dieses Serum bei trächtigen Tieren die Schwangerschaft unterbricht?
3) ob dieses Serum irgend welche Veränderungen im Organismus sowol trächtiger als auch nicht trächtiger Tiere hervorruft?
4) ob die in diesem Serum enthaltenen Toxine nur auf Tiere einwirken können, von denen die zur Herstellung des Plazentaserums verwendeten Mutterkuchen stammten, oder ob sie auch auf Tiere verwandter Arten einwirken können?

Vor allem untersuchte Verf. die Giftigkeit von Emulsionen, welche aus tierischen und ferner auch aus menschlichen bei normalen und eklamptischen Entbindungen erhaltenen Mutterkuchen hergestellt waren. Verf. injizierte Tieren die aus tierischen und menschlichen Nachgeburten erhaltene Emulsion subkutan und intraperitoneal und überzeugte sich, dass nur ganz grosse Mengen der Emulsion das zum Experimente angewendete Tier zu töten im stande sind; mittlere und kleinere Mengen rufen keine Veränderungen im tierischen Organismus hervor.

Die eigentlichen Experimente mit dem heterotoxischen Plazenta-Serum teilt Verf. in drei Gruppen ein: die erste umfasst die Experimente mit dem heterotoxischen Serum für Meerschweinchen, die zweite für Kaninchen, die dritte Experimente mit dem für den Menschen bereiteten Serum.

Behufs Gewinnung des für Meerschweinchen heterotoxischen Serums wurden die trächtigen Tiere mittelst Chloroform getötet, die Plazenten durch Laparotomie herausgenommen, durch Waschen in Wasser von Blut gereinigt, in einem sterilisierten Mörser zerrieben, mit sterilem Wasser verdünnt und die so erhaltene Emulsion einer Ziege in einer Menge von 8 - 16 *ccm* (3 Nachgeburten) viermal in Abständen von 10—15 Tagen injiziert. Drei Wochen nach der letzten Injektion entnahm Verf. der Ziege Blut und stellte aus demselben Serum her.

Dieses Serum injizierte Verf. zunächst zweimal einem nicht trächtigen Meerschweinchen in einer Menge von 4—12 *ccm* pro Kilo Körpergewicht, ohne irgendwelche Veränderungen bei demselben hervorzurufen.

Bei trächtigen Meerschweinchen bewirkte Verf. durch subkutane Injektion von 6—12 *ccm* Serum pro Kilo Körpergewicht immer

Abortus von toten oder noch lebenden unreifen Foeten, die sofort nach der Geburt verendeten. Die Schnelligkeit der Einwirkung des Serums stand in gleichem Verhältnisse zur Höhe der Dosis.

Wurde dieses Serum eine Stunde lang bis zu 60°C erhitzt und dann trächtigen Meerschweinchen selbst in doppelt so grossen Mengen wie früher injiziert, so wirkte dieses Serum gar nicht.

Ferner konstatierte Verf., dass kleine Mengen des Plazenta-Serums ohne jede Wirkung bleiben, gleichviel ob sie subkutan, intravenös oder in den Subduralraum injiziert wurden. Nach subduralen Injektionen beobachtete Verf. keine Veränderungen, die an eklamptische Krämpfe erinnern könnten; die Symptome, welche danach auftraten, entsprachen vollständig den Symptomen des erhöhten intrakraniellen Druckes, wie ein solcher nach Einführung einer gewissen Menge Flüssigkeit in den Subduralraum entsteht.

Verf. gelang es nicht, in dem gegebenen Serum Praezipitine nachzuweisen; in den Nachgeburten, welche bei durch Serum erwirkten Aborten gewonnen wurden, fand Verf. mit Ausnahme einer unbedeutenden Verfettung keine anderen Veränderungen.

Fernerhin konstatierte Verf., dass dieses Serum auch bei trächtigen Kaninchen nach subkutaner Injektion einer Menge von 2—3 *ccm* pro Kilo Körpergewicht Abortus hervorruft, dass aber die Wirkung sehr langsam eintritt.

Behufs Kontrolle der vorherigen Experimente injizierte Verf. trächtigen Meerschweinchen eine zweifache Menge von gewöhnlichem Serum einer Ziege, doch hatte dieses Serum weder auf die Schwangerschaft noch auf den Organismus des Tieres irgend welche Wirkung.

Heterotoxisches Plazenta-Serum für Kanichen gewann Verf. durch viermalige Injektion einer Emulsion von Kaninchen-Nachgeburten bei einem Schafe in einer Menge von 8—10 *ccm* in Zeiträumen von 10—15 Tagen. Das aus dem Blute eines solchen Schafes erhaltene Serum injizierte Verf. trächtigen Kaninchen und bewirkte auf diese Weise immer Abortus bei denselben. Wenn die Menge des Serums 5 *ccm* pro Kilo Körpergewicht des Tieres nicht überschritt, so blieben die Tiere nach der Injektion vollständig gesund. Abortus trat bei den Tieren um so schneller ein, je näher sie sich dem Schwangerschaftsende befanden. Nach Injektion von grösseren Mengen als 5 *ccm* pro Kilo Körpergewicht abortierten zwar die Kaninchen, starben aber kurz nach dem Abortus.

Wenn man die gleichen Mengen von Serum nicht trächtigen Kaninchen injizierte, so verursachten dieselben keine Veränderungen.

Kontrollversuche, bei denen Verf. trächtigen Kaninchen gewöhnliches Ziegen-Serum subkutan injizierte, bewiesen, dass dieses Serum auf die Tiere gar nicht wirkte.

Verf. konstatierte ferner, dass einstündiges Erhitzen des spezifischen Serums auf 60° C dessen Wirkung nicht vollständig aufhebt, sondern nur seine Giftigkeit bedeutend herabsetzt.

Die abortierten Nachgeburten zeigten bei der histologischen Untersuchung ausgedehnte Verfettung.

Die Untersuchung des Serums in Bezug auf Praezipitine ergab ein negatives Resultat. Bei den letzten Experimenten dieser Gruppe konstatierte Verf., dass das Kaninchen-Plazenta-Serum auf Tiere verwandter Gruppen sehr unsicher wirkt und dass kleine Mengen desselben, sei es intravenös, sei es subkutan, sei es subdural, trächtigen Kaninchen injiziert, keinen Abortus bewirken. Die subdurale Injektion von Serum ruft kein den eklamptischen Krämpfen ähnliches Krankheitsbild hervor.

Für die dritte Gruppe der Experimente bereitete sich Verf. ein heteroxisches Plazenta-Serum für Menschen. Die aus menschlichen Nachgeburten hergestellte Emulsion injizierte Verf. einem Ziegenbock und gewann aus dessen Blute das gewünschte Serum.

Obwol es Fälle gibt, wo man die bestehende Schwangerschaft bei Frauen unterbrechen muss, so wurden dennoch keine Versuche mit dem erhaltenen Serum ausgeführt, und zwar aus zwei Gründen: erstens, weil Verf. die Zahl seiner Experimente nicht für hinreichend genug hielt, um die wirksame, zur Hervorrufung des Abortus nötige Dosis bestimmen zu können, und zweitens deshalb, weil sich das Kaninchen-Plazenta-Serum bei einer gewissen Dosis giftig zeigte. Den Experimenten an Frauen müssen nach des Verf. Meinung sehr zahlreiche und auch kostspielige Experimente an höheren Tieren vorangehen, die die genaue Erforschung der Giftigkeit eines solchen spezifischen Serums ermöglichen würden und zugleich die Dosis feststellen liessen, die den Abortus hervorrufen könnte, ohne dabei dem mütterlichen Organismus einen Schaden zu bringen.

Das Serum der dritten Gruppe injizierte Verf. trächtigen Nagetieren subkutan, aber dasselbe rief bei ihnen, wie Verf. voraussah, keine Veränderungen hervor.

Aus allen diesen Experimenten zieht Verf. folgende Schlüsse:

1) Emulsionen von menschlichen oder tierischen Plazenten anderen Tieren in mässigen Dosen subkutan oder intraperitoneal injiziert sind für ihren Organismus unschädlich.
2) Nach den oben angegebenen Vorschriften kann man ein heterotoxisches Plazenta-Serum gewinnen, welches mit Bestimmtheit die Schwangerschaft unterbricht, gleichviel ob es subkutan, intravenös oder intraperitoneal injiziert wird.
3) Ganz kleine Mengen dieses Serums wirken gar nicht.
4) Grössere Mengen dieses Serums (über 5 *ccm* pro Kilo Körpergewicht) bewirken zwar Abortus, können aber auch das zum Experimente benutzte Tier töten.
5) Wenn man dieses Serum selbst in trächtige Tiere tötenden Mengen nicht trächtigen Tieren injiziert, so ruft es keine Veränderungen in ihrem Organismus hervor.
6) Das auf 60° C erhitzte Serum verliert sehr viele von seinen toxischen Eigenschaften.
7) Wenn man das Plazenta-Serum subdural injiziert, so ruft es bei Tieren keine anderen Veränderungen hervor, als wenn man dieselbe Menge einer anderen Flüssigkeit subdural einführt, es bewirkt jedenfalls kein Krankheitsbild, das den eklamptischen Krämpfen, wie solche bei Frauen vorkommen, ähnlich wäre.
8) Dieses Serum wirkt sicher nur bei Tieren jener Art, für welche es zubereitet wurde, bei Tieren verwandter Arten wirkt es sehr unsicher.

---

24. M. PHILIPPE EISENBERG. **O prawach łączenia się toksyn z antytoksynami.** ***(Ueber die Bindungsverhältnisse zwischen Toxin und Antitoxin).*** *(Sur les lois quantitatives de la réaction entre les toxines et les antitoxines).* Mémoire présenté par M. L. Marchlewski m. c.

Da die bisher ausgesprochenen Theorien über die Bindungsgesetze zwischen Toxin und Antitoxin und speziell diejenigen von Ehrlich sowie von Danysz und Bordet unzureichend erscheinen, alle auf diesem Gebiete bekannt gewordenen Tatsachen einheitlich und folgerichtig zu erklären, unternimmt es Verf. diese Erscheinungen im Zusammenhange mit den für andere spezifische Bin-

dungsreaktionen eruierten Verhältnissen sowie mit allgemeinen chemischen Gesetzen zu erklären. Durch den Bordet'schen Versuch[1]) haben wir zuerst erfahren, dass die Bindung des Haemolysins an die Erytrocyten nicht den Gesetzen „einfacher konstanter Proportionen" folgt, sondern von der relativen Konzentration des Haemolysins bedingt wird. Ehrlich und Morgenroth[2]) zeigten dann, dass ein bestimmtes Blutquantum wechselnde Mengen des haemolytischen Zwischenkörpers binden kann je nach der Höhe des Zwischenkörperzusatzes und dass dabei auch ungebundene Überschüsse von wechselnder Grösse zurückbleiben können. Verf. und Volk[3]) stellten für die Reaktion zwischen Agglutinin und agglutinierbarer Substanz auf Grund exakter quantitativer Untersuchungen fest, dass die quantitativen Bindungseffekte von der relativen Konzentration beider reagierenden Substanzen bedingt werden sowie ferner, dass bei jeder solchen Reaktion neben dem Reaktionsprodukt ungebundene Überschüsse beider reagierenden Substanzen zurückbleiben, die nur, falls sie sehr gering ausfallen, eine vollkommene Absorption vortäuschen können. In Anlehnung an diese Befunde konnte Verf.[4]) zeigen, dass für die spezifischen Praezipitationsvorgänge, ferner für die Vesuvin-Agglutination der Bakterien und für die Eiweissfällung durch Pikrinsäure dieselben Bindungsgesetze Geltung haben.

Es ist ferner das Bestehen analoger Verhältnisse wahrscheinlich gemacht worden für die bakteriziden Immunkörper durch Pfeiffer und Friedberger[5]), für das Spermolysin durch London[6]), für die Saponin-Haemolyse durch Ransom[7]), für die Haemolyse durch Staphylolysin durch Schur[8]), endlich für die Bindung von Farbsäuren an Eiweisskörper durch M. Heidenhain[9]). Angesichts dieser zahlreichen Befunde erklärte ich es schon vor einem Jahre in meiner Praezipitinarbeit für sehr wahrscheinlich „dass dieselben Gesetze für die Bindung zwischen Toxin und Antitoxin Geltung

[1]) Ann. de l'Inst. Past. XIV. 1900 N. 5. p. 257—297.
[2]) Berlin. Klin. Woch., 1901. S. 251—569.
[3]) Zeitschrift für Hyg. u. Inf. XL. 1902 S. 155—196.
[4]) Bullet. de l'Ac. des Sc. de Crac., Sc. math. et nat.. Mai 1902.
[5]) Berl· Klin. Woch. 1902 N. 258—583.
[6]) Arch. russ. des Sc. biol. IX. N. 1. p. 82—127.
[7]) Deutsch. med. Woch. 1901. N. 13. S. 194—196.
[8]) Hofmeister's Beitr. Z. chem. Phys. und Path. III B., 1902 H. 1/3.
[9]) Pflüg. Arch. XC. H. 3/4. S. 203—230.

haben", da diese Reaktion auch sonst mit den oben erwähnten vielfache Analogien aufweist. (S. 8. des poln. Orig.)

Wie weiter unten des näheren ausgeführt wird, kann die Ehrlich'sche Ansicht, wonach die Bindung zwischen Toxin und Antitoxin „nach einfachen konstanten Proportionen" etwa nach Art der Neutralisation von Säure durch Alkali erfolgt, unmöglich mit vielen Erfahrungstatsachen in Einklang gebracht werden. Doch auch die neuerdings von Danysz[1]) sowie von Bordet[2]) aufgestellte Theorie gibt zu manchen Bedenken Anlass; diese Autoren behaupten, dass beim Zusammenbringen beliebiger Mengen von Toxin und Antitoxin jedesmal das gesammte Antitoxin sich über alle vorhandenen Toxinmoleküle verteilt und auf diese Weise im Gemisch überhaupt kein Überschuss an freiem Toxin oder Antitoxin zurückbleibt. Der Charakter der resultierenden Verbindung, die natürlich jedesmal eine andere ist, wird von den relativen quantitativen Verhältnissen der Komponenten resp. von der überwiegenden Komponente bestimmt. Diese Theorie erscheint mir nun unannehmbar, da sie die Annahme involviert, ein schon gebundenes Toxin könne noch toxisch wirken: eine Annahme, die den uns gegenwärtig geläufigen Vorstellungen vom Wesen der Toxinwirkung widerspräche. Vollends unverständlich erscheint aber nach dieser Theorie das Bestehen von Gemischen, die zugleich toxisch und antitoxisch wirken, wie es von Danysz beschrieben wird, da nach dieser Theorie immer die in Überschuss vorhandene Substanz die andere absättigen wird und dementsprechend die Verbindung nur eine spezifische Funktion wird ausüben können, nie aber beide zugleich. Es liegt nun m. E. viel näher, die oben erwähnten Bindungsgesetze, die, wie leicht einzusehen ist, auf das allgemeine chemische Gesetz für reversible Reaktionen von Guldberg und Waage zurückzuführen sind, auch auf die Bindung von Toxin und Antitoxin anzuwenden. Man hätte sich demnach vorzustellen, dass, wenn gewisse Mengen Toxin und Antitoxin zusammegebracht werden, neben dem Reaktionsprodukt, der nach meiner Ansicht vollkommen neutralen Verbindung ungebundene Überschüsse beider Substanzen in wechselnden Mengen übrig bleiben, die einander nicht weiter beeinflussen. Der Unter-

[1]) Ann. de l'Inst. Past. XVI. 1902 N. 5. p. 331—345.
[2]) ibid., XVII. 1903 N. 3. p. 161—187.

schied zwischen dieser Anschauung und der von Danysz und Bordet vertretenen ist klar: dort haben wir als Reaktionsprodukt eine einheitliche Verbindung, das mehr oder weniger mit Antitoxin gesättigte Toxin, hier neben immer derselben neutralen Verbindung Toxin — sowie Antitoxin — Überschüsse. Die quantitativen Verhältnisse bei der Reaktion werden von den aktiven Massen, d. i. von den relativen Konzentrationen beider reagierenden Substanzen bestimmt; angesichts einer starken Konzentration der einen wird die andere zum grössten Teil gebunden werden und umgekehrt. Ein und dieselbe Menge Toxin bindet verschiedene Mengen Antitoxin je nach der Konzentration des Antitoxinzusatzes und umgekehrt. Um diese Erklärungsweise plausibel zu machen, müsste man beweisen, dass tatsächlich Toxin und Antitoxin-Überschüsse in Toxin-Antitoxingemischen vorhanden sind, sodann, dass die Menge der sich bildenden Toxin-Antitoxinverbindung von der aktiven Masse der reagierenden Körper abhängig ist, was im folgenden an der Hand des ausgedehnten vorliegenden Tatsachenmaterials versucht werden soll.

Die Reaktion zwischen Toxin und Antitoxin kann entweder in vitro vor sich gehen, wenn wir beide Körper im Reagenzglas mischen und dann erst dem Versuchstier injizieren, oder aber im lebenden Körper, wenn wir einem normalen oder immunisierten Tier Toxin injizieren. Um ein Toxin-Antitoxingemisch im Tierexperiment neutral erscheinen zu lassen, muss man selbstverständlich einen beträchtlichen Antitoxin-Überschuss verwenden, so dass der zurückbleibende Toxin-Überschuss bis unter den Wert der kleinsten, noch krankmachenden Toxindosis heruntergedrückt wird. Solche Gemische müssen dementsprechend deutliche antitoxische Wirkungen offenbaren, während der Nachweis der minimalen Toxin-Überschüsse nur unter bestimmten Bedingungen gelingen wird. Tatsächlich zeigen Untersuchungen von Danysz, die sich auf Ricin-Antiricingemische sowie Diphterie-Toxin-Antitoxingemische beziehen, dass sog. „neutrale Gemische“ deutlich antitoxisch wirken, u. zw. sowohl simultan als auch praeventiv. Um diese Gemische herum gibt es eine Reihe von Kombinationen, die gleichzeitig toxisch und antitoxisch wirken, natürlich in wechselndem Grade; selbst Gemische, die schon an sich schwach toxisch wirken, offenbaren antitoxische Wirkungen, indem sie die Wirkungen weiter zugesetzter Toxinmengen herabsetzen. Anderseits ergibt sich aus diesen Untersuchungen, dass der

Bindungs- resp. Neutralisierungseffekt in solchen Gemischen von den aktiven Massen der reagierenden Substanzen bedingt wird; gibt man zu einer bestimmten Antitoxinmenge eine gewisse Menge Toxin, die eben hinreicht, um im Gemisch die toxischen Wirkungen einer letalen Dosis hervortreten zu lassen (L+ Gemisch), und andererseits zu derselben Antitoxinmenge sukzessive fraktionierte kleinere Dosen Toxins, so wird man sehen, dass hier die L+ Schwelle schon bei einem kleineren Toxinzusatz erreicht wird. Das zuerst zugesetzte Toxin bindet nämlich eine relativ grössere Antitoxinmenge als im ersten Falle, da es eine relativ stärkere Antitoxinkonzentration vorfindet und dementsprechend finden dann die nachträglich zugesetzten Toxinfraktionen nicht mehr genügend Antitoxin vor, um neutralisiert zu werden. Über ähnliche Erfahrungen bei Komplement-Antikomplementgemischen berichtet Bordet. Die schwierigste Aufgabe für die experimentielle Forschung bleibt aber immer der Nachweis von minimalen Toxinüberschüssen in „glatt neutralen" Gemischen. Dieser Nachweis wird zwei Funktionen des Giftes betreffen können, entweder die toxische oder immunisierende, da wir wissen, dass kleine nicht mehr krankmachende Toxindosen noch eine physiologische Wirkung im Sinne einer Anregung der Antitoxinproduktion entfalten können. Wenn nun solche Gemische an normalen Tieren reaktionslos abgleiten, wie ja schon ihre Benennung aussagt, so kann es dennoch gelingen, den Toxinüberschuss nachzuweisen entweder an gewissen Individuen der betreffenden Spezies, die besonders befähigt erscheinen, auf minimale Toxindosen zu reagieren, oder aber an überempfindlichen Tieren, oder endlich an einer anderen für das betreffende Toxin empfindlicheren Spezies. Alle diese Möglichkeiten sind tatsächlich im Experiment beobachtet worden. Während Dzierzgowski[1]) nach Injektion von neutralen Diphterie-Toxin-Antitoxingemischen bei Ziegen, Hunden und Pferden keine Antitoxinproduktion sah, wurde eine solche, wenn auch ganz geringe (3fach norm. Serum) bei einem Pferde (Donar) von Kretz[2]) nach solchen Injektionen beobachtet. Derselbe Autor[3]) fand, dass solche Injektionen bei Diphteriegift-überempfindlichen Pferden ganz beträchtliche Antitoxinproduktion anregen können. Diese Beobach-

[1]) Arch. russ. des Sc. biol. IX N. 3. 1902 p. 293—321.
[2]) Zeitschrift f. Heilk. 1901 H. 4.
[3]) ibid., 1902. H. 10.

tungen sind von besonderer Wichtigkeit, da hier den Pferden mit Pferde-Antitoxin neutralisiertes Toxin injiziert wurde, folglich kein Grund besteht, eine Spaltung dieser Verbindung im Tierkörper anzunehmen. Der Beweis der Toxinüberschüsse kann aber auch an Tieren erbracht werden, die eine nicht spezifische Überempfindlichkeit zeigen; so sahen Roux und Vaillard[1]) bei Meerschweinchen, die zuvor mit anderen Bakterienarten geimpft waren und anscheinend völlig gesund waren, nach Injektion von neutralen Gemischen typischen Tetanus auftreten. Ebenso berichtet Marenghi[2]), dass Meerschweinchen, die durch Entfernung beider Nebennieren Diphteriegift-überempfindlich geworden sind, auf Injektion von glatt neutralem Gemisch eingehen. Dass Gemische, die für eine Tierart ganz neutral sind, bei anderen empfindlicheren, deutliche toxische Wirkungen offenbaren können, ergibt sich aus den Untersuchungen von Buchner[3]), Roux und Martin[4]), Dreyer und Madsen[5]), Danysz[6]). Die oben erwähnte immunisierende Wirkung neutraler Gemische sowie ihre Auffassung findet eine starke Stütze in analogen Versuchen anderer Autoren über die Wirkungen überkompensierter Gemische verschiedener spezifischen Elemente. Sachs[7]) erzielte durch Injektionen Immunkörper-beladener Erythrocyten Produktion von Haemolysinen bei manchen Tieren, Rehns[8]), Nicolle und Trénel[9]) sowie Neisser und Lubowski[10]) durch Injektion von agglutinierten Bakterien Produktion von Agglutininen, Pfeiffer[11]) durch Injektion von Immunkörper-beladenen Choleravibrionen Produktion von Immunkörpern. In allen diesen Fällen muss man annehmen, dass selbst in den überkompensierten Gemischen noch Überschüsse spezifischer Substanzen enthalten waren, die zu spezifischen Reaktionen im Tierkörper Anlass geben.

[1]) Ann. de l'Inst. Past. VII. 1893. p. 65—140.
[2]) Rend. del. R. Ist. Lomb. di scienze e lett. S. II. V. XXXIV. 1193—1207.
[3]) Münch. med. Woch. 1893. S. 480.
[4]) Ann. de l'Inst. Past. VIII. 1894 N. 9. p. 609—639.
[5]) Zeitschr. f. Hyg. u. Inf. XXXVII. S. 250—268.
[6]) l. c.
[7]) Cbl. f. Bakt. I. Abt. Orig. XXX. N. 13.
[8]) Compt. Rend. Soc. de Biol. 1900. p. 1058.
[9]) ibid., p. 1088.
[10]) Cbl. f. Bakt. I. Abt. Orig. XXX. N. 13.
[11]) Deutsch. med. Woch. 1901. N. 50.51.

Die hier vertretene Auffassung von der Bindung zwischen Toxin und Antitoxin steht auch in Einklang mit den Vorgängen, die beobachtet werden, wenn die beiden Körper nicht in vitro, sondern in vivo zusammentreffen. Wir wissen durch die Untersungen von Roux u. Martin[1]), Cobbett[2]), Meade-Bolton[3]), Dzierzgowski[4]), Bujwid[5]), dass normale Pferde in ihrem Serum einen Antitoxingehalt von $^1/_{100}$ — 2 J. E. pro 1 Cm^3 besitzen; wird nun einem solchen Tiere eine Toxindosis injiziert, die durch seinen Antitoxingehalt vielfach neutralisiert werden könnte, so erfolgt trotzdem Antitoxinbildung oder aber — in wenigen Fällen — eine sogar letale Intoxikation, wie dies von Bujwid und Dzierzgowski beobachtet wurde. Während man im Falle der Antitoxinproduktion eventuell die Annahme einer immunisierenden Wirkung an der Injektionstelle zur Erklärung heranziehen kann, wie Dzierzgowski dies tut, muss man im Falle einer letalen Wirkung zugeben, dass das Gift nur durch die Blutbahn zu den lebenswichtigen Organen gelangen konnte. In diesem Falle muss also vom Gift, trotzdem es in der Blutbahn ein Multiplum der neutralisierenden Menge antrifft, ein freier Überschuss zurückbleiben, der für den letalen Effekt verantwortlich zu machen ist. Ähnliche Verhältnisse treten ein, wenn man einem schon immunisierten Tiere neuerdings Toxin injiziert, da hier immer das im Blut kreisende Antitoxin ein vielfaches Multiplum derjenigen Menge ausmacht, die zur glatten Neutralisation der injizierten Toxinmenge ausreicht. Speziell in dem Falle, wo das Toxin bei solchen Tieren intravenös eingeführt wird, müsste man nach der Theorie der „konstanten Neutralisierungsproportionen" das Ausbleiben einer Antitoxinproduktion erwarten. Da dies aber nicht der Fall ist, wie die Beobachtungen von Kretz[6]) und Dzierzgowski[7]) beweisen, muss man annehmen, dass trotz des grossen Antitoxinüberschusses ein Überschuss an freiem Toxin zurückbleibt, der zur Wirkung gelangt. Endlich muss dieselbe Annahme herangezogen werden zur Erklärung der bekannten Fälle

[1]) l. c.

[2]) Cbl. f. Bakt. I. Abt. XXVI. N. 18. S. 731—732.

[3]) Journ. of exper. med. Vol. I p. 543.

[4]) Gazeta lekarska 1903. N. 14. 15. S. 317—322. 344—349.

[5]) Nicht publizierte Untersuchungen.

[6]) l. c.

[7]) l. c.

von Giftüberempfindlichkeit, in denen hochimmunisierte Tiere auf kleine Toxindosen eingingen; hier musste das Gift die Blutbahn passieren, um zu lebenswichtigen Organen zu gelangen, folglich muss das Bestehen eines freien Giftüberschusses postuliert werden. Endlich sei noch auf eine Tatsachenreihe hingewiesen, die darauf hinweist, dass auch im Tierkörper die Bindung zwischen Toxin und Antitoxin nicht dem Ehrlich'schen Gesetz „einfacher konstanter Proportionen" folgt, sondern durch die aktiven Massen der reagierenden Körper bestimmt wird. Injiziert man einem schon immunisierten Tiere Toxin, so zeigt der Antitoxingehalt des Blutes einen steilen Abfall, der aber quantitativ durchaus nicht dem glatten Neutralisationswert der eingeführten Giftmenge entspricht, sondern ein hohes Multiplum davon ausmacht. So betrug im Falle von Salomonsen und Madsen[1]) der Antitoxinverlust 875.000 J. E., während schon 385 J. E., also $^1/_{2000}$ davon, zur Neutralisation der eingeführten Giftmenge genügt hätten. Ähnliches berichten für das Botulismusgift Forssmann und Lundstrom[2]), Dzierzgowski für das Diphteriegift, Bulloch[3]) für Immunhaemolysine. Diese Beobachtungen beweisen m. E., dass angesichts der hohen Antitoxinkonzentration, die es im immunisierten Tier vorfindet, das Toxin ein Multiplum der glatt neutralisierenden Antitoxindosis bindet.

Die Richtigkeit der ausgeführten Anschauungen vorausgesetzt, ergäbe sich für die Serotherapie von Tetanusfällen beim Menschen die Indikation, möglichst hohe Antitoxindosen zu wiederholten Malen bis zum Verschwinden der tetanischen Symptome zu injizieren, da auf diese Weise die Neutralisation des an der Infektionsstelle stetig gebildeten Giftes eine möglichst vollständige wäre und einer eventuell spät einsetzenden Rekrudeszenz der Intoxikation vorgebeugt werden könnte, wie sie sowol in der menschlichen Pathologie wie auch bei den serotherapeutischen Versuchen von Roux und Vaillard[4]) an Tieren beobachtet wurde.

[1]) Ann. de l'Inst. Past. XI. 1897. N. 4. p. 315—331.
[2]) ibid. XVI. 1902. N. 4. p. 294—305.
[3]) Cbl. f. Bakt. I Abt. XXIX. N. 18 S. 731—732.
[4]) l. c.

Krakau, am 15. April 1903.

25. M. LADISLAS NATANSON m. t. **O zastosowaniu równań Lagrange'a w Teoryi tarcia wewnętrznego.** ***(Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité).***

§ 1. Dans notre Mémoire Sur les lois de la viscosité, présenté à l'Académie dans la séance du 4. Février 1901 [1]), nous avons proposé un système d'équations pour exprimer la loi suivant laquelle s'opère, au sein d'un fluide déformé, le phénomène intime et fondamental de la relaxation. Ainsi que dans le Mémoire cité, désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point situé à l'intérieur du fluide; par u, v, w les projections (sur les axes $Oxyz$) de la vitesse de la particule du fluide qui au moment t se trouve au point considéré; par $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$ les composantes des pressions qui définissent de la façon bien connue l'état de tension imposé au fluide, en (x, y, z), à l'époque t; par p, la limite vers laquelle convergeraient p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} par l'effet de la relaxation; par n, k, h les constantes désignées par les mêmes symboles dans le Mémoire auquel nous venons de faire allusion; par T la constante caractéristique du fluide que l'on nomme le temps de relaxation. Avec ces notations, les équations dont il s'agit s'écrivent de la manière suivante. On a, en premier lieu,

$$\frac{d(p_{xx}-p)}{dt}+\frac{p_{xx}-p}{T}+2n\frac{\partial u}{\partial x}+\left(k-h-\tfrac{2}{3}n\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{1a}$$

et deux équations analogues; et, en second lieu,

$$\frac{dp_{yz}}{dt}+\frac{p_{yz}}{T}+n\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \tag{2a}$$

ainsi que deux équations analogues qui s'en déduisent par des permutations circulaires. Dans ces équations, le symbole d/dt a la signification

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

Posons:

$$p_{xx}-p=\Phi_{xx} \qquad p_{yz}=\Phi_{yz} \tag{4a}$$

$$p_{yy}-p=\Phi_{yy} \qquad p_{zx}=\Phi_{zx} \tag{4b}$$

$$p_{zz}-p=\Phi_{zz} \qquad p_{xy}=\Phi_{xy} \tag{4c}$$

[1]) Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathém. et Naturelles, Année 1901, p. 95.

$$2n\frac{\partial u}{\partial x}+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Omega_{xx};$$

$$n\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\Omega_{yz} \tag{5a}$$

$$2n\frac{\partial v}{\partial y}+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Omega_{yy};$$

$$n\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\Omega_{zx} \tag{5b}$$

$$2n\frac{\partial w}{\partial z}+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Omega_{zz};$$

$$n\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\Omega_{xy}. \tag{5c}$$

Si donc l'on convient de représenter par Φ et par Ω deux termes correspondants du tableau

$$\left.\begin{matrix}\Phi_{xx}, & \Phi_{yy}, & \Phi_{zz}, & \Phi_{yz}, & \Phi_{zx}, & \Phi_{xy}\\ \Omega_{xx}, & \Omega_{yy}, & \Omega_{zz}, & \Omega_{yz}, & \Omega_{zx}, & \Omega_{xy}\end{matrix}\right\} \tag{6}$$

on peut écrire les équations (1) et (2) sous la forme générale que voici:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\Phi}{T}+\Omega=0. \tag{7}$$

Il est évident que, dans cette équation, la quantité Ω est supposée être une fonction connue des variables indépendantes x, y, z, t; Φ représente une fonction inconnue des mêmes variables.

§ 2. Considérons trois quantités $a, b, c,$ définies par les égalités

$$a=a(x, y, z, t) \tag{1a}$$

$$b=b(x, y, z, t) \tag{1b}$$

$$c=c(x, y, z, t). \tag{1c}$$

Nous supposerons, en guise de définition, que ces quantités vérifient les équations

$$\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+v\frac{\partial a}{\partial y}+w\frac{\partial a}{\partial z}=0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t}+u\frac{\partial b}{\partial x}+v\frac{\partial b}{\partial y}+w\frac{\partial b}{\partial z}=0 \tag{2b}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}+w\frac{\partial c}{\partial z}=0. \tag{2c}$$

Soit $F^*(a, b, c, t)$ la forme que prend une fonction quelconque $F(x, y, z, t)$ des variables x, y, z, t lorsque, aux variables x, y, z, on substitue les valeurs

$$x = x(a, b, c, t) \tag{3a}$$

$$y = y(a, b, c, t) \tag{3b}$$

$$z = z(a, b, c, t), \tag{3c}$$

tirées des équations (1). Nous avons par conséquent

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi^*(a, b, c, t) \tag{4}$$

$$\Omega(x, y, z, t) = \Omega^*(a, b, c, t). \tag{5}$$

On déduit de l'équation (4) les conséquences suivantes: on a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*}{\partial c}; \quad \text{et} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \Phi^*}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \Phi^*}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial \Phi^*}{\partial c} \tag{7a}$$

ainsi que deux équations analogues: (7 b) et (7 c) qui déterminent les valeurs des dérivées $\partial\Phi/\partial y$ et $\partial\Phi/\partial z$. Multiplions les équations (7) respectivement par u, v, w et ajoutons les membre à membre; à l'équation ainsi obtenue ajoutons, membre à membre, l'équation (6); en tenant compte des équations (2), nous trouverons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} + w\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}. \tag{8}$$

Cela prouve que les équations (7) du § 1. se transforment, par la substitution des variables a, b, c, t aux variables x, y, z, t, de la manière suivante:

$$\frac{\partial \Phi^*(a, b, c, t)}{\partial t} + \frac{\Phi^*(a, b, c, t)}{T} + \Omega^*(a, b, c, t) = 0. \tag{9}$$

Or, les équations (9) admettent les intégrales

$$\Phi^*(a, b, c, t) = \varepsilon^{-t/T}\Phi^*(a, b, c, 0) - \varepsilon^{-t/T}\int_0^t ds\, \varepsilon^{s/T}\Omega^*(a, b, c, s). \tag{10}$$

On désigne ici par ε la base des logarithmes népériens, par s une variable auxiliaire pouvant varier de zéro jusqu'à t, par $\Phi^*(a, b, c, 0)$ la valeur de Φ^* calculée, pour la particule en question, à l'époque que l'on a choisie pour origine des temps. Ainsi, les valeurs que prennent les composantes $(p_{xx} - p)$ etc. et p_{yz} etc. des pressions

pour une particule déterminée du fluide, caractérisée par les valeurs a, b, c des paramètres (1), sont données par les équations que l'on obtient en donnant, aux symboles Φ et Ω de l'équation (10), les significations qu'ils comportent, conformément aux conventions établies au paragraphe précédent.

§ 3. Représentons par ρ la densité du fluide, en un point x, y, z, à l'époque t; par X, Y, Z désignons les composantes de l'accélération que produisent, en ce point et à l'époque t, les forces extérieures données. Les équations du mouvement s'obtiennent en écrivant trois équations de la forme

$$\frac{du}{dt} - X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) = 0. \tag{1a}$$

Dans le système de Lagrange[1]), nous avons

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{2a}$$

ainsi que quatre égalités analogues. Par conséquent, si l'on conserve aux symboles Φ_{xx} etc. la signification qui leur a été attribuée dans les paragraphes précédents et si l'on pose

$$\frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial z} = P_x \quad \text{etc.}, \tag{3a}$$

les équations (1) deviennent

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{P_x}{\rho} = 0. \tag{4a}$$

Traitées de la manière bien connue, les équations (4) permettent d'écrire

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{P_x}{\rho}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y + \frac{P_y}{\rho}\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \\ + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z + \frac{P_z}{\rho}\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0, \tag{5a}$$

où l'on suppose que les quantités qui entrent dans l'expression du premier membre sont exprimées en fonctions des variables a, b, c, t. On peut d'ailleurs avoir recours aux équations (4) si l'on tient

[1]) Voir, au sujet de cette dénomination, Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895, p. 3.

compte de la proposition suivante. Les symboles D, L_a, L_b, L_c, M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, N_c étant définis par les égalités

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = D$$

$$(7a) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = L_a \; ; \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \end{vmatrix} = L_b \quad \text{etc.}$$

$$(7b) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial z}{\partial c}, & \frac{\partial x}{\partial c} \end{vmatrix} = M_a \; ; \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.,}$$

on a les équations

$$(8a) \qquad D\frac{\partial F}{\partial x} = L_a\frac{\partial F^*}{\partial a} + L_b\frac{\partial F^*}{\partial b} + L_c\frac{\partial F^*}{\partial c}$$

$$(8b) \qquad D\frac{\partial F}{\partial y} = M_a\frac{\partial F^*}{\partial a} + M_b\frac{\partial F^*}{\partial b} + M_c\frac{\partial F^*}{\partial c}$$

$$(8c) \qquad D\frac{\partial F}{\partial z} = N_a\frac{\partial F^*}{\partial a} + N_b\frac{\partial F^*}{\partial b} + N_c\frac{\partial F^*}{\partial c}$$

dans lesquelles $F(x, y, z, t)$ ou F et $F^*(a, b, c, t)$ ou F^* désignent, comme auparavant, les valeurs que prend la même fonction lorsqu'on l'exprime soit par le système de variables x, y, z, t, soit par le système a, b, c, t. Dans la méthode de Lagrange, il faut évidemment remplacer les expressions de $\partial p/\partial x$, de P_x etc. que renferment les équations (4), par des expressions composées de termes tels que $\partial p^*/\partial a$ etc., $\partial \Phi^*_{xx}/\partial a$ etc.; c'est ce que permettent de faire les équations (8). Si l'on tient compte de l'équation de continuité

$$(9) \qquad \rho D = \rho_0$$

où l'on désigne par ρ_0 la densité de la particule a, b, c à l'époque $t = 0$, on parvient ainsi à trois équations dont la première est la suivante

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho_0}\left(L_a \frac{\partial p^*}{\partial a} + L_b \frac{\partial p^*}{\partial b} + L_c \frac{\partial p^*}{\partial c}\right) +$$
$$+ \frac{1}{\rho_0}\Big\{ L_a \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial a} + L_b \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial b} + L_c \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial c} +$$
$$+ M_a \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial a} + M_b \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial b} + M_c \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial c} +$$
$$+ N_a \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial a} + N_b \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial b} + N_c \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial c}\Big\} = 0 . \quad (10a)$$

Dans ce qui va suivre, nous ferons usage des symboles $1/\rho \,.\, \partial p/\partial x$ et P_x/ρ en les considérant comme de simples abréviations définies par les égalités

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0}\left(L_a \frac{\partial p^*}{\partial a} + L_b \frac{\partial p^*}{\partial b} + L_c \frac{\partial p^*}{\partial c}\right) \quad (11)$$

$$\frac{P_x}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\Big\{ L_a \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial a} + L_b \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial b} + L_c \frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial c} +$$
$$+ M_a \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial a} + M_b \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial b} + M_c \frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial c} +$$
$$+ N_a \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial a} + N_b \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial b} + N_c \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial c}\Big\} . \quad (12)$$

§ 4. Calculons la valeur de la dérivée $\partial (P_x/\rho)/\partial t$ en partant de l'expression (12), § 3, de P_x/ρ établie au paragraphe précédent. Posons

$$\frac{\partial L_a}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial a} + \frac{\partial L_b}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial b} + \frac{\partial L_c}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial c} +$$
$$+ \frac{\partial M_a}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial a} + \frac{\partial M_b}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial b} + \frac{\partial M_c}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial c} +$$
$$+ \frac{\partial N_a}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial a} + \frac{\partial N_b}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial b} + \frac{\partial N_c}{\partial t}\frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial c} = \Theta_x . \quad (1a)$$

Nous aurons alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_x}{\rho}\right) = \frac{\Theta_x}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0}\Big\{ L_a \frac{\partial^2 \Phi^*_{xx}}{\partial t \partial a} + L_b \frac{\partial^2 \Phi^*_{xx}}{\partial t \partial b} + L_c \frac{\partial^2 \Phi^*_{xx}}{\partial t \partial c} +$$
$$+ M_a \frac{\partial^2 \Phi^*_{yx}}{\partial t \partial a} + M_b \frac{\partial^2 \Phi^*_{yx}}{\partial t \partial b} + M_c \frac{\partial^2 \Phi^*_{yx}}{\partial t \partial c} +$$
$$+ N_a \frac{\partial^2 \Phi^*_{zx}}{\partial t \partial a} + N_b \frac{\partial^2 \Phi^*_{zx}}{\partial t \partial b} + N_c \frac{\partial^2 \Phi^*_{zx}}{\partial t \partial c}\Big\} . \quad (2)$$

Cependant, les quantités Φ^*_{xx}, Φ^*_{yx}, Φ^*_{zx} vérifient trois équations dont la première est la suivante (voir § 2.):

$$\frac{\partial \Phi^*_{xx}}{\partial t} + \frac{\Phi^*_{xx}}{T} + \Omega^*_{xx} = 0 \quad . \tag{3}$$

Si donc l'on pose

$$\begin{aligned} L_a \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial a} + L_b \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial b} + L_c \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial c} + \\ + M_a \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial a} + M_b \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial b} + M_c \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial c} + \\ + N_a \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial a} + N_b \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial b} + N_c \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial c} = \Pi_x \end{aligned} \tag{4a}$$

et si l'on fait usage de l'expression de P_x/ρ donnée par l'égalité (12) du § 3., on voit sans peine que les équations (2) peuvent s'écrire:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_x}{\rho}\right) + \frac{1}{T}\left(\frac{P_x}{\rho}\right) + \frac{\Pi_x - \Theta_x}{\rho_0} = 0 \ . \tag{5a}$$

Reprenons maintenant, pour les transformer, les équations du mouvement du fluide, c'est-à-dire les équations (10) du paragraphe précédent. Ainsi qu'il a été dit plus haut, les équations (4) du même paragraphe équivalent à ces équations (10), qu'elles reproduisent sous une forme abrégée. Dérivons les par rapport à la variable t; il viendra, en tenant compte des équations (5),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{T}\frac{P_x}{\rho} - \frac{\Pi_x - \Theta_x}{\rho_0} = 0 \, . \tag{6a}$$

Jointes aux équations initiales [(4) du § 3.], les équations (6) peuvent se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \\ + T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{T(\Pi_x - \Theta_x)}{\rho_0} = 0 \, . \end{aligned} \tag{7a}$$

C'est la forme que nous nous proposions de donner aux équations du mouvement.

§ 5. Dans ce qui va suivre, nous reprendrons l'étude des lois qui président à la propagation d'un mouvement extrêmement petit dans un fluide visqueux, en nous appuyant sur les résultats exposés

dans la première partie de ce Travail. Le problème auquel nous venons de faire allusion nous a occupés dans notre Mémoire Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux, présenté à l'Académie dans la séance du 7. Janvier 1902 [1]). Ainsi que dans ce Mémoire, nous supposerons nulles les forces extérieures auxquelles le fluide est soumis; les termes X, Y, Z disparaîtront donc de nos équations. Nous considérerons ϱ_0, c'est-à-dire la densité du fluide à l'état initial, où il n'a point encore subi de perturbation, comme une constante absolue. Nous admettrons, à titre d'hypothèse, que la pression p peut s'exprimer [2]) en fonction de la densité:

$$p = p(\varrho); \tag{1}$$

la nature de la fonction $p(\varrho)$ dépendra évidemment de la nature du fluide considéré et en outre, des conditions d'ordre thermodynamique auxquelles le mouvement du fluide est assujetti. Nous supposerons d'ailleurs que l'on a

$$\varrho \frac{dp(\varrho)}{d\varrho} = h, \tag{2}$$

en conservant au symbole h la signification qui lui a été attribuée dans la première partie de ce Travail ainsi que dans nos Communications précédentes. L'équation (2) se déduit immédiatement de la relation

$$\frac{dp}{dt} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{3}$$

établie dans les Mémoires cités plus haut. Il importe d'observer que la constante h que renferment les équations (2) et (3), diffère essentiellement, par définition, d'une autre constante k dont nous avons fait usage dans les équations qui déterminent la manière dont varient les composantes $p_{xx} - p$, $p_{yy} - p$, $p_{zz} - p$ des pressions; la constante k sert notamment à caractériser l'influence qu'exerce,

[1]) Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1902, p. 19.

[2]) C'est l'hypothèse dans laquelle on se place habituellement; par exemple voir Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895, pp. 468—470. L'analyse que l'on va lire n'est que la généralisation immédiate de celle que contiennent les §§ 257 et 259 de ce Traité.

sur ces composantes, la dilatation ou la compression pure du fluide. Dans nos Mémoires précédents, nous avons indiqué les raisons qui nous portent à croire que, entre ces deux constantes, il existe la relation $h = k$ vérifiée, pour les fluides de la Nature, soit rigoureusement, soit approximativement; et nous avons prouvé que la relation $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$, admise par Saint-Venant et par Stokes entre les deux coefficients de viscosité [1]), est la conséquence immédiate de l'égalité $h = k$. Mais, dans l'étude que nous nous proposons de poursuivre, cette question ne joue qu'un rôle secondaire et nous pouvons la laisser pour ainsi dire en suspens.

Posons

$$(4)\quad \frac{n}{\rho_0} = \alpha^2\,; \qquad (5)\quad \frac{k + \frac{4}{3}n}{\rho_0} = \beta^2\,; \qquad (6)\quad \frac{k - h + \frac{4}{3}n}{\rho_0} = \gamma^2\,;$$

les quantités α, β, γ seront des constantes; leurs dimensions seront celles d'une vitesse. Elles ne pourront différer que très peu des vitesses que nous avons désignées par a, b, c dans notre Communication du 7. Janvier 1902.

§ 6. Ecrivons, en désignant par a, b, c les valeurs initiales des variables x, y, z,

$$(1a)\qquad x - a = \xi\,(a, b, c, t)$$

$$(1b)\qquad y - b = \eta\,(a, b, c, t)$$

$$(1c)\qquad z - c = \zeta\,(a, b, c, t)\;;$$

les quantités ξ, η, ζ seront les composantes du déplacement de la particule, compté à partir de sa position initiale d'équilibre. Proposons-nous de calculer la valeur de $\partial p^*/\partial a$. Nous avons

$$(2a)\qquad \frac{\partial p^*}{\partial a} = \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial a}$$

$$(3a)\qquad = -\frac{\rho^2}{\rho_0} \cdot \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{\partial D}{\partial a}$$

$$(4a)\qquad = -\frac{h}{D}\frac{\partial D}{\partial a}\,.$$

[1]) Voir à ce sujet: P. Duhem, Recherches sur l'Hydrodynamique, première Série, Paris 1903, p. 22. M. Smoluchowski, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1903, p. 145.

Portées dans l'équation (8a) du § 3., les valeurs (4) des dérivées $\partial p^*/\partial a$ etc. la transforment de la manière suivante:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{h}{\rho_0 D}\left(L_a \frac{\partial D}{\partial a} + L_b \frac{\partial D}{\partial b} + L_c \frac{\partial D}{\partial c}\right). \tag{5a}$$

D'autre part on a les relations

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{etc.} \tag{6a}$$

Comparons les équations (5) et (6) ainsi obtenues aux équations (7) du § 4. dans lesquelles nous poserons $X = 0$ etc. En tenant compte des conventions (5) et (6) du § 5., nous aurons

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{D}\left(L_a \frac{\partial D}{\partial a} + L_b \frac{\partial D}{\partial b} + L_c \frac{\partial D}{\partial c}\right) -$$
$$+ T \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{D}\left(L_a \frac{\partial D}{\partial a} + L_b \frac{\partial D}{\partial b} + L_c \frac{\partial D}{\partial c}\right)\right\} -$$
$$- \frac{T(\Pi_x - \Theta_x)}{\rho_0} = 0. \tag{7a}$$

L'équation (7 a) et les équations analogues qui se rapportent aux composantes η et ζ expriment la loi suivant laquelle se propagent les perturbations dans le fluide étudié.

§ 7. Considérons, en particulier, le cas où les valeurs initiales des quantités Φ (c'est-à-dire celles qui correspondent à l'époque $t = 0$) sont indépendantes de b et de c. Supposons que l'on ait

$$\xi = \xi(a, t) \; ; \qquad \eta = 0 \; ; \qquad \zeta = 0 \, . \tag{1}$$

La perturbation sera plane et longitudinale. Les équations (1) nous donnent:

$$D = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \tag{2}$$

$$L_a = 1 \; ; \qquad L_b = 0 \; ; \qquad L_c = 0 \tag{3a}$$

$$M_a = 0 \; ; \qquad M_b = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \; ; \qquad M_c = 0 \tag{3b}$$

$$N_a = 0 \; ; \qquad N_b = 0 \; ; \qquad N_c = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \; ; \tag{3c}$$

elles nous apprennent d'ailleurs que l'on a

$$u^* = u^*(a, t) \; ; \qquad v^* = 0 \; ; \qquad w^* = 0 \, . \tag{4}$$

Selon les égalités (2), (3) et (4), les composantes de la vitesse de déformation (que l'on calcule à l'aide des égalités (8) du § 3) deviendront

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{D}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial a} \; ; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \; ;$$

$$(6) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \, .$$

De l'égalité (4a), § 4, nous tirons, en tenant compte des égalités (3),

$$(7) \qquad \Pi_x = \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial a} + \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial b} + \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial c}\right).$$

Mais il est aisé de voir que l'on a, dans ce cas,

$$(8a) \qquad \Omega^*_{xx} = (k - h + \tfrac{4}{3} n) \frac{1}{D}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial a}$$

$$(8b) \qquad \Omega^*_{yx} = 0$$

$$(8c) \qquad \Omega^*_{zx} = 0 \; ; \quad \text{par conséquent}$$

$$(9) \qquad \Pi_x = (k - h + \tfrac{4}{3} n) \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial a}\right).$$

Si l'on tient compte des égalités (3) de ce paragraphe, l'égalité (1a), § 4, devient

$$(10) \qquad \Theta_x = \left(\frac{\partial \Phi^*_{yx}}{\partial b} + \frac{\partial \Phi^*_{zx}}{\partial c}\right)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial a} \, .$$

Cependant, en vertu des équations (8b) et (8c), nous pouvons écrire

$$(11) \qquad \Phi^*_{yx} = \varepsilon^{-t/T}\, \Phi^*_{yx}(a, b, c, 0) \; ; \qquad \Phi^*_{zx} = \varepsilon^{-t/T}\, \Phi^*_{zx}(a, b, c, 0) \; ;$$

la comparaison de ces relations à l'équation (10) conduit donc à la conclusion que l'hypothèse énoncée au début du présent paragraphe entraîne la conséquence

$$(12) \qquad \Theta_x = 0 \, .$$

Les égalités (2), (3), (9) et (12) de ce paragraphe permettent de simplifier l'équation (7a) du § 6. On trouve, en tenant compte de l'égalité (6) du § 5.,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \frac{\beta^2-\gamma^2}{D}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \frac{\beta^2-\gamma^2}{D}\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}\right\} -$$

$$- T\gamma^2\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial a}\right) = 0. \qquad (13a).$$

Supposons (ainsi que cela se fait habituellement) que la valeur de $\partial\xi/\partial a$ soit très petite en sorte que l'on puisse, dans l'expression de D, la négliger par rapport à l'unité; dans ces conditions, l'équation précédente se réduit à celle-ci:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - (\beta^2-\gamma^2)\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \beta^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}\right\} = 0. \qquad (14a)$$

A ce résultat, comparons l'équation à laquelle nous parviendrions, pour le cas particulier qui nous occupe, en nous appuyant sur les propositions données dans notre Mémoire du 7. Janvier 1902 [1]). Si l'on se reporte au § 6. de ce Travail, on voit sans peine que la quantité que nous y avons désignée par u_1 correspond à la dérivée $\partial\xi/\partial t$; d'ailleurs, l'expression $\nabla^2 u_1$ se réduirait à $\partial^2 u_1/\partial x^2$ dans le cas que nous discutons. On s'assure ainsi que l'équation (1), § 6., de la Communication mentionnée est identique, au fond, avec l'équation (14a) que nous venons d'obtenir

§ 8. Ainsi qu'au paragraphe précédent, supposons que les valeurs initiales des quantités Φ ne dépendent point des deux variables: b, c. Admettons que l'on ait

$$\xi = 0\,; \qquad \eta = 0\,; \qquad \zeta = \zeta(a, t)\,. \qquad (1)$$

La perturbation sera plane et transversale. Nous aurons, dans ce cas:

$$D = 1 \qquad (2)$$

$$L_a = 1 \qquad L_b = 0 \qquad L_c = -\,\partial\zeta/\partial a \qquad (3a)$$

$$M_a = 0 \qquad M_b = 1 \qquad M_c = 0 \qquad (3b)$$

$$N_a = 0 \qquad N_b = 0 \qquad N_c = 1 \qquad (3c)$$

Les composantes de la vitesse de déformation seront données par les égalités

[1]) Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1902, page 19.

$$\text{(4a)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=0\,; \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0\,; \qquad \frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\text{(4b)} \qquad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0\,; \quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\partial t}\,; \quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\,.$$

L'équation qui, dans ce cas, doit nous servir de point de départ est l'équation (7c) du § 6.; elle est de la forme

$$\text{(5)} \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\beta^2-\gamma^2}{D}\left(N_a\frac{\partial D}{\partial a}+N_b\frac{\partial D}{\partial b}+N_c\frac{\partial D}{\partial c}\right)+$$
$$+T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\beta^2-\gamma^2}{D}\left(N_a\frac{\partial D}{\partial a}+N_b\frac{\partial D}{\partial b}+N_c\frac{\partial D}{\partial c}\right)\right\}-$$
$$-\frac{T(\Pi_z-\Theta_z)}{\rho_0}=0\,.$$

On désigne ici par Π_z et Θ_z les expressions suivantes:

$$\text{(6)} \qquad \Pi_z=L_a\frac{\partial\Omega^*_{xz}}{\partial a}+L_b\frac{\partial\Omega^*_{xz}}{\partial b}+L_c\frac{\partial\Omega^*_{xz}}{\partial c}+$$
$$+M_a\frac{\partial\Omega^*_{yz}}{\partial a}+M_b\frac{\partial\Omega^*_{yz}}{\partial b}+M_c\frac{\partial\Omega^*_{yz}}{\partial c}+$$
$$+N_a\frac{\partial\Omega^*_{zz}}{\partial a}+N_b\frac{\partial\Omega^*_{zz}}{\partial b}+N_c\frac{\partial\Omega^*_{zz}}{\partial c}\,.$$

$$\text{(7)} \qquad \Theta_z=\frac{\partial L_a}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{xz}}{\partial a}+\frac{\partial L_b}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{xz}}{\partial b}+\frac{\partial L_c}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{xz}}{\partial c}+$$
$$+\frac{\partial M_a}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{yz}}{\partial a}+\frac{\partial M_b}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{yz}}{\partial b}+\frac{\partial M_c}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{yz}}{\partial c}+$$
$$+\frac{\partial N_a}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{zz}}{\partial a}+\frac{\partial N_b}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{zz}}{\partial b}+\frac{\partial N_c}{\partial t}\frac{\partial\Phi^*_{zz}}{\partial c}\,.$$

Des équations (4) nous déduisons

$$\text{(8)} \qquad \Omega^*_{xz}=n\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\partial t}\,; \qquad \Omega^*_{yz}=0\,; \qquad \Omega^*_{zz}=0\,;$$

par conséquent, l'équation (6) nous donnera:

$$\text{(9)} \qquad \Pi_z=n\frac{\partial^3\zeta}{\partial a^2\partial t}\,.$$

D'autre part, l'équation (7) devient, en tenant compte des égalités (3),

$$\Theta_z = -\frac{\partial \Phi^*_{zz}}{\partial c}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a \partial t} = 0\,. \tag{10}$$

En vertu des égalités (2), (9) et (10), l'équation (5) permet d'écrire

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2}\right\} = 0\,, \tag{11}$$

où l'on désigne par α la constante définie au moyen de l'égalité (4) du § 5. Ce résultat s'accorde exactement avec l'équation que l'on déduit, pour le cas d'une perturbation plane, de l'équation (2) du § 6. de notre Mémoire, cité plus haut, Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux. Il est donc prouvé que les conclusions auxquelles nous avons été amenés dans notre étude précédente subsistent, au moins dans les deux cas que nous venons d'examiner, et ne sont nullement modifiées lorsque, dans leur discussion, on prend pour point de départ les équations données aux §§ 1. et 2. de la Communication actuelle.

De l'équation (11) on déduit par intégration

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2} = A(a). \tag{12}$$

Supposons une quantité Z qui satisferait aux équations

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2} + \frac{A(a)}{\alpha^2} \tag{13a}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}\,; \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\,. \tag{13b}$$

Jointes à l'équation (12), les équations (13) permettent d'écrire

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial Z}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} = 0\,; \tag{14}$$

la quantité ζ s'obtient, par conséquent, en ajoutant, à la quantité Z qui vérifie l'équation des télégraphistes, des termes qui ne dépendent point du temps.

§ 9. Reprenons l'étude du problème de la propagation, dans un fluide, d'une perturbation extrêmement petite, mais d'ailleurs arbitraire. Soit ϑ une quantité constante et extrêmement petite. Nous supposerons que les composantes ξ, η, ζ contiennent la quantité ϑ comme facteur, et que tous les termes qui suivent:

$$\xi, \eta, \zeta, \partial\xi/\partial a, \ldots, \partial\zeta/\partial c, u^*, v^*, w^*, \partial u^*/\partial a, \ldots, \partial w^*/\partial c \tag{1}$$

sont des quantités petites d'ordre (ϑ). Nous négligerons les termes d'ordre (ϑ^2) ou d'ordre supérieur, en comparaison de termes d'ordre (ϑ); cette convention que nous adoptons définit le sens qu'il faut attacher désormais au signe d'égalité dans nos équations. Nous supposerons d'ailleurs que les valeurs initiales des quantités Φ sont données par des expressions d'ordre (ϑ) ou d'ordre supérieur. Nous aurons

$$(1) \qquad D = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}$$

$$(2a) \quad L_a = 1 + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}; \qquad M_a = -\frac{\partial \xi}{\partial b}; \qquad N_a = -\frac{\partial \zeta}{\partial c}$$

$$(2b) \quad L_b = -\frac{\partial \eta}{\partial a}; \qquad M_b = 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} + \frac{\partial \xi}{\partial a}; \qquad N_b = -\frac{\partial \eta}{\partial c}$$

$$(2c) \quad L_c = -\frac{\partial \zeta}{\partial a}; \qquad M_c = -\frac{\partial \zeta}{\partial b}; \qquad N_c = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b}.$$

Calculons les valeurs que prennent les quantités

$$(3a) \qquad \Omega_{xx} = 2n \frac{\partial u}{\partial x} + (k - h - \tfrac{2}{3}n)\left(\frac{\partial u}{x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$(3b) \qquad \Omega_{yx} = n\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$(3c) \qquad \Omega_{zx} = n\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

lorsqu'on les exprime en fonctions des variables a, b, c, t, ce qui peut facilement se faire en vertu des égalités (8) du § 3. Il est aisé de voir que les termes Ω_{xx}, Ω_{yx}, Ω_{zx} se réduisent à des expressions d'ordre (ϑ). Considérons l'égalité (4a) du § 4.; si l'on y omet tous les termes d'ordre supérieur, on trouve

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Pi &= L_a \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial a} + M_b \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial b} + N_c \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial c} \\ &= \frac{\partial \Omega^*_{xx}}{\partial a} + \frac{\partial \Omega^*_{yx}}{\partial b} + \frac{\partial \Omega^*_{zx}}{\partial c} \\ &= n \nabla^2 u^* + (k - h + \tfrac{1}{3}n) \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial u^*}{\partial a} + \frac{\partial v^*}{\partial b} + \frac{\partial w^*}{\partial c}\right), \end{aligned}$$

où ∇^2 signifie $\partial^2/\partial a^2 + \partial^2/\partial b^2 + \partial^2/\partial c^2$. Considérons de même l'égalité (1a) du § 4.; les termes de la forme $\partial L_a/\partial t$ etc. sont d'ordre (ϑ),

ainsi que les termes Ω et Φ^0; il résulte donc de cette égalité que l'expression Θ_x sera une quantité d'ordre (ϑ^2) ou d'ordre supérieur. Cela étant, reportons-nous à l'équation (7 a) du § 6.; en vertu des égalités (1), (2) et (4) que nous venons d'obtenir, ainsi que des conventions exprimées par les relations (4), (5), (6) du § 5., cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - (\beta^2 - \gamma^2)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) +$$

$$+ T\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \alpha^2\nabla^2\xi - (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\right| = 0. \qquad (5a)$$

où seuls les termes du premier ordre ont été conservés. Cette équation peut se comparer à l'équation (3) du § 6. de notre Mémoire Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux; on s'assure aisément que la loi qu'expriment ces équations est la même.

Supposons que l'on ait affaire à un fluide incompressible. Dans ce cas, nous poserions $D = 1$ dans l'équation (7a) du § 6. et

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

dans l'égalité (3 a) de ce paragraphe. L'équation à laquelle nous parviendrions ainsi est la suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial\xi}{\partial t} - \alpha^2\nabla^2\xi\right| = 0; \qquad (7a)$$

elle se ramène de la façon connue à l'équation des télégraphistes généralisée (voir les §§ 6. et 10. de la Communication précédente).

---

26. M. LADISLAS NATANSON m. t. **O stopniu przybliżenia pewnych równań teoryi tarcia wewnętrznego** ***(Sur l'approximation de certaines équations de la Théorie de la Viscosité).***

§ 1. Dans notre Mémoire Sur les lois de la Viscosité[1]), nous avons proposé un système d'équations qui, à notre avis, peut exprimer la loi suivant laquelle, au sein d'un fluide déformé, a lieu

[1]) Bulletin Intern. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sc. Mathém. et Nat., Année 1901, p. 95. (Séance du 4. Février 1901).

le phénomène de la relaxation. Désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point situé à l'intérieur du fluide; par u, v, w les projections (sur les axes $Oxyz$) de la vitesse de la particule du fluide qui, au moment t, se trouve au point considéré; par p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} représentons les composantes des pressions qui, au moment t, s'exercent sur les faces d'un parallélipipède rectangle infiniment petit, ayant un de ses sommets en (x, y, z), conformément aux définitions bien connues que l'on adopte généralement. Désignons par p la limite vers laquelle convergeraient, par l'effet de la relaxation, les quantités p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}; par n, k, h les constantes désignées par les mêmes lettres dans le Mémoire cité et dont, à plusieurs reprises, nous avons discuté la signification; par T le temps de relaxation. Avec ces notations (qui se confondent avec celles du Travail que nous venons de citer), nous avons trois équations de la forme

$$\text{(1a)} \qquad \frac{d(p_{xx}-p)}{dt}+\frac{p_{xx}-p}{T}+2ne+(k-h-\tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega}=0$$

ainsi que trois équations dont la première est la suivante

$$\text{(2a)} \qquad \frac{dp_{yz}}{dt}+\frac{p_{yz}}{T}+na=0.$$

Les équations (1b) et (1c), (2b) et (2c) se déduisent, des équations (1a) et (2a), par des permutations circulaires. Dans ces équations, toutes les quantités sont supposées être exprimées en fonctions des variables x, y, z, t, variables que l'on regarde comme indépendantes. Les lettres e, f, g, a, b, c ont la signification:

$$\text{(3a)} \qquad e=\frac{\partial u}{\partial x}\ ; \qquad a=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\ ;$$

$$\text{(3b)} \qquad f=\frac{\partial v}{\partial y}\ ; \qquad b=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\ ;$$

$$\text{(3c)} \qquad g=\frac{\partial w}{\partial z}\ ; \qquad c=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\ ;$$

les symboles $\tilde{\omega}$ et d/dt sont définis par les conventions suivantes:

$$\text{(4)} \qquad \tilde{\omega}=e+f+g\ ;$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Posons

$$p_{xx} - p = \Phi_{xx} \; ; \qquad p_{yz} = \Phi_{yz} \tag{6a}$$

$$p_{yy} - p = \Phi_{yy} \; ; \qquad p_{zx} = \Phi_{zx} \tag{6b}$$

$$p_{zz} - p = \Phi_{zz} \; ; \qquad p_{xy} = \Phi_{xy} \tag{6c}$$

$$2ne + (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} = \Omega_{xx} \; ; \qquad na = \Omega_{yz} \tag{7a}$$

$$2nf + (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} = \Omega_{yy} \; ; \qquad nb = \Omega_{zx} \tag{7b}$$

$$2ng + (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} = \Omega_{zz} \; ; \qquad nc = \Omega_{xy} . \tag{7c}$$

Convenons de représenter par Φ et Ω deux termes correspondants du tableau

$$\left.\begin{matrix} \Phi_{xx}, & \Phi_{yy}, & \Phi_{zz}, & \Phi_{yz}, & \Phi_{zx}, & \Phi_{xy} \\ \Omega_{xx}, & \Omega_{yy}, & \Omega_{zz}, & \Omega_{yz}, & \Omega_{zx}, & \Omega_{xy} \end{matrix}\right\} \tag{8}$$

Nous pourrons écrire les équations précédentes (1) et (2) sous la forme générale que voici:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} + w\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\Phi}{T} + \Omega = 0 . \tag{9}$$

Les équations (1) et (2) ou les équations équivalentes (9) de ce paragraphe sont celles que nous considérons comme constituant la base essentielle de la théorie que nous proposons [1]). On s'assure facilement qu'elles se trouvent à l'abri des objections soulevées par M. Zaremba [2]) contre certaines équations essentiellement différentes que nous avons données, dans notre Mémoire du 4. Février 1901, en les regardant comme des relations exactes approximativement. Dans ce qui va suivre, nous donnerons donc parfois le nom de rigoureuses aux équations (1) et (2) ou (9) de ce paragraphe; mais il est bien entendu que nous n'attacherons aucun sens absolu à cette dénomination. Les équations (1) et (2) ou (9) ne sont à nos yeux, il est presque superflu de le dire, que l'expression d'une hypothèse dont nous croyons utile de poursuivre les conséquences.

§ 2. Dans le Mémoire cité, il est dit, à la page 107, que les équations approchées auxquelles nous venons de faire allusion

[1]) Pour des exemples de l'application directe de ces équations, voir les §§ 10. et 13. de ce Mémoire; voir aussi notre Travail Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité (Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Année 1903, page 268).

[2]) Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1903, page 85.

ne s'appliquent que dans le cas où le mouvement dont le fluide est animé est extrêmement lent. Il est de toute évidence que la signification de cette phrase est la suivante: supposons que le mouvement du fluide soit lent par rapport au système choisi d'axes de coordonnées, soit $Oxyz$; c'est-à-dire supposons que les composantes u, v, w de la vitesse relative des particules du fluide par rapport à ces axes soient petites, comparées à l'unité de vitesse; dans ce cas, certaines équations seront approximativement vérifiées. Voici ce que dit à ce sujet M. Zaremba: „Mais M. „Natanson ne considère ses équations que comme l'expres„sion approchée des véritables lois du mouvement d'un liquide „et cela seulement dans le cas particulier où les quantités u, v, w „sont très petites. Cette façon de voir est-elle soutenable? Evi„demment non puisque, dans les applications, nous ne pouvons „jamais étudier le mouvement d'un liquide que par rapport à des „axes mobiles dont la vitesse de translation est non seulement in„connue, mais inconnaissable" (loco citato, p. 91). Il me suffira de faire observer que, dans mes Mémoires, je n'ai dit nulle part que le système de coordonnées qui sert à définir les composantes u, v, w soit fixe ou immobile. L'unique point de vue auquel je m'étais toujours placé est donc celui que M. Zaremba soumet à l'examen au bas de la page 91 de sa Communication, dans le passage qui débute en ces termes: „On pourrait pourtant essayer de „tirer parti des équations de M. Natanson en les interprétant „d'une façon particulière, laquelle, il est vrai, n'est indiquée dans „aucun de ses travaux. Voici ce que nous avons en vue: supposons „que le système de coordonnées (x, y, z), système pour lequel la „formule (2) serait valable, ne soit pas fixe, mais mobile et animé „d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme; cela posé, „regardons les quantités u, v, w comme les composantes de la vi„tesse relative du liquide par rapport aux axes (x, y, z) en M à l'é„poque t et voyons si, dans ces conditions, il serait possible de „regarder la formule (2) comme approximativement exacte". Je prierai le lecteur de se reporter à quelques-uns de mes écrits. En discutant, dans mon Mémoire Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides[1]), la théorie de l'expérience de

[1]) Bulletin Int. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. des Sc. Math. et Nat., Année 1901, p. 161. Voir plus loin, § 13.

Maxwell et de Kundt, j'ai supposé que les axes des coordonnées sont liés à la paroi cylindrique extérieure par rapport à laquelle le cylindre intérieur est animé d'un mouvement de rotation. Cette paroi est immobile par rapport à la Terre; mais, avec la Terre, elle est mobile dans l'espace. Dans un autre Travail Sur la déformation d'un disque plastico-visqueux[1]), j'ai dit (p. 496) que je dispose les axes des x et des y dans le plan de la base inférieure sur laquelle repose le disque pendant la déformation. Il apparaît donc clairement que l'hypothèse que j'ai admise est, dans ce cas, la suivante: les vitesses relatives des particules de la substance de la plaque par rapport au plan solide qui lui sert de base, sont toujours très petites.

Je dirai donc, en conclusion, que l'hypothèse du mouvement „lent" dans laquelle je me suis placé est parfaitement légitime et qu'elle est clairement indiquée dans mes Mémoires.

§ 3. Reprenons l'équation (9) du § 1. En supposant „lent" le mouvement du fluide j'ai proposé de négliger, en première approximation, les termes

$$u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{1}$$

du premier membre de cette équation. Nous aurons alors:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\Phi}{T}+\Omega=0. \tag{2}$$

De là on déduit

$$\Phi(x,y,z,t)=\varepsilon^{-t/T}C(x,y,z)-\varepsilon^{-t/T}\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\Omega(x,y,z,t), \tag{3}$$

où l'on désigne par ε la base des logarithmes népériens, par $C(x,y,z)$ une fonction des coordonnées qui ne dépend pas du temps t. Les équations (3) peuvent d'ailleurs se mettre sous une forme différente. Soit $\Phi(x,y,z,0)$ la valeur de Φ qui correspond au moment $t=0$ en (x,y,z), c'est-à-dire en un point dont la position par rapport aux axes est à l'époque t la même qu'au moment initial $t=0$. Nous aurons

$$\Phi(x,y,z,t)=\varepsilon^{-t/T}\Phi(x,y,z,0)-\varepsilon^{-t/T}\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\Omega(x,y,z,t). \tag{4}$$

[1]) Bulletin Int. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. des Sc. Math. et Nat., Année 1902, p. 494.

Les équations (4) sont celles auxquelles j'ai eu recours dans plusieurs de mes écrits [1]).

L'omission des termes (1) dans les équations (9) du § 1. est légitime lorsqu'on admet certaines hypothèses que j'indiquerai d'une façon explicite. Representons par $(\mathcal{L})$ et par $(\mathcal{T})$ l'unité de longueur et l'unité de temps. Supposons, en premier lieu, que les composantes u, v, w de la vitesse relative du fluide par rapport aux axes soient très petites ou négligeables par rapport à $(\mathcal{L})/(\mathcal{T})$; c'est l'hypothèse, discutée plus haut, du mouvement „lent". Supposons encore que le temps de relaxation T soit une quantité qui, comparée à $(\mathcal{T})$, soit tout au moins finie; en sorte que les produits $u\,T$, $v\,T$, $w\,T$ soient extrêmement petits ou négligeables par rapport à $(\mathcal{L})$. Supposons enfin que les quantités

$$(5) \qquad \Phi, \quad (\mathcal{L})\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (\mathcal{L})\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (\mathcal{L})\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

aient, à tout moment et pour tout point situé à l'intérieur du fluide, des valeurs du même ordre de grandeur. On désigne ici par Φ, par $\partial\Phi/\partial x$ etc., les valeurs véritables des composantes des pressions et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées. Ces hypothèses permettent de négliger les termes mentionnés plus haut. Elles suffisent pour la démonstration que nous donnerons au § 10. d'une des propositions fondamentales de ce Mémoire (voir l'équation (23) du § 10. ainsi que les conclusions qui s'y rattachent).

Il ne faut pas perdre de vue que les Φ, les $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, $\partial\Phi/\partial z$ qui figurent soit dans (1) soit dans (5), représentent, ainsi qu'il a été dit plus haut, les valeurs véritables qui ne peuvent se calculer qu'en partant des équations rigoureuses (1) et (2) ou (9) du § 1. Nous verrons cependant au § 10. que les valeurs de Φ qui se déduisent des équations approchées (2), (3), (4) du présent paragraphe, diffèrent des valeurs véritables (appelées Ψ au § 10.) seulement par des termes d'ordre supérieur. D'autre part, en se reportant à l'équation (23) du § 10. on s'assure que les termes

$$(6) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} \text{ et } \frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

[1]) Bulletin Int. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. des Sc. Math. et Nat., Année 1902, p. 19; ibidem, p. 490; ibidem, p. 507.

sont généralement du même ordre. L'hypothèse que nous venons d'admettre au sujet des valeurs Φ, $\partial\Phi/\partial x$ etc. véritables, peut donc s'étendre, généralement parlant, aux Φ, aux $\partial\Phi/\partial x$ etc. qui se calculent au moyen des équations approchées.

On a, en vertu des équations (4) ci-dessus, trois équations de la forme

$$\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial x} = \varepsilon^{-t/T}\frac{\partial\Phi(x,y,z,0)}{\partial x} - \varepsilon^{-t/T}\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\frac{\partial\Omega(x,y,z,t)}{\partial x}. \quad (7)$$

Ces équations nous apprennent que l'hypothèse que nous avons adoptée au sujet des valeurs approchées des Φ et des $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, $\partial\Phi/\partial z$, est sûrement vérifiée lorsque les termes

$$\left.\begin{array}{lll} (\mathcal{L})\dfrac{\partial\Phi^0}{\partial x}, & (\mathcal{L})\dfrac{\partial\Phi^0}{\partial y}, & (\mathcal{L})\dfrac{\partial\Phi^0}{\partial z}, \\ (\mathcal{L})\,T\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, & (\mathcal{L})\,T\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, & (\mathcal{L})\,T\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} \end{array}\right\} \quad (8)$$

sont des quantités de même ordre que la quantité Φ elle-même. On désigne ici par Φ^0, pour plus de brièveté, la valeur initiale $\Phi(x, y, z, 0)$. Cette nouvelle hypothèse nous sera fort utile dans la suite; mais elle n'est pas absolument indispensable. Nous l'introduirons parfois en la regardant comme une supposition parallèle aux hypothèses précédentes.

Si restrictives que paraissent, au point de vue purement analytique, les diverses hypothèses que nous avons énoncées dans ce paragraphe, pour le physicien elles délimitent un champ d'activité extrêmement vaste dont l'étude permettra, sans aucun doute, de pénétrer plus avant dans la connaissance des lois qui régissent le phénomène si important et si peu connu de la relaxation.

§ 4. Arrivons maintenant à la difficulté que signale M. Zaremba dans l'application des équations (3) du § 3. Considérons, avec M. Zaremba, un système de coordonnées $O'x'y'z'$ mobile (par rapport au système $Oxyz$) mais constamment parallèle à celui-ci. Supposons que le système $O'x'y'z'$ soit animé, par rapport à $Oxyz$, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme et que ces deux systèmes, $O'x'y'z'$ et $Oxyz$, coïncident au moment initial $t = 0$. Soient λ, μ, ν les composantes, rapportées aux axes $Oxyz$, de la vitesse de l'origine O' du système $O'x'y'z'$. Nous aurons alors, entre les coordonnées d'un même point, les relations

$$(1) \qquad x' = x - \lambda t \; ; \qquad y' = y - \mu t \; ; \qquad z' = z - \nu t.$$

Soient u', v', w' les composantes, rapportées au système $O'x'y'z'$, de la vitesse de la particule dont les composantes par rapport aux axes $Oxyz$ sont u, v, w; nous aurons

$$(2) \qquad u' = u - \lambda \; ; \qquad v' = v - \mu \; ; \qquad w' = w - \nu.$$

M. Zaremba considère le cas où le mouvement du fluide par rapport au système $O'x'y'z'$ est „parfaitement déterminé"; cela veut dire que les fonctions qui expriment comment les u', v', w' dépendent des x', y', z' et de t, sont indépendantes des paramètres λ, μ, ν.

On peut diviser en deux parties distinctes les raisonnements subséquents de M. Zaremba. Dans la première partie qui occupe les pages 88—91 du Mémoire et finit avec le Nr. 2 de celui-ci, M. Zaremba prouve que les valeurs de Φ qui se déduisent des équations (3) du § 3. ne vérifient pas, d'une façon entièrement générale et rigoureuse, les équations

$$(3) \qquad t\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 0 \; ; \qquad t\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mu} = 0 \; ; \qquad t\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0.$$

La nature même de ces équations nous enseigne qu'elles devraient être vérifiées pour des valeurs rigoureuses des composantes des pressions; il est donc juste de demander à des équations rigoureuses qu'elles satisfassent à la condition que M. Zaremba a indiquée. Or, les équations (3) du § 3. sont des relations approchées obtenues en négligeant certains termes dans les équations initiales; elles ont été données pour approchées dans mon Mémoire cité du 4. Février 1901, ainsi que le reconnaît M. Zaremba lui-même (l. c., p. 91). Je crois par conséquent qu'il faut considérer le raisonnement du Nr. 2 (pp. 88—91) du Mémoire de M. Zaremba comme une démonstration nouvelle et intéressante de cette circonstance qui n'est point douteuse: que les équations (3) du § 3. ne sont pas entièrement rigoureuses.

Ce n'est que dans la seconde partie de son raisonnement (Nr. 3, pp. 91—92) que M. Zaremba examine la question qui, à notre avis, était la seule discutable: les équations (3) du § 3. sont-elles, oui ou non, des relations suffisamment approchées? C'est à cette question que nous essayerons de répondre dans ce qui va suivre, en ayant soin d'ailleurs de définir le sens qu'il faut attacher à l'expression „suffisamment approchées" de la phrase précédente.

Nous ferons ici une remarque qui nous sera utile dans la suite. Si l'on tient compte de l'hypothèse du mouvement lent, dans laquelle nous nous sommes placés pour écrire les équations (3) du § 3., on voit aisément que, dans la discussion de ces équations, on doit a priori se borner à la considération du cas où les quantités

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\quad u',\ v',\ w'$$

(dans les notations de M. Zaremba) ont toutes de très petites valeurs. En effet, sans cette hypothèse, les composantes u, v, w de la vitesse du fluide par rapport au système $Oxyz$ pourraient devenir aussi grandes qu'on voudrait; ceci résulte immédiatement des équations et des conventions que M. Zaremba a adoptées et que nous avons reproduites au début de ce paragraphe.

§ 5. Considérons les systèmes $O'x'y'z'$ et $Oxyz$ de coordonnées dont nous avons fait usage jusqu'ici; mais introduisons, en outre, une série d'autres systèmes: $O_1 x_1 y_1 z_1$, $O_2 x_2 y_2 z_2$ etc., tous constamment parallèles aux systèmes $O'x'y'z'$ et $Oxyz$ et animés, par rapport à ceux-ci, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Supposons que tous ces systèmes coïncident avec le système $Oxyz$ à l'instant initial. Soient λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2 etc. les composantes (parallèles aux axes) de la vitesse de l'origine O' du système $O'x'y'z'$ par rapport aux systèmes $O_1 x_1 y_1 z_1$, $O_2 x_2 y_2 z_2$ etc. Soient pareillement u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2 etc. les projections sur les axes $O_1 x_1 y_1 z_1$, $O_2 x_2 y_2 z_2$ etc. de la vitesse d'une particule du fluide par rapport à ces axes. Ces notations sont résumées dans le tableau suivant:

$$Oxyz \quad : \quad \lambda,\ \mu,\ \nu\ ; \quad u,\ v,\ w \tag{1}$$

$$O_1 x_1 y_1 z_1 \ : \quad \lambda_1, \mu_1, \nu_1\ ; \quad u_1, v_1, w_1 \tag{2}$$

$$O_2 x_2 y_2 z_2 \ : \quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2\ ; \quad u_2, v_2, w_2 \quad \text{etc.} \tag{3}$$

Soit une fonction $F(x', y', z', t)$ des variables x', y', z', t. Exprimée au moyen des variables x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t etc., elle prendra la forme

$$F(x - \lambda t,\ y - \mu t,\ z - \nu t, t) \tag{4}$$

$$F(x_1 - \lambda_1 t,\ y_1 - \mu_1 t,\ z_1 - \nu_1 t, t) \tag{5}$$

$$F(x_2 - \lambda_2 t,\ y_2 - \mu_2 t,\ z_2 - \nu_2 t, t) \tag{6}$$

etc. Nous aurons

$$(7)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{xyz} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial F}{\partial y} + \nu\frac{\partial F}{\partial z} =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x_1 y_1 z_1} + \lambda_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + \mu_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + \nu_1\frac{\partial F}{\partial z_1}$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x_2 y_2 z_2} + \lambda_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + \mu_2\frac{\partial F}{\partial y_2} + \nu_2\frac{\partial F}{\partial z_2} \quad \text{etc.}$$

Ajoutons au premier membre de cette équation l'expression:

$$(8)\qquad u'\frac{\partial F}{\partial x} + v'\frac{\partial F}{\partial y} + w'\frac{\partial F}{\partial z};$$

au second:

$$(9)\qquad u'\frac{\partial F}{\partial x_1} + v'\frac{\partial F}{\partial y_1} + w'\frac{\partial F}{\partial z_1};$$

au troisième:

$$(10)\qquad u'\frac{\partial F}{\partial x_2} + v'\frac{\partial F}{\partial y_2} + w'\frac{\partial F}{\partial z_2} \quad \text{etc.}$$

L'équation (7) devient (ainsi qu'il fallait s'y attendre)

$$(11)\quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{xyz} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x_1 y_1 z_1} + u_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + v_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + w_1\frac{\partial F}{\partial z_1}$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x_2 y_2 z_2} + u_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + v_2\frac{\partial F}{\partial y_2} + w_2\frac{\partial F}{\partial z_2}$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{dF}{dt} \text{ (le système de cordonnées étant arbitraire).}$$

Observons que la valeur de la fonction Ω ne change pas lorsque, aux variables x', y', z', t, on substitue, dans son expression, les variables x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t; etc. Du raisonnement que l'on vient de lire, on peut donc tirer les conclusions suivantes: 1) lorsque, dans la série: $Oxyz$, $O_1 x_1 y_1 z_1$ etc., on passe d'un système de coordonnées à un autre, les équations (1) et (2) ou (9) du § 1. ne sont pas altérées; cela prouve qu'elles sont à l'abri de l'objection formulée par M. Zaremba au sujet des équations (2) et (3) du § 3.; 2) le même changement de système de coordonnées détermine, pour les équations (2) du § 3., une altération de type qui est la conséquence

immédiate de l'omission, dans les équations rigoureuses, des termes (1) du § 3. Cela suffit pour conclure que les équations (2), (3), (4) du § 3. ne peuvent être que des équations approchées, supposant un système de coordonnées convenable, c'est-à-dire choisi dans un groupe de systèmes qui, par leur mouvement de translation, diffèrent peu l'un de l'autre.

§ 6. Reprenons les équations (3) ou (4) du § 3.; pour les écrire, nous adoptons le système de coordonnées $Oxyz$. Cela revient à dire que les composantes u', v', w' de la vitesse du fluide par rapport à $O'x'y'z'$ ainsi que les composantes λ, μ, ν de la vitesse de l'origine O' par rapport à $Oxyz$ ont des valeurs suffisamment petites. Soit Φ la valeur d'une des composantes des pressions qui se calcule au moyen d'une des équations (3) ou (4) du § 3. Nous aurons

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t, \lambda, \mu, \nu). \tag{1}$$

où Φ ( ) désigne une fonction ne vérifiant pas les équations

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 0 \quad \text{etc.} \tag{2}$$

Dans l'expression (1) de Φ, posons

$$x = x' + \lambda t \;; \qquad y = y' + \mu t \;; \qquad z = z' + \nu t \;; \tag{3}$$

elle deviendra

$$\Phi = F(x', y', z', t, \lambda, \mu, \nu). \tag{4}$$

Comme au paragraphe précédent, considérons un troisième système de coordonnées $O_1 x_1 y_1 z_1$ dont le mouvement de translation par rapport à $O'x'y'z'$ diffère légèrement de celui dont est animé le système $Oxyz$. Supposons donc assez petites les composantes λ_1, μ_1, ν_1 de la vitesse de l'origine O' par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$ en sorte que l'on soit autorisé à écrire les équations (3) ou (4) du § 3. en les rapportant au système de coordonnées $O_1 x_1 y_1 z_1$. Soit Φ_1 la valeur que donne, dans ces conditions, celle des équations (3) ou (4) du § 3. à laquelle on s'est adressé. Nous aurons

$$\Phi_1 = \Phi(x_1, y_1, z_1, t, \lambda_1, \mu_1, \nu_1), \tag{5}$$

où Φ ( ) représente la fonction désignée par la même lettre plus haut; elle ne vérifie pas les équations (2) de ce paragraphe. La valeur (5) sera, en général, différente de celle que donne l'égalité (1) ci-dessus. Si, dans l'expression (5), nous posons

$$(6) \qquad x_1 = x' + \lambda_1 t \; ; \qquad y_1 = y' + \mu_1 t \; ; \qquad z_1 = z' + \nu_1 t.$$

elle deviendra

$$(7) \qquad \Phi_1 = F(x', y', z', t, \lambda_1, \mu_1, \nu_1).$$

Considérons la différence $\Phi_1 - \Phi$; nous dirons que c'est la variation de la composante Φ calculée au moyen des équations (3) ou (4) du § 3. En vertu des équations (4) et (7) nous sommes en droit de poser, lorsque les différences $(\lambda_1 - \lambda)$, $(\mu_1 - \mu)$, $(\nu_1 - \nu)$ sont suffisamment petites:

$$(8) \qquad \Phi_1 - \Phi = (\lambda_1 - \lambda)\frac{\partial F}{\partial \lambda} + (\mu_1 - \mu)\frac{\partial F}{\partial \mu} + (\nu_1 - \nu)\frac{\partial F}{\partial \nu}.$$

On pourra dire que l'emploi de cette formule équivaut à une hypothèse. Mais ce n'est là, au fond, qu'une de ces innombrables hypothèses auxquelles, en Physique, on fait un appel quotidien. Considérons maintenant les identités telles que

$$(9) \qquad \Phi(x, y, z, t, \lambda, \mu, \nu) = F(x', y', z', t, \lambda, \mu, \nu) \; ;$$

elles nous permettent d'écrire trois équations de la forme

$$(10a) \qquad t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \; ;$$

l'équation (8) devient donc

$$(11) \quad \Phi_1 - \Phi = (\lambda_1 - \lambda)\left(t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\right) + (\mu_1 - \mu)\left(t\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right) + \\ + (\nu_1 - \nu)\left(t\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right).$$

La variation $\Phi_1 - \Phi$, par conséquent, ne se détermine pas par les seules quantités suivantes (que pour plus de brièveté nous désignerons par φ_x, φ_y, φ_z):

$$(12) \quad t\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \varphi_x \; ; \qquad t\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = \varphi_y \; ; \qquad t\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \varphi_z \; ;$$

elle est donnée par l'équation (11) que nous pouvons transcrire ainsi qu'il suit:

$$(13) \qquad \Phi_1 - \Phi = (\lambda_1 - \lambda)\varphi_x + (\mu_1 - \mu)\varphi_y + (\nu_1 - \nu)\varphi_z \; .$$

§ 7. Calculons maintenant, en partant des équations (4) du § 3.,

les valeurs des quantités φ_x, φ_y, φ_z. Nous trouverons, en suivant la voie indiquée dans le Mémoire de M. Zaremba,

$$\varphi_x = \varepsilon^{-t/T}\left\{t\frac{\partial\Phi^0}{\partial x} + \frac{\partial\Phi^0}{\partial\lambda} - t\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\,t\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}. \qquad (1a)$$

où l'on a mis Φ^0 au lieu de $\Phi(x, y, z, 0)$.

Il est aisé de voir que, à l'époque $t = 0$, l'on a

$$\frac{\partial F^0}{\partial\lambda} = 0\,, \qquad \frac{\partial\Phi^0}{\partial\lambda} = 0\,. \qquad (2a)$$

Pour $t = 0$, ces propositions sont équivalentes. Ce qu'elles expriment toutes les deux, c'est que les pressions, au moment initial, doivent être déterminées par la nature même du problème d'une façon pour ainsi dire empirique; par conséquent, elles peuvent être regardées comme fonctions des variables (x', y', z', t ou x, y, z, t ou x_1, y_1, z_1, t, cela est indifférent lorsque $t = 0$) fonctions qui sont indépendantes des paramètres λ, μ, ν.

Considérons, en second lieu, le terme

$$\varepsilon^{-t/T}\,t\,\frac{\partial\Phi^0}{\partial x} \qquad (3a)$$

qui figure dans l'expression (1a) ci-dessus. Lorsque t va de 0 à ∞ le facteur $\varepsilon^{-t/T}\,t$ varie de la manière suivante: depuis zéro, il augmente jusqu'à la valeur maxima T/ε à laquelle il arrive pour $t = T$; il diminue ensuite et tend vers zéro.

En troisième lieu, considérons la quantité

$$R = \varepsilon^{-t/T}\left\{t\int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \int_0^t dt\,\varepsilon^{t/T}\,t\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}. \qquad (4)$$

Elle peut s'écrire, avec un changement de notation facile à comprendre,

$$R = \varepsilon^{-t/T}\int_0^t ds\,\varepsilon^{s/T}\,(t - s)\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,, \qquad (5)$$

où $t - s \geqslant 0$ et où l'on désigne par Ω une fonction $\Omega(x, y, z, s)$ de même forme que la fonction $\Omega(x, y, z, t)$ que l'on avait considérée jusqu'à présent. Substituons à $\partial\Omega/\partial x$, sous le signe de l'intégration, la valeur absolue $|\partial\Omega/\partial x|$; par là la valeur absolue de l'intégrale ne pourra qu'augmenter. Soit encore

(6) $$\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}_0^t$$

la valeur maxima qu'admet $|\partial\Omega/\partial x|$ pendant l'intervalle de temps de $t=0$ à $t=t$. On voit qu'il existe une limite au dessous de laquelle la valeur absolue de R reste constamment; c'est la suivante:

(7) $$|R| \leqslant \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}_0^t T(T-(t+T)\varepsilon^{-t/T}) .$$

Considérons l'expression

(8) $$T-(t+T)\varepsilon^{-t/T} ;$$

elle ne cesse d'augmenter lorsque t varie depuis 0 jusqu'à ∞ et elle est

(9) $$=0 \text{ lorsque } t=0 ; \quad =T \text{ lorsque } t=\infty .$$

La limite supérieure de $|R|$ peut donc varier entre les limites

(10) $$0 \text{ et } T^2\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}_0^\infty .$$

De ce qui vient d'être dit, on conclut, en se reportant à l'équation (1a), que l'on a

(11a) $$|\varphi_x| \leqslant \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi^0}{\partial x} + T^2\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}_0^x .$$

Les limites de $|\varphi_y|$ et de $|\varphi_z|$ se calculent d'une façon analogue. Jointes aux équations (3) du § 3., les inégalités (11) suggèrent tout naturellement le calcul que nous exposerons dans les lignes qui vont suivre.

§ 8. Acceptons l'équation (2) du § 3. L'opération $t\partial/\partial x+\partial/\partial\lambda$ la changera en

(1) $$\left(t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\Phi}{T}+\Omega\right)=0 ;$$

or ceci se réduit à

(2) $$t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{T}\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)=0$$

puisque

(3) $$(t\partial/\partial x+\partial/\partial\lambda)\Omega=0 .$$

Si, dans l'équation (2), on fait usage du symbole φ_x en lui prêtant la signification définie par l'égalité (12a) du § 6., on trouve

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \frac{\varphi_x}{T} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \,. \tag{4}$$

Ici $\partial\Phi/\partial x$ est une fonction des variables x, y, z, t que l'on sait calculer toutes les fois que Φ^0 et Ω sont données en fonctions de ces variables; à savoir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon^{-t/T} \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\, \varepsilon^{s/T} \frac{\partial \Omega(x, y, z, s)}{\partial x} \,. \tag{5}$$

Si donc l'on considère le symbole $(\partial\Phi/\partial x)$ comme une simple abréviation qui remplace le second membre de l'égalité (5), on peut écrire, en vertu de (4),

$$\varphi_x = \varepsilon^{-t/T} \varphi^0{}_x + \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\, \varepsilon^{s/T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \tag{6a}$$

Un raisonnement imité de celui dont nous avons fait usage plus haut, au § 7., conduit à poser $\varphi_x{}^0 = 0$ et montre que l'on a

$$|\varphi_x| \leqslant \left| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right|_0^t T(1 - \varepsilon^{-t/T}) \,. \tag{7a}$$

Il apparaît donc clairement que φ_x est une quantité petite tout-au-moins du même ordre que $T\,\partial\Phi/\partial x$.

§ 9. Reprenons l'équation (11) ou (13) du § 6. Les résultats que nous avons obtenus au § 7. nous permettent d'affirmer que

$$\begin{aligned} |\Phi_1 - \Phi| \leqslant & \left| (\lambda_1 - \lambda)\, T\left(\frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right| + T \left| \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right|^x_0 \right) \right| + \\ & + \left| (\mu_1 - \mu)\, T\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi^0}{\partial y} + T \left| \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right|^x_0 \right) \right| + \\ & + \left| (\nu_1 - \nu)\, T\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi^0}{\partial z} + T \left| \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right|^x_0 \right) \right| . \end{aligned} \tag{11}$$

Ainsi qu'au § 3., supposons que les quantités

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi^0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi^0}{\partial z}, \quad T\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad T\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad T\frac{\partial \Omega}{\partial z} \tag{2}$$

multipliées par l'unité de longueur, soient du même ordre que la quantité Φ elle-même. Supposons d'ailleurs que les composantes λ_1,

$\mu_1, \nu_1, \lambda, \mu, \nu$ soient extrêmement petites et que la période T soit tout au moins finie, en sorte que les produits

$$(3) \qquad (\lambda_1 - \lambda)\, T, \qquad (\mu_1 - \mu)\, T, \qquad (\nu_1 - \nu)\, T$$

représentent les projections sur les axes d'une distance extrêmement courte. Cela posé, on conclut de l'équation (1) que la variation $(\Phi_1 - \Phi)$ est donnée par une expression d'ordre supérieur à celui de la quantité Φ elle-même. Or cette condition, à savoir: que la variation de la composante Φ qui résulte de l'application des équations (3) ou (4) du § 3., soit une quantité petite d'ordre supérieur à celui de la composante Φ elle-même, est précisément celle qui doit être remplie pour que l'on puisse dire que les équations que nous discutons sont suffisamment approchées.

On arrivera aisément à la même conclusion en portant les résultats du § 8. dans l'équation (11) ou (13) du § 6. et en tenant compte de l'hypothèse relative aux Φ, $\partial\Phi/\partial x$ etc. dont nous avons donné l'énoncé au § 3. Cette méthode de démonstration est même évidemment plus directe que celle que nous venons d'exposer.

§ 10. Dans notre Mémoire Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité (voir ci-dessus, p. 268), nous avons prouvé que les équations (1) et (2) ou (9) du § 1. de cette Communication permettent de calculer rigoureusement la valeur de Φ qui existe, à l'époque t, pour une particule donnée (a, b, c) du fluide. Cette valeur est donnée par l'équation (10) du § 2. du Mémoire que nous venons de citer; nous lui donnerons le nom de valeur véritable et nous la désignerons par $\Psi^*(a, b, c, t)$ pour la distinguer de la valeur approchée $\Phi(x, y, z, t)$ que nous avons considérée dans ce qui précède. La différence de la valeur approchée et de la valeur véritable représente l'erreur que l'on commet en adoptant la valeur approchée; nous la désignerons par la lettre Γ. Pour arriver à former Γ, on peut, en premier lieu, exprimer la valeur approchée $\Phi(x, y, z, t)$ en fonction des variables a, b, c, t; soit $\Phi^*(a, b, c, t)$ l'expression à laquelle on parvient. L'erreur sera donnée par

$$(1) \qquad \Phi^*(a, b, c, t) - \Psi^*(a, b, c, t) = \Gamma^*(a, b, c, t)\,.$$

On peut procéder d'une manière différente. Soit $\Psi(x, y, z, t)$ l'expression que l'on obtient en substituant dans $\Psi^*(a, b, c, t)$ les variables x, y, z, t aux variables a, b, c, t; on aura

$$\Phi(x, y, z, t) - \Psi(x, y, z, t) = \Gamma(x, y, z, t) . \tag{2}$$

Désignons par δa, δb, δc, δt des variations infinitésimales entièrement arbitraires. L'égalité (1) nous donnera

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^*(a, b, c, t) = &\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\right)\delta a + \\ &+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\right)\delta b + \\ &+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\right)\delta c + \\ &+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + u\frac{\partial\Phi}{\partial x} + v\frac{\partial\Phi}{\partial y} + w\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\delta t . \end{aligned} \tag{3}$$

Supposons d'autre part que l'on ait choisi x, y, z, t pour variables indépendantes; désignons par δx, δy, δz, δt des variations infinitésimales arbitraires; en vertu de l'égalité (2) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\delta\Gamma(x, y, z, t) = &\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right)\delta x + \\ &+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)\delta y + \\ &+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\right)\right)\delta z + \\ &+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}\right)\right)\delta t . \end{aligned} \tag{4}$$

Posons

$$\delta a = 0 \; ; \qquad \delta b = 0 \; ; \qquad \delta c = 0 \tag{5}$$

dans l'égalité (3); dans ce cas, nous suivons une particule donnée dans les différentes positions qu'elle occupe successivement. L'égalité (3) nous donnera

$$\frac{\partial\Gamma^*}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u\frac{\partial\Phi}{\partial x} + v\frac{\partial\Phi}{\partial y} + w\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} . \tag{6}$$

Rappelons maintenant que l'on a, d'une part, l'équation (2) du § 3., savoir

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\Phi}{T} + \Omega = 0 \tag{7}$$

(équation où les quantités Φ et Ω sont supposées être exprimées en fonctions des variables x, y, z, t); et, d'autre part, l'équation (9)

du § 2. du Mémoire auquel nous venons de faire allusion; nous la transcrirons en y introduisant le symbole Ψ^* dont actuellement nous faisons usage:

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{\Psi^*}{T} + \Omega^* = 0 \; ; \tag{8}$$

ici Ψ^* et Ω^* doivent être exprimées en fonctions des variables a, b, c, t. Comme l'on a

$$\Omega \equiv \Omega^* \; ; \qquad \Phi \equiv \Phi^* \; , \tag{9}$$

les équations (7) et (8) permettent d'écrire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\Gamma^*}{T} \, . \tag{10}$$

L'équation (6) devient donc, en tenant compte de l'équation (10),

$$\frac{\partial \Gamma^*(a,b,c,t)}{\partial t} + \frac{\Gamma^*(a,b,c,t)}{T} - \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \, . \tag{11}$$

Supposons les dérivées $\partial \Phi / \partial x$ etc. calculées au moyen des équations de la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon^{-t/T} \frac{\partial \Phi(x,y,z,0)}{\partial x} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds \; \varepsilon^{s/T} \frac{\partial \Omega(x,y,z,s)}{\partial x} \; ; \tag{12a}$$

supposons ensuite les u, v, w calculées au moyen d'équations telles que

$$u = u(x,y,z,t) \; ; \qquad v = v(x,y,z,t) \; ; \qquad w = w(x,y,z,t) \; ; \tag{13}$$

le dernier terme du premier membre de l'équation (11) deviendra une fonction connue des variables x, y, z, t, fonction que nous représenterons par $G(x,y,z,t)$. Soit $G^*(a,b,c,t)$ l'expression que l'on obtient lorsque on exprime G en fonction des variables a, b, c, t. De l'équation (11) on tire

$$\Gamma^*(a,b,c,t) = \varepsilon^{-t/T} \Gamma^*(a,b,c,0) + \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds \; \varepsilon^{s/T} G^*(a,b,c,s). \tag{14}$$

Dans l'équation ainsi obtenue, on peut poser $\Gamma^*(a,b,c,0) = 0$ en vertu d'une remarque analogue à celle qui a été faite au § 7. En raisonnant ensuite de la manière que l'on connaît déjà, on peut évaluer l'ordre de grandeur de la quantité $\Gamma^*(a,b,c,t)$. Il est aisé de voir que l'ordre de grandeur de la quantité $\Gamma^*(a,b,c,t)$ est le même que celui que nous avons trouvé plus haut dans le cas de $(\Phi_1 - \Phi)$.

Posons

$$\delta x = 0 \; ; \qquad \delta y = 0 \; ; \qquad \delta z = 0 \tag{15}$$

dans l'équation (4); cela veut dire que nous fixons notre attention sur un point déterminé de l'espace occupé par le fluide. Nous aurons

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} \right) . \tag{16}$$

Dans l'équation (16) portons les valeurs

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z} \right) \tag{17a}$$

etc. que l'on tire des équations (2) du § 2. du Mémoire cité (voir à la page 269 de ce Volume). Les termes entre parenthèses deviendront

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) . \tag{18}$$

En vertu de l'équation (10) qui peut s'écrire de la façon suivante

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{T} , \tag{19}$$

l'équation (16), transformée ainsi qu'il vient d'être dit, fournit l'équation

$$\frac{\partial \Gamma(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\Gamma(x, y, z, t)}{T} - \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0 . \tag{20}$$

Considérons que l'on a, d'après les équations (10) du § 2. du Mémoire cité,

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial a} = \varepsilon^{-t/T} \frac{\partial \Psi^*(a, b, c, 0)}{\partial a} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds \, \varepsilon^{s/T} \frac{\partial \Omega^*(a, b, c, s)}{\partial a} \tag{21a}$$

et deux équations analogues; par conséquent les dérivées $\partial \Psi^* / \partial a$ etc. peuvent être regardées comme des fonctions connues des variables a, b, c, t. Dès lors, au moyen des équations telles que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \qquad \text{etc.} \tag{22a}$$

on pourra calculer $\partial \Psi / \partial x$ etc. que l'on exprimera en fonctions des variables x, y, z, t. Soit $H(x, y, z, t)$ la valeur des trois derniers termes du premier membre de l'équation (20). Nous aurons

$$(23)\quad \Gamma(x, y, z, t) = \varepsilon^{-\eta T}\Gamma(x, y, z, 0) + \varepsilon^{-\eta T}\int_0^t ds\, \varepsilon^{\eta T} H(x, y, z, s)$$

et, encore une fois, nous pourrons poser $\Gamma(x, y, z, 0) = 0$. L'évaluation de l'ordre de grandeur de $\Gamma(x, y, z, t)$ se fait comme à l'ordinaire. On s'assure aisément (voir § 3.) que l'erreur $\Gamma(x, y, z, t)$ est une quantité petite d'ordre supérieur à celui de la pression $\Psi(x, y, z, t)$ elle-même. Or la variation de l'erreur Γ est nécessairement identique à la variation de la valeur approchée Φ; en effet, la variation de la valeur véritable Ψ ne peut pas, par définition, être différente de zéro; par conséquent les résultats de ce paragraphe s'accordent avec les conclusions auxquelles nous avons été amenés dans les paragraphes précédents.

§ 11. Ces mêmes conclusions se trouvent, par contre, en désaccord avec les propositions que renferme le Nr. 3. de la Communication de M. Zaremba (pp. 91 – 92 de ce Volume); ceci m'impose l'obligation de soumettre le contenu du Nr. 3. de cette Communication à une analyse détaillée. Voici ce qu'affirme M. Zaremba: les équations (3) du § 3. devraient être exactes approximativement dans le cas où l'on n'envisagerait que des valeurs assez petites des paramètres λ, μ, ν; mais pour cela, il serait nécessaire et suffisant que, pour de petites valeurs des paramètres λ, μ, ν, les valeurs des expressions $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ du § 6. fussent très petites par rapport aux paramètres λ, μ, ν.

Quand pourra-t-on dire que les équations (3) du § 3. sont exactes approximativement? Evidemment dans le cas où la variation de la valeur Φ qui se déduit de ces équations est une quantité petite d'ordre supérieur à celui de la quantité Φ elle-même. Si cette condition est satisfaite, l'utilité pratique (pour ainsi dire) de ces équations ne saurait être révoquée en doute. Cela posé, reportons nous à l'équation (13) du § 6. Elle nous apprend que, toutes les fois que les quantités $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ (multipliées par l'unité de vitesse) seront données par des expressions du même ordre que celui de la quantité Φ, la variation $(\Phi_1 - \Phi)$ sera sûrement une quantité petite d'ordre supérieur à celui de la pression Φ elle-même. Il m'est donc impossible d'admettre la nécessité, pour les quantités $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, d'être très petites par rapport aux paramètres λ, μ, ν, nécessité que M. Zaremba pose en principe au Nr. 3. de sa Communication.

La proposition que nous venons d'analyser amène M. Zaremba

à formuler de la manière suivante la condition que devraient vérifier, pour être approximativement exactes, les équations (3) du § 3.: les quantités $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ devraient s'annuler identiquement pour $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. On devrait avoir, en d'autres termes,

$$\operatorname{Lim}\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0\\ \nu=0}}=0 \tag{1a}$$

ainsi que deux équations analogues. Cette conclusion n'étant donnée, dans le mémoire de M. Zaremba, que comme une conséquence qui découle de la proposition déjà analysée, nous serions en droit, en nous appuyant sur ce qui précède, de nous refuser à l'admettre. Mais il nous paraît préférable de la soumettre à l'examen en suivant une voie indépendante; c'est ce qui fera l'objet du paragraphe suivant.

Reprenons les considérations du § 6. Supposons, pour simplifier, que le système $O_1\, x_1\, y_1\, z_1$ se confonde constamment avec le système $O'\, x'\, y'\, z'$ en sorte que l'on ait

$$\lambda_1 = 0\ ; \quad \mu_1 = 0\ ; \quad \nu_1 = 0. \tag{2}$$

La valeur Φ_1 du § 6. pourra s'appeler Φ' puisqu'elle se rapporte au système $O'\, x'\, y'\, z'$. Nous aurons

$$\Phi - \Phi' = \lambda\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)+\mu\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\nu\left(t\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right). \tag{3}$$

Imaginons que les valeurs de λ, μ, ν tendent vers zéro. Il est juste d'exiger, dans ce cas, que la valeur de Φ converge vers Φ'. L'équation (3) nous apprend qu'il n'est nullement indispensable que les équations (1) soient vérifiées pour que, dans ce cas, Φ converge vers Φ'; la condition qui doit être remplie est seulement que les expressions

$$t\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\ , \qquad t\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\ , \qquad t\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \tag{4}$$

tendent, pour $\lambda = \mu = \nu = 0$, vers des limites qui ne sont pas infinies.

§ 12. Considérons, avec M. Zaremba, un fluide dont on rapporte le mouvement à un système de coordonnées $O'\, x'\, y'\, z'$. Introduisons ensuite, ainsi que plus haut (§ 5.), une série de systèmes différents:

$$O\, x\, y\, z\ , \qquad O_1\, x_1\, y_1\, z_1\ , \qquad O_2\, x_2\, y_2\, z_2 \qquad \text{etc.} \tag{1}$$

auxquels nous imposerons, comme au § 5., les conditions ordinaires: de coïncider, à l'époque $t=0$, avec le système $O'x'y'z'$ et d'être animés, à tout instant, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à ce même système $O'x'y'z'$. Soient

$$(2) \qquad \lambda', \mu', \nu' \; ; \qquad \lambda_1', \mu_1', \nu_1' \; ; \qquad \lambda_2', \mu_2', \nu_2' \qquad \text{etc.}$$

les composantes de la vitesse de l'origine O' par rapport à ces systèmes. On a, en vertu de l'hypothèse dans laquelle se place M. Zaremba,

$$(3) \qquad u = u' + \lambda' \; ; \qquad u_1 = u' + \lambda_1' \; ; \qquad u_2 = u' + \lambda_2' \qquad \text{etc.}$$

Essayons maintenant de définir un système de coordonnées $O''x''y''z''$, différent de $O'x'y'z'$, mais qui serait capable de nous rendre des services analogues. Il nous est défendu, en effet, de supposer, dans la démonstration de M. Zaremba, que le système de coordonnées qu'il désigne par $O'x'y'z'$ soit un système singulier dont les propriétés seraient exceptionnelles; la démonstration de M. Zaremba serait sans force et sans portée si l'on ne pouvait pas la répéter pour une infinité de systèmes mis à la place du système $O'x'y'z'$. Soit par exemple $O_n x_n y_n z_n$ le système, choisi parmi les systèmes (1) précédents, que nous prendrons pour $O''x''y''z''$. Posons donc, pour plus de clarté,

$$(4) \qquad \lambda_n' = \Lambda \quad \text{et} \quad u_n = u'' \; .$$

Considérons l'équation

$$(5) \qquad u_n = u' + \lambda'_n$$

qui est inclue parmi les équations du système (3) précédent. Elle s'écrira désormais

$$(6) \qquad u'' = u' + \Lambda \, .$$

Posons

$$(7) \qquad \left| \begin{array}{l} \lambda' - \Lambda = \lambda'' \\ \lambda_1' - \Lambda = \lambda_1'' \\ \lambda_2' - \Lambda = \lambda_2'' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

Les équations (3) nous donneront

$$(8) \qquad u = u'' + \lambda'' \; ; \qquad u_1 = u'' + \lambda_1'' \; ; \qquad u_2 = u'' + \lambda_2'' \qquad \text{etc.}$$

L'analogie qui existe entre les équations (8) et les équations (3)

nous confirme dans l'attente qu'il est possible de définir un système $O'' x'' y'' z''$, différent de $O' x' y' z'$, qui jouisse de propriétés exactement analogues à celles attribuées au système $O' x' y' z'$. De même, il nous sera possible de définir un troisième système $O''' x''' y''' z'''$, différent des deux premiers, qui jouira pareillement de propriétés analogues etc.

D'après l'hypothèse qu'admet M. Zaremba, nous avons

$$\begin{aligned} u' &= u'(x', y', z', t) \\ &= u'(x - \lambda' t,\ y - \mu' t,\ z - \nu' t, t). \end{aligned} \tag{9}$$

De là on déduit, en tenant compte des équations (6) et (7,1),

$$\begin{aligned} u'' &= u'(x - \lambda' t,\ y - \mu' t,\ z - \nu' t,\ t) + \Lambda \\ &= u'(x - (\lambda'' + \Lambda) t,\ y - (\mu'' + \mathrm{M}) t,\ z - (\nu'' + \mathrm{N}) t,\ t) + \Lambda. \end{aligned} \tag{10}$$

On désigne ici par M et par N les deux composantes qui sont analogues à Λ.

Imaginons que l'on calcule, au moyen de la formule

$$\Phi(x, y, z, t) = \varepsilon^{-t/T} \Phi(x, y, z, 0) - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t ds\ \varepsilon^{s/T} \Omega\ , \tag{11}$$

la valeur de la composante Φ, en s'appuyant, pour calculer Ω, la première fois sur l'équation

$$u = u'(x - \lambda' t,\ y - \mu' t,\ z - \nu' t,\ t) + \lambda' \tag{12a}$$

qui se déduit de (3) et de (9), et, la seconde fois, en prenant pour point de départ la formule

$$u = u'(x - (\lambda'' + \Lambda) t, y - (\mu'' + \mathrm{M}) t, z - (\nu'' + \mathrm{N}) t, t) + \Lambda + \lambda'' \tag{13a}$$

que l'on écrit en vertu de (8) et de (10). Soient

$$\Omega_1 = \Omega(x - \lambda' t,\ y - \mu' t,\ z - \nu' t,\ t) \tag{14,1}$$

$$\Omega_2 = \Omega(x - (\lambda'' + \Lambda) t,\ y - (\mu'' + \mathrm{M}) t,\ z - (\nu'' + \mathrm{N}) t,\ t) \tag{14,2}$$

les valeurs que l'on obtient ainsi. Dans ces égalités, la nature de la fonction Ω est la même. Portons les valeurs Ω_1 et Ω_2 dans l'équation (11). Dans les deux cas, les limites de l'intégration sont les mêmes; les mêmes quantités x, y, z, dans les deux cas, sont regardées comme constantes pendant l'intégration. Considérons, d'autre part, que les systèmes

$$Oxyz\ , \qquad O'x'y'z'\ , \qquad O''x''y''z'' \tag{15}$$

coïncident, par hypothèse, à l'époque $t=0$; cela prouve que, dans les deux cas dont il s'agit, les valeurs initiales de Φ sont les mêmes. De tout ceci on conclut que les valeurs que l'on trouve pour la pression Φ seront, dans ces deux cas, les suivantes:

$$(16,1)\qquad \Phi_1=\Phi(x,y,z,t\,,\ \lambda',\mu',\nu')$$

$$(16,2)\qquad \Phi_2=\Phi(x,y,z,t\,,\ \lambda''+\Lambda\,,\ \mu''+M\,,\ \nu''+N),$$

où l'on désigne par Φ une fonction dont la nature dans les deux cas est la même.

Rappelons maintenant que Λ ne dépend pas de λ'' (voir (7)). Par conséquent les équations (16) nous donnent

$$(17,1)\qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=\dot{\Phi}_x(x,y,z,t\,,\ \lambda',\mu',\nu')$$

$$(17,2)\qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=\dot{\Phi}_x(x,y,z,t\,,\ \lambda''+\Lambda\,,\ \mu''+M\,,\ \nu''+N)$$

$$(18,1)\qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}=\dot{\Phi}_\lambda(x,y,z,t\,,\ \lambda',\mu',\nu')$$

$$(18,2)\qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial\lambda''}=\dot{\Phi}_\lambda(x,y,z,t\,,\ \lambda''+\Lambda\,,\ \mu''+M\,,\ \nu''+N),$$

où il serait superflu d'expliquer les notations adoptées. Les équations (17) et (18) permettent d'écrire

$$(19,1)\quad t\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}=\Pi(x,y,z,t\,,\ \lambda',\mu',\nu')$$

$$(19,2)\quad t\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\lambda''}=\Pi(x,y,z,t\,,\ \lambda''+\Lambda\,,\ \mu''+M\,,\ \nu''+N).$$

On désigne ici par Π une nouvelle fonction dont la nature dans les deux équations est la même. Posons:

$$(20)\quad \begin{cases} \text{dans l'équation (19,1)}: & \lambda'=\Lambda\,,\ \mu'=M\,,\ \nu'=N \\ \text{dans l'équation (19,2)}: & \lambda''=0\,,\ \mu''=0\,,\ \nu''=0. \end{cases}$$

Nous obtenons l'égalité suivante:

$$(21)\qquad \left(t\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\lambda''}\right)_{\substack{\lambda''=0\\ \mu''=0\\ \nu''=0}}=\left(t\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}\right)_{\substack{\lambda'=\Lambda\\ \mu'=M\\ \nu'=N}}$$

M. Zaremba exige que l'on ait

$$\left(t\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}\right)_{\substack{\lambda'=0\\ \mu'=0\\ \nu'=0}}=0\,. \tag{22}$$

Supposons vérifiée cette équation (22). Le système $O''\,x''\,y''\,z''$ jouissant de propriétés exactement analogues, nous serons contraints d'exiger que l'on ait pareillement

$$\left(t\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\lambda''}\right)_{\substack{\lambda''=0\\ \mu''\\ \nu''}}=0\,. \tag{23}$$

Jointe à l'équation (21) l'équation (23) entraîne la conséquence suivante

$$\left(t\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda'}\right)_{\substack{\lambda'=\Lambda\\ \mu'=M\\ \nu'=N}}=0\,. \tag{24}$$

Les hypothèses que nous avons admises impliquent que les quantités Λ, M, N sont petites; mais, dans l'intervalle dans lequel elles sont enfermées, ces quantités sont entièrement arbitraires. La comparaison des équations (22) et (24) suffit donc à prouver que la condition posée par M. Zaremba revient à exiger que, dans cet intervalle, les équations que l'on soumet à l'épreuve soient absolument rigoureuses. Ainsi la proposition énoncée au Nr. 3. du Mémoire de M. Zaremba entraîne comme conséquence une conclusion qui équivaut à celle-ci: pour que certaines équations (les équations (3) du § 3. notamment) soient exactes approximativement, il est nécessaire et suffisant qu'elles soient absolument rigoureuses.

Rappelons d'ailleurs que c'est sur cette proposition que repose l'affirmation suivante qui clot le Nr. 3. du Mémoire de M. Zaremba: „Il est donc prouvé que les équations de M. Natanson sont absolument inexactes".

§ 13. Il me reste à faire une remarque relative au Mémoire Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides, présenté à l'Académie le 4. Mars 1901 [1]). Le titre de ce Mé-

[1]) Bulletin Intern. de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cl. d. Sc. Math et Nat., Année 1901, p. 161. Je saisis cette occasion pour remarquer que le résultat de cette Note est partiellement vicié par une erreur qui s'est glissée dans les calculs ultérieurs. J'espère pouvoir bientôt corriger cette erreur dans un Travail dans lequel je me propose de traiter certains points particulièrement intéressants de la théorie de la réfraction accidentelle.

moire apparaît dans la liste des travaux relatifs à la Théorie de la Viscosité que l'on trouve, avec cette remarque: „Il est évident que „la base scientifique de ces travaux est illusoire", dans le Nr. 4. de la Communication de M. Zaremba (pp. 92—93 de ce Volume). M. Zaremba affirme donc que le Mémoire auquel nous venons de faire allusion repose sur les équations approchées (3) du § 3. qui ont fait l'objet des discussions précédentes. Cette assertion est inexacte; le Mémoire Sur la double réfraction etc. repose sur les équations rigoureuses (1) et (2) ou (9) du § 1. qui ne sont même pas mentionnées dans le travail de M. Zaremba.

Ainsi que dans ce Mémoire, désignons par ε^*, φ^*, ψ^*, α^*, β^*, γ^* les composantes, rapportées à un système $Oxyz$ de coordonnées, de la déformation véritable; par e, f, g, a, b, c représentons les composantes de la vitesse de la déformation apparente. Nous aurons alors six équations dont il nous suffira ici d'écrire la sixième [1]):

$$\frac{\partial\gamma^*}{\partial t}+u\frac{\partial\gamma^*}{\partial x}+v\frac{\partial\gamma^*}{\partial y}+w\frac{\partial\gamma^*}{\partial z}+\frac{\gamma^*}{T}-c=0\ . \tag{1}$$

Les conditions dans lesquelles on se place dans l'expérience de Maxwell et de Kundt exigent que l'on pose $w=0$. Dans le Mémoire dont il s'agit, j'ai encore admis que l'on a

$$\frac{\partial\gamma^*}{\partial t}=0\ , \tag{2}$$

mais on ne serait pas en droit de négliger les termes

$$u\partial\gamma^*/\partial x+v\partial\gamma^*/\partial y\ . \tag{3}$$

Adoptons les notations du Mémoire en question et considérons une fonction arbitraire $F(r,\theta)$ des variables r et θ. Nous pouvons écrire, en vertu des équations (2a), (2b) du § 2., p. 164., de ce Mémoire,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}=\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}=\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\ . \tag{4b}$$

[1]) Bulletin Int. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, Année 1901, pp. 102—105 et 106.

On a d'autre part

$$u = \pm q \sin\theta \; ; \qquad v = \mp q \cos\theta \; . \tag{5}$$

Des équations (4) et (5) il résulte

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = \mp \frac{q}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \; . \tag{6}$$

Considérons l'équation (3) du § 1. du Mémoire que nous discutons; elle est la suivante:

$$\theta = \mp h t \quad \text{où} \quad h = \frac{q}{r} \; . \tag{7}$$

Par conséquent nous avons

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \mp \frac{q}{r} \frac{\partial \gamma^*}{\partial \theta} \; ; \tag{8}$$

ici on regarde γ^* comme une fonction de la variable t dont l'équation (7) est la définition. Les équations (6) et (8) nous donnent

$$u \frac{\partial \gamma^*}{\partial x} + v \frac{\partial \gamma^*}{\partial y} = \frac{d\,\gamma^*(t)}{dt} \; , \tag{9}$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (1) et (2),

$$\gamma^* = K \varepsilon^{-t/T} + \varepsilon^{-t/T} \int dt \; \varepsilon^{t/T} \; c \; . \tag{10}$$

C'est l'équation (3) du § 4. du Mémoire en question. Il apparaît donc clairement que le Mémoire Sur la double réfraction etc. s'appuye sur des équations rigoureuses de la forme (1) et (2) ou (9) du § 1. et qu'il ne dépend nullement d'équations approchées de la forme (3) du § 3.

Conclusions.

Les objections soulevées par M. Zaremba dans sa Communication du 9. Février 1903 sont, en résumé, les suivantes: 1) les hypothèses dans lesquelles je me suis placé impliqueraient le mouvement absolu; 2) les valeurs des composantes des pressions qui se calculent à l'aide de mes équations [(3) du § 3.] ne satisfont pas aux conditions qui devraient être remplies pour que les lois du mouvement d'un fluide par rapport à un système d'axes de coordonnées soit indépendant de la translation de ces axes; 3) les expressions des composantes des pressions que j'avais données comme

des expressions approchées, ne sont pas exactes, même approximativement.

Dans l'étude que l'on vient de lire, j'ai été amené aux conclusions suivantes:

1) Je rappelle, en premier lieu, que, dans mon Mémoire du 4. Février 1901, j'ai proposé un système d'équations que j'appelle rigoureuses [(1) et (2) ou (9) du § 1.] et qui se trouvent entièrement à l'abri des objections soulevées par M. Zaremba. Ce sont ces équations que je considère comme constituant la base essentielle de la théorie que j'ai proposée.

2) L'hypothèse du mouvement „lent" que j'ai invoquée pour établir certaines équations dites approchées [(3) du § 3.] est parfaitement légitime, puisque, dans mes Mémoires, je n'ai jamais étudié que les lois du mouvement relatif.

3) On est en droit de demander à des équations rigoureuses qu'elles satisfassent à la condition indiquée par M. Zaremba. Mais les équations (3) du § 3., contre lesquelles est dirigée sa Communication, sont des relations approchées et ont été données pour telles dans mon Mémoire du 4. Février 1901; par conséquent on n'est pas en droit d'exiger qu'elles remplissent la condition en question.

4) Reste la question qui (à mon avis) était la seule discutable: les équations (3) du § 3. sont-elles, oui ou non, des relations suffisamment approchées? Pour répondre à cette question, je considère, en premier lieu, la variation des composantes des pressions calculées au moyen des équations approchées (3) du § 3.; et, en second lieu, l'erreur que l'on commet en adoptant, au lieu de la valeur véritable de cette composante, sa valeur approchée. Je crois avoir prouvé que l'une et l'autre, la variation et l'erreur, sont des quantités petites d'ordre supérieur à celui de la composante elle-même. Or la condition qu'il en soit ainsi est précisément celle qui doit être remplie pour que l'on puisse dire que les équations que nous discutons sont suffisamment approchées.

5) Ces conclusions se trouvent en désaccord avec les résultats auxquels est arrivé M. Zaremba. Ce désaccord s'explique en considérant que le Critérium d'approximation suffisante adopté par M. Zaremba n'est pas justifié. Ce Critérium est même injustifiable et erroné puisque son adoption entraînerait comme conséquence une conclusion de la nature de la proposition suivante: pour que certaines équations soient exactes approximativement, il

est nécessaire et suffisant qu'elles soient absolument rigoureuses.

6) Le Mémoire Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides, que M. Zaremba considère comme reposant sur les équations approchées [(3) du § 3.] qui font l'objet de la discussion précédente, est basé, non point sur ces équations, mais sur les équations dites rigoureuses (1) et (2) ou (9) du § 1.

7) Dans un Mémoire Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité (présenté à l'Académie en même temps que cette Communication), j'ai montré que les conclusions auxquelles j'ai été amené dans mon Mémoire Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux (Séance du 7. Janvier 1902) subsistent et ne sont pas modifiées lorsque, dans la discussion des problèmes auxquels ce Mémoire est consacré, on prend pour point de départ les équations rigoureuses, au lieu des équations approchées dont j'ai fait usage dans le Mémoire mentionné.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

30 Czerwca 1903

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise
(Spółka wydawnicza polska)
à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzen Wydz. hist. filozof.« *Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 10 k. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Jagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI. XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 6 k. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol. VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 k. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski. 4 k. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674 1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 6 k. Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *Séances et travaux*, in 8-vo, 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol. I. II. IV. V épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo, 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

12.229

N° 6. JUIN 1903.

BULLETIN INTERNATIONAL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTÉ FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR: S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de **M. Ladislas Natanson,**
Membre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego

1903

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 6. **Juin** **1903.**

Sommaire: 27. M. ÉMILE GODLEWSKI père. Sur la formation des matières albuminoïdes dans les plantes.
28. M. ST. ZAREMBA. Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité.
29. M. ST. ZAREMBA. Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène.
30. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Séance du lundi 6 Juin 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

27. M. EMILE GODLEWSKI père m. t. **O powstawaniu materyj białkowatych w roślinach.** ***(Zur Kenntnis der Eiweissbildung in den Pflanzen).*** *(Sur la formation des matières albuminoïdes dans les plantes).*

Im Jahre 1897 publizierte ich im „Bulletin" eine vorläufige Mitteilung über Untersuchungen, welche hauptsächlich den Einfluss des Lichtes auf die Assimilation des Stickstoffs aus Nitraten[1]) und auf die Eiweissbildung in höheren Pflanzen zum Gegenstand hatten.

Als Ausgangspunkt diente mir die bekannte Arbeit Schimpers, in welcher derselbe durch eine mikrochemische Methode nachzuweisen suchte, dass Licht und Chlorophyll für die Zersetzung der Nitrate in den höheren Pflanzen unentbehrlich sind.

Als Objekt dienten mir Weizenkeimlinge, welche ich in den üblichen Nährstofflösungen teils im Dunkeln teils am Lichte, aber in einer kohlensäurefreien Atmosphäre sich entwickeln liess, um durch eine quantitative Analyse festzustellen, ob unter solchen Bedingungen, d. h. unter Ausschluss der Kohlensäureassimilation eine Zunahme des organischen Stickstoffs respekt. des Eiweissstickstoffs auf Kosten der Nitrate stattfinden kann. Der Vergleich der

[1]) Unter Assimilation verstehe ich hier nicht die Aufnahme der Nitrate selbst, sondern ihre Umarbeitung in organische Stickstoffverbindungen.

im Dunkeln und im Lichte erlangten Resultate sollte über den unmittelbaren vom Assimilationsprozesse unabhängigen Einfluss des Lichtes auf die Zersetzung der Nitrate und auf die Eiweissbildung Auskunft geben.

Aus diesen Untersuchungen ergab sich das Resultat, dass die Bildung der organischen Stickstoffverbindungen auf Kosten der Nitrate und der stickstofffreien Reservestoffe auch ohne Mitwirkung der Assimilation möglich ist, und zwar nicht nur im Lichte, sondern auch im Dunkeln, dass aber diese Bildung im Lichte oft mehr als dreimal so stark ist als im Dunkeln.

Dieses Resultat modifizierte insofern die Ansichten Schimpers, als es bewies, dass Licht und Chlorophyll für die Zersetzung des Salpeters in den höheren Pflanzen nicht absolut notwendig, sondern nur in hohem Grade förderlich sind.

Ausserdem hat sich aus meinen damaligen Untersuchungen gezeigt, dass eine Zunahme an Eiweissstickstoff im Verhältnis zu dem der Samen nur bei den im Lichte kultivierten Weizenkeimlingen zu konstatieren war, bei den Pflanzen, welche sich im Dunkeln entwickelten, fand immer eine bedeutende Abnahme des Eiweissstickstoffs statt.

Einige Wochen vor meiner damaligen Mitteilung erschien bekanntlich im gleichen Jahre 1897 auch eine Arbeit von Laurent Marchal und Carpiaux[1]), in welcher die Autoren zu dem gleichen Resultate gelangten, dass nämlich das Licht in hohem Grade die Umwandlung des anorganischen Stickstoffs (Ammoniak und Nitrate) in organischen beeinflusst. Ja die Autoren glaubten aus ihren Versuchen den Schluss ziehen zu müssen, dass bei höheren Pflanzen die Bildung der organischen Stickstoffverbindungen aus anorganischen ohne Lichtwirkung überhaupt nicht möglich sei und dass nur eine geringe Menge Ammoniaks aus Nitraten im Dunkeln sich bilden kann.

Zwar haben die Autoren bei den Versuchen im Lichte die Assimilation nicht auszuschliessen gesucht, so dass man bei ihren Versuchen eine indirekte Lichtwirkung voraussetzen konnte, dass aber wenigstens der Hauptsache nach nicht eine indirekte, sondern eine

[1]) Laurent Marchal et Carpiaux „Recherches expérimentales sur l'assimilation de l'azote ammoniacal et nitrique par les plantes supérieures" Extrait du Bulletin de l'Académie royale de Belgique, T. XXXII, 1896.

direkte Wirkung des Lichtes im Spiele war, folgt aus den Versuchen im farbigen Lichte, welche ergeben haben, dass nicht die wenig brechbaren Strahlen, von denen die Assimilation abhängt, sondern eben die allerbrechbarsten, ultravioletten, welche an der Assimilation der Kohlensäure sich kaum beteiligen, bei der Umarbeitung der anorganischen Stickstoffverbindungen in organische am kräftigsten gewirkt haben.

In einem wesentlichen Punkte differierten jedoch die Resultate von Laurent Marchal und Carpiaux von den meinigen. Die Autoren glaubten nämlich, bei ihren Salpeterversuchen nur eine geringe Ammoniakbildung im Dunkeln beobachtet zu haben, nie aber einen Zuwachs an organischem Stickstoff; ich habe dagegen bei allen Weizenkeimlingen, welche Salpeter enthielten und im Dunkeln kultiviert wurden, eine deutliche, wenn auch viel schwächere Zunahme an organischen, nicht eiweissartigen Stickstoffverbindungen als im Lichte, konstatiert zu haben geglaubt.

Diese Differenz sollte aufgeklärt werden. Wie ich das schon in meiner ersten Mitteilung hervorgehoben habe, war die Methode der Ammoniakbestimmung, welcher sich L. M. u. C. bedienten (Destillation der gepulverten und im Wasser suspendierten Substanz mit Magnesia) nicht einwurfsfrei, und zwar musste bei ihrer Anwendung das Ammoniak zu hoch und der organische Stickstoff zu niedrig bestimmt werden; anderseits aber habe ich bei meinen damals publizierten Weizenversuchen das Ammoniak gar nicht bestimmt, falls dasselbe also da war, wurde sein Stickstoff dem organischen zugezählt, was eine zu hohe Bestimmung desselben zur Folge haben musste. Um also meinen Schluss, dass auch in den im Dunkeln vegetierenden Weizenkeimlingen eine gewisse Menge Salpeterstickstoffs in organische, wenn auch nicht proteinartige Verbindungen übergeführt wird, mit Bestimmtheit aufrecht erhalten zu können, musste konstatiert werden, ob der aus der Vernachlässigung der Ammoniakbestimmung möglicherweise entstandene Fehler nicht so gross war, dass er die Richtigkeit dieses Schlusses beeinträchtigen konnte. Ausserdem war es wünschenswert, über die Natur der bei der Assimilation des Stickstoffes aus Salpeter sich bildenden nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen, eine nähere Auskunft zu erhalten. Dies waren die Gründe, weshalb ich seit der Veröffentlichung meiner ersten Mitteilung noch wiederholt auf die Versuche über die Assimilation des Stickstoffs aus Nitraten durch

die Keimpflanzen von Weizen und in dem letzt verflossenen Jahre auch von Gerste zurückkam. Sonstige Arbeiten und Berufspflichten haben es bewirkt, dass diese meine Untersuchungen nur langsam fortschreiten konnten und dass ihre Veröffentlichung erst jetzt zustande kam.

Unterdessen sind aber zahlreiche wertvolle Arbeiten erschienen, welche die von mir behandelten Fragen betreffen; bevor ich also zur Auseinandersetzung meiner eigenen Untersuchungen schreite, bin ich verpflichtet diese Arbeiten zu erörtern.

Übersicht der neuesten Literatur.

In meiner ersten Mitteilung habe ich unter anderem zwei Sätze aufgestellt, welche zu gewissen Missverständnissen Anlass gaben:

Satz 3. Die Bildung der Eiweissstoffe auf Kosten der Nitrate ist bei den Weizenkeimlingen unter gewöhnlichen Bedingungen ohne Lichtwirkung unmöglich.

Satz 5. „Diese intermediären, nicht proteinartigen Stickstoffverbindungen können sich in den Weizenkeimlingen auf Kosten der Nitrate auch im Dunkeln bilden, ihre Umbildung zu Proteinstoffen erfolgt aber nur im Lichte".

Diese Sätze wurden von manchen Autoren so verstanden, als ob ich der Ansicht wäre, dass die Eiweissbildung bei den höheren Pflanzen überhaupt nur im Lichte stattfinden könne. Das ist aber nicht der Fall. In Berücksichtigung der schon damals erschienenen und von mir zitierten Arbeit Hansteens, habe ich die obigen Schlüsse ausschliesslich auf das Objekt, mit welchem ich experimentierte, d. h. auf Weizenkeimlinge, welche unter gewöhnlichen Bedingungen vegetieren, beschränkt und von künftigen Untersuchungen die Entscheidung erwartet, wie die Resultate meiner Versuche mit denjenigen Hansteens in Übereinstimmung zu bringen sind.

Diese Erwartung ist nun teilweise erfüllt worden. Durch eine Reihe von Untersuchungen wurde in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren festgestellt, dass auch bei den höheren Pflanzen die Eiweissbildung im Dunkeln sowohl auf Kosten der Nitrate wie der nicht proteinartigen Stickstoffverbindungen möglich ist.

Diese Eiweissbildung im Dunkeln wurde an sehr verschiedenen Objekten konstatiert, aber immer nur dann, wenn den be-

treffenden Objekten neben der entsprechenden Stickstoffquelle auch stickstofffreie organische Verbindungen sehr reichlich zu Gebote standen.

So hat Zaleski[1]) eine Zunahme des Eiweissstickstoffs beobachtet, wenn er die Blätter von Helianthus annuus in Knop'scher Nährlösung unter Zusatz von 4% Lävulose 6 bis 39 Stunden im Dunkeln hielt. Dagegen fand er unter solchen Bedingungen immer eine Abnahme des Eiweissstickstoffs, wenn der Versuch in der Knop'schen Lösung ohne Zusatz der Lävulose ausgeführt wurde.

Derselbe Autor[2]) stellte fest, dass bei der Keimung der Zwiebel von Alium Cepa im Dunkeln die Menge der Eiweissstoffe auf Kosten des Nichteiweissstickstoffs zunimmt. Bemerkenswert ist, dass diese Eiweissbildung hier weder auf Kosten des Asparagins oder Glutamins, noch auf Kosten der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Stickstoffverbindungen stattfindet, da die Menge des Asparagins während der Keimung der Zwiebel eher zu- als abnimmt und die Menge des mit Phosphorwolframsäure fällbaren Stickstoffs fast unverändert bleibt. Demnach erfolgt hier die Eiweissbildung auf Kosten der Aminosäuren oder anderer nicht näher bestimmbaren Stickstoffverbindungen.

Dass bei der Keimung der Zwiebel die Eiweissbildung über die Eiweisszersetzung überwiegt, während bei der Keimung der Samen das Gegenteil zu beobachten ist, erklärt sich einerseits dadurch, dass die Zwiebel verhältnismässig wenig Eiweissstickstoff und viel Stickstoff des Nichteiweisses enthält, anderseits dadurch, dass der grosse Reichtum der Zwiebel an zuckerartigen Kohlenhydraten günstige Bedingungen für die Umwandlung des Nichteiweisses in Eiweiss schafft.

Die Resultate Zaleski's wurden später durch Prianischnikow[3]) bestätigt, wobei sich derselbe zur Eiweissbestimmung der Kontrolle wegen neben der Stutzer'schen Methode auch der Fällung des Eiweisses mit Phosphorwolframsäure, mit Bleiessig und mit Tannin bedient hat. Alle diese Fällungsmethoden haben hinreichend überein-

[1]) Zaleski: Zur Kenntniss der Eiweissbildung in den Pflanzen; Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft., B. XV. 1897.

[2]) Zaleski: Zur Keimung der Zwiebel von Alium Cepa und Eiweissbildung; Berichte der deuts. bot. Gesell., B. XVI. 1898.

[3]) Prianischnikow: Eiweisszerfall und Eiweissrückbildung in den Pflanzen; Berichte der deuts. bot. Gesell., B. XVII J. 1899.

stimmende Resultate gegeben, wodurch die Eiweissbildung bei der Keimung der Zwiebeln im Dunkel vollkommen sichergestellt wurde.

Anschliessend an diese Versuche Zaleski's und Prianischnikow's haben Iwanoff, Schreder und Schułow nachgewiesen, dass nicht nur bei der Keimung der gewöhnlichen Zwiebel, sondern auch bei der Keimung anderer pflanzlichen Speicherorgane Eiweissbildung auf Kosten anderer nichteiweissartigen Stickstoffverbindungen stattfindet. So konstatierte dies Iwanoff[1]) für Kartoffelknollen und Mohrrüben, Schreder[2]) für Kartoffelknollen und knollige Dahliawurzeln und Schułow[3]) für Runkelrüben.

Pałładin[4]) konstatierte eine Zunahme der Eiweissstoffe auf Kosten anderer stickstoffhaltigen Verbindungen bei den etiolierten Blättern von Vicia Faba, nachdem er dieselben auf einer 10% resp. 5% Rohrzuckerlösung 3 bis 4 Tage im Dunkeln gehalten hatte. Indessen war diese Zunahme doppelt so gross, wenn dasselbe Experiment im Lichte ausgeführt wurde.

Gettlinger[5]) knüpfte an die Untersuchung von Richards und Stich über die Wirkung der Verwundungen der Pflanzenteile auf ihre Atmung an und untersuchte, wie sich der Umsatz der Stickstoffverbindungen infolge der Verwundungen gestaltet. Er zerschnitt Zwiebeln von Allium Cepa oder Kartoffelknollen in mehrere Stücke, analysierte einen Teil dieser Stücke sofort, einen anderen, nachdem sie etwa 5 bis 7 Tage im Dunkeln in feuchter Luft verweilt hatten. Ausnahmslos erfolgte dabei eine starke Vermehrung der Eiweissstoffe offenbar auf Kosten anderer Stickstoffverbindungen.

Diese Resultate Gettlinger's wurden später durch Zaleski[6]) an verschiedenen fleischigen Pflanzenorganen, wie den Wurzeln von Beta vulgaris, Daucus carota, Apium graveolens, Knollen von Kar-

[1]) Iwanoff. „Versuche über die Frage, ob in den Pflanzen bei Lichtabschluss Eiweissstoffe sich bilden", Landwirtschaftliche Versuchsstationen B. 55, S. 78, 1901.

[2]) Schreder: Извѣстія Московского сельскохозяйского Института. Zitiert von Schułow.

[3]) Schułow „Образованіе бѣлковъ высшими растеніями въ темнотѣ" Separatabd. aus „Извѣстія Московск. сельскохоз. Института" Kw. IV 1902.

[4]) Palladin „Influence de la lumière sur la formation de matières protéiques actives etc", extrait de la Revue générale de Botanique. T. II 1899.

[5]) Геттлингеръ „Вліяніе раненій на образованіе бѣлковыхъ веществъ въ растеніяхъ".

[6]) Zaleski „Beiträge zur Kenntnis der Eiweissbildung in der Pflanze". Ber. d. deutsch. Bot. Gesellsch. B. XIX 1901.

toffeln und von Dahlia variabilis bestätigt, wobei die wichtige und von Gettlinger, wie es scheint, vernachlässigte Vorsicht der Sterilisation der Objekte und des Versuchsraumes beobachtet wurde. Ob nach dem Versuche das Sterilbleiben der Versuchsobjekte kontroliert wurde, wird nicht angegeben. Der Umstand des Sterilbleibens ist sehr wichtig, da es möglich wäre, dass die konstatierte Eiweissvermehrung nicht von den Versuchsobjekten selbst, sondern von den an denselben vegetierenden Mikroorganismen stammen könnte. Einige seiner Versuche mit Zwiebeln führte Zaleski auch in einem mit Wasserstoff erfüllten Raume aus und fand, wie es zu erwarten war, dann keine Eiweissvermehrung.

Einen sicheren Nachweis für die Bildung der Eiweissstoffe im Dunkeln glaubt Goldberg[1]) dadurch erbracht zu haben, dass er bei den 3-, 8- und 14-tägigen Weizenkeimlingen die Pflänzchen von dem Endosperm trennte, und beide getrennt auf ihren Eiweissgehalt untersuchte. Es hat sich natürlich gezeigt, dass in den nacheinander folgenden Keimungsstadien die Menge des Eiweissstickstoffes in den Pflänzchen stätig zu-, im Endosperm aber konstant abnahm. Dieses Resultat war vorauszusehen, da ja die Eiweissstoffe im Endosperm bekanntlich eben dazu bestimmt sind, um nach den Keimlingen zu wandern und dort als Material für Plasmabildung zu dienen. In wie weit nun diese Wanderung in Form von Eiweiss selbst und in wie weit in Form von Zersetzungsprodukten desselben stattfindet, das lässt sich ohne weiteres nicht beurteilen, doch ist angesichts dessen, dass die Protoplasten benachbarter Zellen untereinander bekanntlich durch Plasmodesmen verbunden sind, die Wanderung der Eiweissstoffe als solcher von Zelle zu Zelle durchaus nicht ausgeschlossen. Deswegen führen die Versuche Goldberg's über die Bildung der Eiweissstoffe im Dunkeln zu keiner Entscheidung.

Viel wichtiger für die uns interessierende Frage sind die Versuche Suzuki's[2]), namentlich diejenigen, welche dieser Forscher mit etiolierten Gerstepflanzen ausgeführt hat.

Etiolierte 15 cm. hohe Gerstekeimlinge wurden eine Woche lang

[1]) Гольдбергъ „Образованіе бѣлковыхъ веществъ во время проростанія пшеницы въ темнотѣ".

[2]) Suzuki „On the formation of proteids and the assimilation of nitrates by phanerogams in the absence of light" Bulletin of the College of Agriculture of the Imperial University, Vol. III, N. 5. 3484 Tokyo, Japan, 1898.

in einer 0·2% Lösung von salpetersaurem Natron gehalten, ein Teil derselben wurde dann sofort getrocknet und analysiert, ein anderer in eine 10% Rohrzuckerlösung gesetzt, 7 Tage lang im dunkeln Raume gehalten und erst dann getrocknet und analysiert.

Die Analyse ergab folgendes:

	100 Keimlinge enthielten:	
	am Anfange des Versuches mgr.	am Ende des Versuches mgr.
Gesamtstickstoff	57·6	58·2
Eiweissstickstoff	25·2	30·5
Asparaginstickstoff	17·2	16·6
Salpeterstickstoff	4·4	0·0
Sonstiger Stickstoff	10·8	11·2

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass hier die Bildung der Eiweissstoffe auf Kosten des Salpeterstickstoffs stattgefunden hat. Bemerkenswert ist, dass bei einem anderen Versuche, welcher ganz ähnlich ausgeführt wurde mit dem einzigen Unterschiede, dass anstatt einer 10% nur 1% Zuckerlösung angewendet wurde, keine Eiweissbildung konstatiert werden konnte. Es zeigte sich demnach, dass die Eiweissbildung nur bei Anwesenheit eines grossen Überschusses von Zucker im Dunkeln möglich war.

Endlich möge noch die ausführliche Publikation der Arbeit Hansteens[1]) kurz besprochen werden. Derselbe hat hier neben seinem bekannten Lemnaversuche noch einige Versuche mit etiolierten Keimlingen von Vicia Faba und Ricinus communis beschrieben. Er injizierte direkt in den Stengel der zuvor durch Entfernung der Kotyledonen ausgehungerten etiolierten Keimlinge der genannten Pflanzen unter allen Kautelen der Aseptik Lösungen von Trauben- oder Rohrzucker einerseits und von Asparagin oder Glutamin anderseits, und, nachdem die so behandelten Objekte neben anderen ähnlichen Vergleichsobjekten, welche keine oder eine nur aus reinem Wasser bestehende Injektion erhalten hatten, einige Tage im Dunkeln verblieben waren, unterzog er beide (Versuchs- und Vergleichsobjekte) einer mikrochemischen Untersuchung. Dieselbe erstreckte sich auf Zucker, Asparagin

[1]) Hansteen „Ueber Eiweissynthese in grünen Phanerogamen". Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik B. 33, S. 417—486.

resp. Glutamin und Eiweiss. Es zeigte sich, dass die Injektion des Traubenzuckers das Verschwinden oder wenigstens eine Abnahme der Asparagin- resp. Glutaminreaktion und eine verstärkte Eiweissreaktion zur Folge hatte, während die Injektion des Rohrzuckers ohne jeden Einfluss auf diese Reaktionen blieb. Daraus ist zu folgern, dass in Übereinstimmung mit den Resultaten der Lemnaversuche auch in diesen Pflanzen Asparagin resp. Glutamin bei Anwesenheit einer reichlichen Menge von Traubenzucker, nicht aber von Rohrzucker auch im Dunkeln in Eiweissstickstoff sich umbilden kann.

Auf Grund aller seiner Versuche sowie der oben besprochenen Zaleski's, Suzuki's und anderer stellt Hansteen in dem Abschnitt „Hauptresultate“ [1]) den Satz auf: „Das Licht spielt jedenfalls im allgemeinen keine direkte Rolle bei der Eiweisssynthese in grünen phanerogamen Pflanzen“. An einer anderen Stelle [2]) spricht er sich folgendermassen aus: „Die Pfeffer'sche Anschauung, dass das Licht in der angedeuteten Weise nur eine indirekte Rolle spiele, scheint demnach jetzt als eine festgestellte Tatsache betrachtet werden zu können“. Dass Hansteen in dieser Äusserung viel zu weit geht, wird später dargetan werden.

Die letzte Arbeit, welche über die uns interessierende Frage erschienen ist, ist die neueste Publikation von Laurent und Marchal [3]), in welcher die Autoren ihre frühere Ansicht, dass das Licht bedeutungsvoll für die Eiweisssynthese ist, aufrecht erhalten. Die Versuche wurden hauptsächlich mit Keimlingen von Kresse und Senf, aber auch mit abgeschnittenen Sprossen von Kartoffeln, Spargeln, Senf, Birnen, Cichorien und Riesenklee ausgeführt.

Im Gegensatz zu ihren früheren Versuchen und in Übereinstimmung mit den Resultaten meiner Versuche mit Weizenkeimlingen haben die Verfasser gefunden, dass Keimpflanzen von Kresse und Senf auch im Dunkeln eine, wenn auch nur kleine Menge des Salpeterstickstoffs in organische, nicht proteinartige Verbindungen umzuarbeiten vermögen. In Bestätigung der Versuchsresultate Suzuki's mit Gerstenpflanzen fanden die Autoren, wenn auch nur in einem einzigen Versuche, dass grüne Kressekeimlinge ein ziemlich

[1]) Hansteen l. c. S. 485.

[2]) Hansteen l. c. S. 430.

[3]) Laurent u. Marchal „Recherches sur la synthèse des substances albuminoïdes par les végétaux“. Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 1903.

bedeutendes Anwachsen des Proteinstickstoffs zeigten, wenn sie in einer salpeterhaltigen Nährlösung, welcher 4% Rohrzucker zugefügt wurde, 10 Tage lang im Dunkeln gehalten wurde. Indessen war das Anwachsen der Proteinstoffe in Vergleichspflanzen, welche in einer gleichen Lösung am Licht geblieben waren, mehr als dreimal so hoch. Bei allen übrigen Versuchen war der Zuwachs an Proteinstoffen immer nur im Lichte, nicht aber im Dunkeln zu beobachten. Auch war der Zuwachs an gesamtem organischen Stickstoff auf Kosten des anorganischen (sei es Ammoniak oder Salpetersäure) im Lichte immer unvergleichlich grösser als in der Dunkelheit, was den bedeutungsvollen Einfluss des Lichtes auf die Bildung der stickstoffhaltigen organischen Verbindungen bei den höheren Pflanzen klar zu Tage bringt. Leider haben die Verfasser nicht dafür gesorgt, bei den dem Lichte ausgesetzten Pflanzen die Assimilation auszuschliessen, so dass man nicht beurteilen kann, in wie weit die Lichtwirkung auf die Eiweissbildung und auf die Umarbeitung des anorganischen Stickstoffs in organischen eine direkte und in wie weit sie nur eine indirekte war. Doch finden wir in der neuesten Arbeit von Laurent und Marchal zwei Versuche, aus welchen man auf eine direkte Lichtwirkung auf die Eiweisssynthese schliessen darf. Der eine betrifft die Keimlinge der Kresse, welche in einer Nährlösung, welche 4% Rohrzucker enthielt, 1 Woche lang teils im Lichte, teils im Dunkeln, gehalten wurden. Es stellte sich heraus, dass auch im Dunkeln eine Neubildung der Eiweissstoffe stattfand, aber dreimal schwächer war als im Lichte. Da es nun wegen der reichlichen Ernährung mit Zucker auch den Dunkelpflanzen an stickstofffreien Material nicht gefehlt hat, so ist wenigstens sehr wahrscheinlich, dass der günstige Einfluss, welchen das Licht auf die Eiweissbildung ausgeübt hat, nicht durch Assimilation, sondern durch die direkte Lichtwirkung bedingt wurde.

Gegen diese Schlussfolgerung könnte man aber einwenden, dass, wie Hansteen gezeigt hat, Rohrzucker kein günstiges Material für Eiweisssynthese ist und dass also die Eiweissbildung aus dem Grunde im Lichte energischer als im Dunkeln vor sich ging, weil die Kohlenhydrate, welche sich durch Kohlensäureassimilation bildeten, für Eiweisssynthese geeigneter waren als Rohrzucker.

Mehr entscheidend für die Annahme einer direkten Lichtwirkung auf Eiweisssynthese ist der Versuch der Autoren, welcher sich auf Eiweissbildung in verschiedenfarbigem Lichte bezieht. 5 gleiche

Portionen von Keimpflanzen von Senf wurden in einer salpeterhaltigen Nährlösung unter doppelwandigen, mit verschiedenfarbigen Flüssigkeiten gefüllten Glasglocken 4 Tage lang gehalten und auf Eiweissstickstoff untersucht, in der sechsten Portion wurde der Eiweissstickstoff am Anfange des Versuches bestimmt. Die Analyse ergab:

	Eiweissstickstoff mgr.
Portion analysiert am Anfange des Versuches	156·7
„ im Dunkeln	143·4
„ unter der Glocke mit Wasser	172·3
„ „ „ „ „ Doppelchromsäurekalilösung	151·4
„ „ „ „ „ Kupferoxydammoniaklösung	158·4
„ „ „ „ „ Schwefelsaurechininlösung	145·8

Diese Zahlen bestätigen vollkommen den schon in der ersten Arbeit der Autoren aufgestellten Satz, dass die allerwichtigste Rolle bei der Eiweissbildung den unsichtbaren ultravioletten Strahlen, welche sich bei der Kohlensäureassimilation kaum beteiligen, zukommt, dass dagegen die sichtbaren die Kohlensäurezersetzung bewirkenden Strahlen fast bedeutungslos für die Eiweisssynthese sind. Diesen Versuch über die Wirkung des farbigen Lichtes auf Eiweisssynthese betrachte ich als den wichtigsten aus der ganzen Arbeit der Autoren, weil derselbe allein auf eine direkte, von der Assimilation unabhängige Lichtwirkung bei der Eiweisssynthese mit Sicherheit schliessen lässt.

Auf Grund dieses Versuches kann man den Autoren nur beipflichten, wenn sie die Meinung aussprechen, dass bei den phanerogamen grünen Pflanzen die für Eiweisssynthese nötige Energie der Regel nach vom Lichte geliefert wird, während sie bei den chlorophyllfreien Pflanzen von den chemischen Spannkräften der Reservestoffe gewonnen wird.

Untersuchungsmethode.

Die Methode der Untersuchung war im allgemeinen dieselbe wie bei meinen früheren Versuchen, sie bestand nämlich darin, dass Weizen respective Gerstesamen von annähernd gleichem Gewichte in Schönjahn'schen Keimapparaten ausgesät wurden. Nachdem die Wurzeln eine Länge von etwa 1 bis 2 ctm. erreicht hatten, wurden die Apparate mit vollständiger resp. stickstofffreier Nährlösung ge-

füllt. Die Pflänzchen wurden etwa 3 Wochen lang, sei es im Dunkeln, sei es im Lichte, aber in einer kohlensäurefreien Atmosphäre kultiviert und dann geerntet, getrocknet, gewogen und einer Analyse auf die verschiedenen Stickstoffformen unterworfen. Während ich mich bei den früheren Versuchen auf die Bestimmung des Gesamtstickstoffs, des Eiweissstickstoffs nach Stutzer und des Salpeterstickstoffs beschränkte, habe ich bei meinen weiteren Versuchen auch Ammoniakstickstoff, Amidstickstoff nach Sachse, Aminosäurestockstoff nach Sachse-Böhmer und oft auch den Stickstoff der durch Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen bestimmt. In einer umfangreichen Arbeit über den Stoffwechsel der Eiweissstoffe in der Pflanze[1]) bezweifelt Prianischnikow bei der Besprechung meiner Arbeit die Beweiskraft meiner Versuche in Bezug auf die Bildung der amidartigen organischen Stickstoffverbindungen auf Kosten des Salpeters im Dunkeln aus dem Grunde, weil zu geringe Quantitäten der Pflanzensubstanz zu den Einzelbestimmungen verwendet wurden, wodurch die analytischen Fehler für die Beurteilung der Resultate sehr bedenklich sein sollen.

Um diesem Einwand zu begegnen und auch ein beweiskräftiges Material für die Beurteilung meiner weiteren Versuche zu liefern, halte ich es für angezeigt, einige Analysenresultate, welche zur Kontrolle der Methode ausgeführt wurden, hier etwas ausführlicher samt den analytischen Belegen mitzuteilen.

Bei meinen ersten Versuchen im Jahre 1896, wurden von den für die Versuche bestimmten Weizensamen etwa 30 gr. auf einer Excelsiormühle gemahlen und zunächst auf den gesamten Stickstoffgehalt analysiert.

Die Stickstoffbestimmungen nach Kjeldahl ergaben:

2·6306 gr.	Weizenmehl	gab	0·04049 gr.	Stickstoff	=	1·536%
1·6032 gr.	„	„	0·02513 gr.	„	=	1·567%
1·4316 gr.	„	„	0·02233 gr.	„	=	1·560%
				Mittelzahl	=	1·554%.

Um den Gehalt an Protein und Nichtproteinstickstoff in den Weizensamen zu bestimmen, wurden 2·3045 gr. Weizenmehl mit

[1]) Пріянишниковъ „Бѣлковыя вещества и ихъ превращенія въ растеніи въ связи съ дыханіемъ и ассимиляціей“. Москва 1899.

200 c. c. Wasser 6 Stunden lang bei Zimmertemperatur unter öfterem Schütteln digeriert und dann $^3/_4$ dieser Flüssigkeit abfiltriert.

75 c. c. des Filtrates wurde zum Kochen erhitzt und mit Kupferoxydhydrat nach Stutzer versetzt, der Niederschlag abfiltriert, gewaschen und mit Schwefelsäure verbrannt. Die Bestimmung ergab 0·00249 gr. Stickstoff, also für 200 c. c. 0·0066 gr. Stickstoff der löslichen Eiweissstoffe.

Das Filtrat von dem Niederschlage mit $Cu(OH)_2$ wurde zur Trockene abgedampft und mit Schwefelsäure verbrannt. Die Bestimmung ergab 0·00097 gr. Stickstoff, also für 200 c. c. 0·0026 gr. des Nichtproteinstickstoffs.

Demnach erhielt die ganze Lösung 0·0066 + 0·0026 = 0·0092 des Gesamtstickstoffs.

Weitere 65 c. c. Lösung durch Verdampfung eingeengt und mit Schwefelsäure verbrannt, gaben 0·00311 gr. Stickstoff, also für 200 c. c. 0·0083 gr.

Der Unterschied zwischen beiden Bestimmungen betrug also 0·0009 gr.

Der unlösliche Rückstand mit den restierenden 50 c. c. Lösung nach Kjeldahl verbrannt, ergab 0·0297 gr. Stickstoff. Zieht man davon 0·0023 bez. 0·0020 gr. als Stickstoff der 50 c. c. Lösung ab, so ergibt sich für den Stickstoff der unlöslichen Eiweissstoffe 0·0274 bez. 0·0277 gr.

Demnach ergab die Analyse für 2·3045 gr. Weizenmehl:

Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	0·0274 gr.	bez.	0.0277 gr.
„ „ löslichen Proteinstoffe	0·0066 gr.	„	0 0083 gr.
„ „ nicht proteinartigen Verbindungen	0·0026 gr.	„	
Im ganzen:	0·0366 gr.	bez.	0·0360 gr.

Nach der direkten Gesamtstickstoffbestimmung enthielt das Weizenmehl 1·554% Stickstoff, demnach in 2·3045 gr. 0·0358 gr.

Nimmt man diese Zahl als richtig an, so betrug der Fehler bei der Bestimmung des Gesamtstickstoffs aus der Summierung der Einzelbestimmungen seiner verschiedener Formen in der eben angeführten Analyse nur 0·0008 bez. 0·0002 gr.

Berechnet man nach dieser Analyse den prozentischen Gehalt des Weizenmehls an verschiedenen Stickstoffformen, so erhält man:

Für Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	. . . .	1·187%
„ „ der löslichen Proteinstoffe	. . . . .	0·286%
„ „ sonstiger nicht proteinartigen Verbindungen		0·113%
		1·586%.

Diese Zahlen wurden bei der Berechnung des Stickstoffs verschiedener Verbindungen in den für die Versuche verwendeten Samen zu Grunde gelegt.

Zur Kontrolle der Analysenmethode der Versuche von 1896 wurde noch eine Analyse folgender Mischung ausgeführt:

2·569 gr. desselben Weizenmehls	mit	0·0407 gr.	Stickstoff
0·1300 „ Asparagin	„	0·0241 gr.	„
0·1773 „ Kalisalpeter	„	0·0245 gr.	„
		0·0893 gr.	„

Dieses Gemenge wurde bei Zimmertemperatur 6 Stunden lang unter häufigem Schütteln mit 200 c. c. Wasser digeriert, die Lösung abfiltriert und portionsweise analysiert.

50 c. c. Lösung gab nach Stutzer 0·00238 gr., demnach in der ganzen Lösung (200 c. c.) 0·0095 gr. Eiweissstickstoff.

Das Filtrat im Glycerinbade zur Trockene abgedampft und nach Förster für Gesamtstickstoff verbrannt, ergab 0·01151 gr., also für die ganze Lösung 0·0464 gr. Stickstoff.

Der ganze Stickstoffgehalt der Lösung war demnach 0.0095 + 0·0460 = 0·0555 gr.

50 c. c. Lösung wurden im ganzen zur Trockene abgedampft und nach Förster verbrannt. Man erhielt 0·01421 gr., also für die ganze Lösung 0·0568 gr. des Gesamtstickstoffs der Lösung.

Der Unterschied zwischen beiden Bestimmungen des Gesamtstickstoffs der Lösung beträgt also 0·0013 gr.; der Durchschnitt aus beiden Bestimmungen des Gesamtstickstoffs 0·0562 gr.

50 c. c. wurden zur Bestimmung des Salpeters nach Pfeiffer benutzt. Man erhielt 0·00614 gr., also für die ganze Lösung 0·0246 gr. Salpeterstickstoff.

Nach diesen Bestimmungen berechnet sich der Stickstoff des Asparagins samt den nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen des Weizenmehls:

$$0{\cdot}0562 \text{ gr.} - 0{\cdot}0095 \text{ gr.} - 0{\cdot}0246 \text{ gr.} = 0{\cdot}0221 \text{ gr.}$$

Die letzten 50 c. c. der Lösung samt dem unlöslichen Rückstande wurden im Glycerinbade abgedampft und nach Förster verbrannt. Man fand darin 0·0439 gr. des Gesamtstickstoffs. Zieht man davon 0·041 gr. als Stickstoff der Lösung ab, so erhält man: 0·0439 gr. — 0·0141 gr. = 0·0298 gr. für den Stickstoff der unlöslichen Proteinverbindungen.

Wenn wir nun die aus der Zusammensetzung der Mischung berechneten Zahlen mit den wirklich gefundenen vergleichen, so erhalten wir folgendes:

TABELLE I.

	Berechnete Zahlen.	Gefundene Zahlen.
N der unlöslichen Proteinstoffe im Weizenmehl	0·0305 gr.	0·0298 gr.
„ der löslichen Proteinstoffe im Weizenmehl	0·0073 „	0·0095 „
„ der Nichtproteinstoffe im Weizenmehl 0·0029 / im Asparagin . 0·0241	0·0270 „	0·0221 „
„ des Salpeters	0·0245 „	0·0246 „
Gesamtstickstoff:	0·0893 gr.	0·0860 gr.

Die Analyse ergab demnach ein Manko von etwa 3 mgr. Stickstoff. Es ist bemerkenswert, dass die Bestimmungen des Salpeterstickstoffs und des Stickstoffs der unlöslichen Proteinstoffe ganz vorzüglich mit den berechneten übereinstimmen und ein bedenklicher Fehler bezieht sich nur auf die Bestimmungen der löslichen organischen Stickstoffverbindungen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass bei der Bestimmung des Gesamtstickstoffs der Lösung nach der Methode von Förster geringe Stickstoffverluste bei dem Abdampfen der Lösungen eintreten, sei es durch Zerlegung eines Teils des Asparagins und Entweichen des daraus entstandenen Ammoniaks, sei es durch Verlust eines kleinen Teils des Salpeterstickstoffs. Dass das Manko hier einzig und allein von den üblichen schwankenden Fehlern der Analyse herrühre, ist insofern wenig wahrscheinlich, als die aus zwei Bestimmungen in verschiedenen Portionen der Lösung berechneten Mengen des Gesamtstickstoffs dieser Lösung nur um 1·3 mgr. von einander differierten.

Wenn es auch zu wünschen wäre, dass der Analysenfehler we-

niger als 3 mgr. betrüge, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass die Zahlen + 6·5 mgr. und + 7·5 mgr., welche ich in meinen Versuchen vom Jahre 1896 für den Gewinn des organischen Stickstoffs im Dunkeln gefunden habe, die Fehlergrenze der Analyse überschreiten und also auf die tatsächliche Verarbeitung des Nitratstickstoffs durch die Weizenkeimlinge hinweisen. Die Beweiskraft dieser Versuche ist um so grösser, als bei den Pflänzchen, welche in einer salpeterfreien Lösung vegetierten, ähnlich wie in der Kontrollanalyse, ein Manko von etwa 2 mgr. Stickstoff sich bei der Analyse ergeben hat.

Bemerkenswert ist bei der oben angegebenen Kontrollanalyse, dass die Menge des Stickstoffs der löslichen Proteinstoffe zu hoch, die des Asparagins zu niedrig ausgefallen ist. Da dieses Ergebnis sich auch bei anderen weiter mitzuteilenden Kontrollanalysen wiederholte, also nicht zufällig war, so kann das nur darin seinen Grund haben, dass bei der Stutzer'schen Methode der Eiweissbestimmung durch $Cu(OH)_2$ samt Eiweissstoffen etwas Asparagin mitgefällt wird.

Die Analysenmethode, welche ich bei meinen weiteren erst in der vorliegenden Arbeit mitzuteilenden Versuchen angewendet habe, möge durch folgende Kontrollanalyse erläutert werden.

Zur Analyse wurde folgendes Gemisch bereitet:

Weizenmehl	2·2648	gr
Asparagin	0·1811	„
schwefelsaures Ammoniak	0·1627	„
Salpeter	0·1253	„

Das Weizenmehl wurde aus dem Weizen, welcher zu den Versuchen des Jahres 1897 diente, bereitet. Er stammte aus der Ernte vom 1896 und enthielt 1·507% Stickstoff, und zwar:

Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	1·089%
„ „ löslichen Proteinstoffe	0·300%
„ „ nichtproteinartigen Verbindungen	0·118%.

Dieses Gemisch wurde mit 300 c. c. Wasser 8 Stunden lang unter öfterem Schütteln digeriert, die Lösung abfiltriert und portionsweise für Einzelnbestimmungen verwendet.

1. Bestimmung des Ammoniaks und der Salpetersäure. 50 c. c. wurden mit MgO bei stark vermindertem Drucke

bei einer 50°C nicht übersteigenden Temperatur destilliert und das entweichende Ammoniak in $^1/_{10}$ Normalschwefelsäure aufgenommen. In der Vorlage fand sich 0·00596 gr. Ammoniakstickstoff, also für die ganze Lösung 0·0356 gr.

Der von der Ammoniakbestimmung zurückgebliebene Rückstand wurde in derselben Druckflasche, aus welcher man Ammoniak unter vermindertem Drucke destilliert hat, mit KHO bei 120°C mehrere Stunden erhitzt und in üblicher Weise zur Bestimmung der Salpetersäure nach der Methode von Pfeiffer benutzt. Man erhielt 0·00287 gr. Salpeterstickstoff, also für die ganze Lösung 0·01722 gr.

2. Bestimmung des Gesamtstickstoffs der Lösung. 75 c. c. wurden leicht mit Weinsäure angesäuert, zur Trockene im Glycerinbade abgedampft und nach Förster verbrannt. Man erhielt 0·02366 gr. des Gesamtstickstoffs, also für die ganze Lösung 0·0946 gr.

3. Bestimmung des Stickstoffs der löslichen Eiweissstoffe und Wiederholung der Bestimmung des Gesamtstickstoffs der Lösung. 75 c. c. wurden in der Hitze unter Zusatz von Alaun mit $Cu(OH)_2$ versetzt, der Niederschlag nach dem Erkalten abfiltriert, gewaschen und mit Schwefelsäure verbrannt. Man erhielt 0·00238 gr. Eiweissstickstoff, also für die ganze Lösung 0·0095 gr.

Das Filtrat schwach mit Weinsäure angesäuert, zur Trockene abgedampft und nach Förster verbrannt, gab 0·0215 gr. Stickstoff, also für die ganze Lösung 0·0860 gr (Gesamt-Eiweissstickstoff). Der Gesamtstickstoff der Lösung berechnet sich demnach nach dieser Bestimmung auf $0·0095 + 0·0860 = 0·0955$ gr. Unterschied zwischen beiden Bestimmungen 0·9 mgr. Mittelzahl 0·0950 gr.

4. Bestimmung des Eiweissstickstoffs der Lösung und des Amid- und Aminosäurestickstoffs des Asparagins. 75 c. c. in der Hitze mit $Cu(OH)_2$ unter Zusatz von Alaun versetzt, noch heiss filtriert, gewaschen und mit Schwefelsäure verbrannt, ergaben 0·00224 gr, also für die ganze Lösung 0·0090 gr Eiweissstickstoff. Man versuchte hier das Heissfiltrieren in der Hoffnung, dass damit der Fällung des Asparagins vorgebeugt werden wird. Die Verminderung des Ergebnisses der Eiweissstickstoffbestimmung betrug aber nur 0·5 mgr für die ganze Lösung, so dass auch hier etwas Asparagin durch $Cu(OH)_2$ samt dem Eiweiss mitgefällt wurde.

Das Filtrat vom Kupferhydroxydniederschlage wurde mit verdünnter Schwefelsäure gekocht, annähernd mit Natronlauge neutralisiert und das durch Inversion des Asparagins abgespaltene Ammoniak samt dem fertigen mit MgO abdestilliert. Man erhielt in der Vorlage 0·01243 gr, also für die ganze Lösung 0·04973 gr Ammoniakstickstoff. Zieht man davon die unter 1. gefundene Menge des fertigen Ammoniaks ab, so erhält man 0·04973 — 0·0356 = 0·01413 gr Amidstickstoffs des Asparagins.

Der Rückstand von dem abdestillierten Ammoniak wurde in einer Kohlensäureatmosphäre mit salpetriger Säure nach Sachse-Böhmer behandelt und der ausgetriebene Stickstoff über kalihydrathaltiger Lösung von übermangansaurem Kalium gesammelt.

Das auf 0° und 76 cm Quecksilberdruck reduzierte Stickstoffvolumen betrug 7·12 c. c. = 0·0089 gr, also für die ganze Lösung 0·03576 gr. Die Hälfte davon, also 0·01788 repräsentiert den Aminosäurestickstoff der Lösung.

5. Die restierenden 25 c. c. der Lösung samt dem unlöslichen Rückstande des Weizenmehls wurden nach Ansäuern mit Weinsäure im Glycerinbade zur Trockene abgedampft und nach Förster verbrannt. Man erhielt 0·0339 gr Stickstoff. 25 c. c. Lösung enthielten laut den Bestimmungen unter 3. und 4., 0·0079 gr (Mittelzahl). Zieht man diese Zahl von der obigen ab, so erhält man 0·0339 — 0·0079 = 0·0260 gr als Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe des Weizenmehls.

Stellt man nun zur Vergleichung die aus der Zusammensetzung der Mischung berechneten und durch die Analyse gefundenen Zahlen zusammen, so bekommt man folgendes:

Siehe TABELLE II auf Seite 331.

Auch bei dieser Kontrollanalyse lässt die Asparaginbestimmung am meisten zu wünschen übrig und namentlich die Bestimmung des Amidstickstoffs desselben. Wir haben hier ein Manko von 2·7 mgr. hinter der richtigen Zahl zu notieren. Wollte man, wie das üblich ist, den ganzen Asparaginstickstoff durch Verdoppelung der für den Stickstoff des abspaltbaren Ammoniaks gefundenen Zahl berechnen, so würde das Minus 5·4 mgr. betragen. Der Grund dieser Ungenauigkeit ist in einer doppelten Fehlerquelle zu suchen: einerseits darin, dass auch bei der Destillation unter vermindertem Drucke sich doch ein kleiner Teil Asparagin zersetzen kann, wodurch zu

TABELLE II.

	Aus der Zusammensetzung der Mischung berechnet gr.	Durch die Analyse gefunden gr.	Differenz
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe des Mehls	0·0246	0·0260	+ 0·0014
Stickstoff der löslichen Proteinstoffe des Mehls	0·0068	0·0092	+ 0·0024
Stickstoff des Ammoniaks	0·0345	0·0356	+ 0·0011
„ „ Salpeters	0·0174	0·0172	— 0·0002
Amidstickstoff des Asparagins (durch Inversion abspaltbares Ammoniak)	0·0168	0·0141	— 0·0027
Aminosäurestickstoff des Asparagins (durch N_2O_3 nach Inversion abspaltbar)	0·0168	0·0179	+ 0·0011
Stickstoff der nichtproteinartigen Verbindungen des Weizenmehls (sonstiger Stickstoff)	0·0027	0·0010	— 0·0017
	0·1196	0·1210	+ 0·0014

viel Ammoniak gefunden und dann bei der Bestimmung des Amidstickstoffs in Abzug gebracht wird, anderseits in dem bereits erwähnten Umstande, dass ein Teil des Asparagins samt den löslichen Eiweissstoffen durch $Cu(OH)_2$ mitgefällt wird. In der vorliegenden Analyse decken die Fehler bei der Bestimmung des löslichen Eiweissstickstoffs und des Ammoniaks fast genau den Fehler der Amidstickstoffbestimmung. Nimmt man an, dass die + 2·4 mgr bei der Bestimmung des Eiweissstickstoffs aus der Fällung des Asparagins herrühren und dass die + 1·1 mgr bei der Bestimmung des Ammoniaks durch Inversion des Asparagins bei dem Abdestillieren mit MgO bedingt sind, so beträgt die Summe beider dieser Fehler in Bezug auf Amidstickstoff des Asparagins $\frac{2{\cdot}4}{2} + 1{\cdot}1 = 2{\cdot}3$ mgr, während der wirkliche Fehler bei der Bestimmung des Amidstickstoffs des Asparagins — 2·7 mgr betrug.

Dass die Bestimmung des Aminosäurestickstoffs kein Manko, sondern ein + 1·1 mgr ergeben hat, erklärt sich einerseits daraus, dass diese Bestimmung durch den Fehler der Ammoniakbestimmung nicht beeinflusst wird und andererseits, dass ein Teil des gefunde-

nen Aminosäurestickstoffs aus den nichtproteinartigen Verbindungen des Weizenmehls stammen konnte. Mit dieser letzten Voraussetzung stimmt der Umstand, dass man für den Stickstoff unbestimmter Form nur 1·0 mgr erhielt, während auf die Nichtproteinverbindung des Weizenmehls = 2·7 mgr Stickstoff entfallen, 1·7 mgr Stickstoff konnte also im Weizenmehl in der Form von Aminosäuren enthalten sein.

Der Gesamtstickstoff, welcher aus der Summierung einzelner Stickstofformen erhalten wurde, differiert nur um 1·4 mgr von dem berechneten, die Genauigkeit ist also in dieser Beziehung vollkommen befriedigend.

Nicht bei allen, aber bei vielen Versuchen wurde ausser den angegebenen Bestimmungen auch noch der Stickstoff der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen bestimmt. Die Fällung unternahm man entweder in einer besonderen Portion der Lösung und zog dann von dem im Niederschlage gefundenen Stickstoff den Ammoniakstickstoff und den durch die Stutzer'sche Fällung gefundenen Eiweissstickstoff ab oder in derselben Portion der Lösung, aus welcher durch $Cu(OH)_2$ Eiweissstickstoff bestimmt worden ist, nachdem vorher das Kupfer aus der Lösung mit H_2S entfernt worden war. In diesem letzten Falle zog man von dem im Niederschlage gefundenen Stickstoff nur noch den Ammoniakstickstoff ab. Den so gefundenen Stickstoff hat man in den Tabellen als Stickstoff der Peptone und der organischen Basen angegeben. In einigen Versuchen hat man den durch Phosphorwolframsäure hervorgebrachten Niederschlag nicht sofort nach Kjeldahl verbrannt, sondern ihn zunächst in Wasser suspendiert, mit MgO fast bis zur Trockene zum Zwecke der Ammoniakbestimmung abdestilliert und erst dann in demselben Kolben, aus welchem das Ammoniak abdestilliert wurde, nach Kjeldahl verbrannt. In einem Versuche wurde die Ammoniakbestimmung in der eben angegebenen Weise und durch Abdestillieren bei vermindertem Drucke vorgenommen. Mit beiden Methoden wurden recht übereinstimmende Resultate erzielt.

Im Filtrate von dem durch Phosphorwolframsäure gefällten Niederschlage hat man gewöhnlich auch Amidstickstoff und Aminosäurestickstoff nach Sachse und Sachse-Böhmer bestimmt. Wo dies geschehen ist, sind die gefundenen Zahlen in den Tabellen neben den aus der Bestimmung nach der Fällung mit $Cu(OH)_2$ gefundenen angegeben und zur Unterscheidung in [ ] eingeklammert. Selbstver-

ständlich wurde bei der Bestimmung des Amidstickstoffs im Filtrate von der Fällung mit Phosphorwolframsäure der Ammoniakstickstoff von den gefundenen Zahlen nicht mehr abgezogen, da ja das Ammoniak im Niederschlage und nicht im Filtrate geblieben ist.

Bei den Versuchen aus dem Jahre 1902 mit Gerste wurde für die Gesamtstickstoffbestimmung nicht die Förster'sche, sondern eine viel einfachere und sehr empfehlenswerte Methode angewandt. Diese Methode, welcher sich schon früher Rogóyski in meinem Laboratorium in seiner Arbeit über Denitrifikation [1]) bedient hat, beruht darauf, dass man in der salpeterhaltigen Flüssigkeit, in welcher die Gesamtstickstoffbestimmung auszuführen ist, zunächst Salpeter nach Ulsch in Ammoniak überführt, d. h. stark mit Schwefelsäure ansäuert und mit Ferrum hydrogenio reductum einige Zeit sieden lässt, dann das überschüssige Wasser abdampft und nach Hinzufügen hinreichender Menge konzertrierter Schwefelsäure und eines Tropfens Quecksilber in üblicher Weise verbrennt. Bei dem Abdestillieren des Ammoniaks aus der so verbrannten Flüssigkeit würden wegen der Anwesenheit von einigen Grammen Eisen recht viel Schwefelkalium für die Ausfällung des Quecksilbers erforderlich sein, deswegen habe ich es vorgezogen, diese Ausfällung mit pulverförmigem Zink vorzunehmen. Bei Erwärmung der Flüssigkeit mit Zinkpulver wird das Quecksilber in metallischem Zustand ausgefällt und das Zinkpulver amalgamiert.

Um mittels dieser Methode genaue Resultate zu erhalten, ist es notwendig eine Korrektur einzuführen.

Das Ferrum hydrogenio reductum des Handels (das meinige war von Merk bezogen) ist nicht stickstofffrei. Wendet man es ohne weiteres an, so erhält man immer etwas zu hohe Resultate. Deswegen habe ich einige blinde Bestimmungen mit 4 gr des Präparates unter Hinzufügen von 0·5 gr Traubenzucker ausgefürt, welche durchschnittlich eine 1·3 cc. einer $\frac{1}{10}$ Normalschwefelsäure entsprechenden Ammoniakmenge ergeben haben. Da nun zu meinen Einzelbestimmungen eben 4 gr Ferrum h. r. verwendet wurden, so wurden immer von der Menge der neutralisierten $\frac{1}{10}$ Normalschwefelsäure 1·3 cc. in Abzug gebracht.

[1]) Rogóyski „Zur Kenntnis der Denitrifikation und der Zersetzungserscheinungen der tierischen Excremente in der Ackererde. Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie 1899.

Zur Kontrolle dieser letztbesprochenen Methode wurde eine Mischung von Gerstemehl, schwefelsaurem Ammoniak, Asparagin und Salpeter hergestellt und analysiert. Das aus der Gerste, welche auch für die Versuche diente, hergestellte Gerstenmehl enthielt nach einer besonderen Analyse folgende Stickstoffmengen:

Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	1·577%
„ „ löslichen „	0·188%
„ „ Nichtproteinverbindungen	0·093%
Gesamtstickstoff	1·858%

Die zur Analyse verwendete Mischung hatte folgende Zusammensetzung:

TABELLE III.

		enthielt Stickstoff nach der Berechnung mgr	nach der Analyse mgr
Gerstenmehl 1·9456 gr darin			
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe		30·68	30·39
„ „ löslichen „		3·66	9·89
„ „ Nichtproteinverbindungen		1·81	3·94
Schwefelsaures Ammmoniak	0·2440 gr darin	51·79	51·79 [1])
Salpetersaures Kalium	0·3013 „ „	41·70	41·30
Asparagin	0·2606 „ „	48·70	42·18 [2])
		178·34	179·49

Wir sehen, dass auch hier wie bei der vorigen Kontrollanalyse die Bestimmung des Gesamtstickstoffs, des Salpeterstickstoffs und des Stickstoffs der unlöslichen Proteinstoffe vollkommen befriedigend ausgefallen sind, indessen lässt wieder die Genauigkeit der Asparaginbestimmung und die Bestimmung des Stickstoffs der löslichen Eiweissstickstoffe etwas zu wünschen übrig. Der Grund dieser Ungenauigkeit wurde schon oben angegeben. Wegen dieses Fehlers ist anzunehmen, dass bei allen meinen Analysen der Eiweissstickstoff etwas zu hoch, der Aminosäureamide-Stickstoff etwas

[1]) Die Ammoniakbestimmung misslang durch Zufall, in der Zusammensetzung der Analyse wurde also die berechnete Zahl aufgenommen.

[2]) Es wurde nur der durch Inversion abspaltbare Amidstickstoff bestimmt und daraus durch Verdoppelung der ganze Asparaginstickstoff berechnet. Der durch N_2O_3 austreibbare Aminosäurestickstoff wurde nicht bestimmt.

zu niedrig bestimmt wurde. Als sehr genau hat sich die Methode der Salpetersäurebestimmung nach Pfeiffer in diesen Kontrollanalysen erwiesen.

Zusammenstellung der Versuche.

I. Versuche mit Weizen.

Versuch 1.

Am 13 März hat man in 6 Schönjahn'schen Keimapparaten je 50 Weizensamen ausgesät. Die Apparate waren zunächst mit destilliertem Wasser gefüllt und erst, als die Wurzelchen eine Länge von etwa 2 ctm erreicht hatten, wurde das Wasser durch die Nährlösung ersetzt. Die Zusammensetzung der Lösung war dieselbe wie bei meinen früheren Versuchen, d. h. pro Liter 1 gr $Ca(NO_3)_2$ resp. in nitratfreier Lösung 1 gr $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, 0·25 gr KCl, 0·25 gr KH_2PO_4 und 0·25 $MgSO_4$. Drei Apparate erhielten ein nitrathaltige, drei andere eine nitratfreie Lösung. Die Vegetation dauerte bis zum 3 April, also volle 3 Wochen. Während der ganzen Zeit standen die Kulturen in einem dunkelen Schrank.

Die Gewichtsbestimmungen der Pflänzchen ergaben folgendes:

TABELLE IV.

	salpeterfreie Lösung			salpeterhaltige Lösung		
	I	II	III	IV	V	VI
Frischgewicht 1 Samens in mgr	46·40	46·67	46·27	45·87	45·92	46·14
Trockengewicht 1 Samens in mgr	40·63	40·87	40·52	40·17	40·21	40·46
Frischgewicht 1 Pflänzchens in mgr	263	271	262	323	326	335
Trockengewicht 1 Pflänzchens in mgr	27·84	27·32	26·76	26·66	27·67	27·52
Darm: Stengel und Blätter	17·40	17·21	17·43	17·96	19·50	19·76
Wurzeln	3·06	3·94	3·93	3·53	3·32	2·88
Samenüberreste	7·38	6·17	5·40	5.17	4·86	4·88
veratmet in mgr	12·79	13·55	13·76	13·51	12·54	12·94
veratmet in % der Trockensubstanz des Samens	31·5%	33·5%	34·0%	33·7%	31·2%	32·0%

Die Zahlen, welche die veratmete organische Substanz angeben, sind insofern zu niedrig, als sämtliche Pflänzchen in Nährstofflösun-

gen vegetierten, sie haben also eine gewisse Menge von Mineralstoffen aufgenommen, welche bei der Bestimmung der Trockensubstanz mitgewogen wurden und also die Menge derselben vergrösserten. Die Trockensubstanz der Pflänzchen, welche in salpeterhaltiger Lösung vegetierten, wurde ausserdem noch um das Gewicht der N_2O_5, welche die Pflänzchen enthielten, vergrössert.

Um einmal zu bestimmen, wie gross die Menge der wirklich von den Pflänzchen veratmeten organischen Substanz ist, und ob diese Menge durch die Anwesenheit des Salpeters beeinflusst wird, habe ich aus dem Gefässe V 5 Pflanzen und aus dem Gefässe I 6 Pflanzen getrocknet, gewogen, verascht und wieder gewogen. Es zeigte sich, dass eine Pflanze aus der salpeterhaltigen Lösung 4·7 mgr und eine Pflanze aus der salpeterfreien Lösung 3·47 mgr Asche enhielt. Die Menge N_2O_5 in den Pflänzchen aus salpeterhaltigen Lösung berechnet sich nach den unten zusammengestellten Analysen zu 1·12 mgr. Um also die wirkliche Menge der organischen Substanz eines Pflänzchens zu erhalten, muss man von der Trockensubstanz der Pflänzchen aus salpeterfreier Lösung 3·47 mgr, von der Trockensubstanz der Pflanzchen aus salpeterhaltiger Lösung $4·7 + 1·12 = 5·82$ mgr abziehen. Der Aschegehalt der Samen wurde nicht bestimmt, er kann aber ohne merklichen Fehler zu 2% angenommen werden (der Aschegehalt der Weizensamen schwankt nach zahlreichen Analysen nur zwischen 1·5—2·5%), was pro 1 Samen ungefähr 0·8 mgr ausmacht. Wenn man unter Berücksichtigung dieser Daten die von den Pflänzchen veratmete organische Substanz berechnet, so erhält man folgendes:

TABELLE V.

		Gewicht der organischen Substanz		veratmete Substanz pro Pflanze	
		1 Samen	1 Pflänzchen	in mgr	in % der ursprüglichen organischen Substanz
salpeterfreie Substanz	I	39·82	24·37	15·45	38·8%
	II	40·05	23·85	16·20	40·4%
	III	39·71	23·29	16·42	41·5%
salpeterhaltige Substanz	IV	39·37	20·85	18·52	47·0%
	V	39·40	21·85	17·55	44·5%
	VI	39·65	27·70	17·95	45·3%

Wir sehen, dass die Pflänzchen aus salpeterfreier Lösung 38·8 bis 41·5%, die Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung 44·5—47% der ursprünglichen organischen Substanz der Samen veratmet haben, dass somit die Anwesenheit der Nitrate in der Nährlösung eine nicht unbedeutende Verstärkung der Atmung nach sich zieht.

Bei der Bestimmung der verschiedenen Stickstoffformen wurden Pflänzchen aus zwei resp. drei Gefässen vereinigt und gemeinsam analysiert. Nur die Pflänzchen aus dem Gefässe IV wurden für sich gesondert analysiert.

Bei der Analyse wurde ganz in derselben Weise vorgeschritten, wie dies bei der Beschreibung der zur Kontrolle der Genauigkeit der analytischen Methode ausgeführten Analysen angegeben wurde. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Siehe TABELLE VI, Seite 338.

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffs der Samen = 100, so berechnet sich die Menge der einzelnen Stickstoffformen der Samen und der Pflänzchen wie folgt:

Siehe TABELLE VII, Seite 339.

Ausser den Bestimmungen, deren Resultate in den obigen Tabellen zusammengestellt sind, hat man noch eine Fällung mit Phosphorwolframsäure vorgenommen und in dem Niederschlage Stickstoff bestimmt. Eine besondere Portion von 50 cc. des Auszuges aus den Pflanzen aus der salpeterfreien Lösung (Gefäss I, II, III) mit Phosphorwolframsäure gefällt, ergab im Niederschlage 2·24 mgr Stickstoff, also für die ganze Lösung 11·2 mgr. Zieht man von dieser Zahl die Menge des Stickstoffs der löslichen Proteinstoffe und des fertigen Ammoniaks ab, so erhält man 11·2—7·46—2·10 = 1·64 mgr für den Stickstoff der Peptone und organichen Basen, also eine innerhalb der Fehlergrenze liegende Zahl.

Dasselbe Resultat zeigte sich bei der Analyse der Pflänzchen aus der salpeterhaltigen Nährlösung. In einer Portion des Auszuges wurden zunächst die Eiweissstoffe mit $Cu(OH)_2$ gefällt, das Kupfer im Filtrate mit H_2S entfernt und zu dem neuen Filtrate Phosphorwolframsäure zugefügt. Es entstand ein nur spärlicher Niederschlag, welcher nach Kjeldahl verbrannt unter Berechnung auf den ganzen Auszug nur 2·66 mgr Stickstoff ergab, also fast nur soviel als dem in der Substanz gefundenen Ammoniak entspricht.

TABELLE VI.

Sämtliche Pflanzen sind im Dunkeln kultiviert. — Der Stickstoff ist in mgr angegeben.

	salpeterfreie Lösung		salpeterhaltige Lösung			
	87 Pflänzchen aus den Gefässen I II III		30 Pflänzchen aus dem Gefässe IV		70 Pflänzchen aus den Gefässen V u. IV	
	Samen	Pflänzchen	Samen	Pflänzchen	Samen	Pflänzchen
Gesamtstickstoff	60·89	67·13	21·26	37·16	48·65	88·97
Salpeterstickstoff	0·00	0·00	0·00	8·40	0·00	20·30
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	44·00	31·08	15·74	13·50	35·20	31·15
Stickstoff der löslichen Proteinstoffe	12·12	7·46	3·97	3·30	9·67	7·00
Ammoniakstickstoff	—	2·10	—	1·12	—	2·45
Aus Amiden abspaltbarer Ammoniakstickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminstickstoff) . .	—	5·98 (11·96)[1]	—	2·91 (5·82)[1]	—	7·20 (14·40)[1]
Durch N_2O_3 aus Aminosäure abspaltbarer Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin + Glutam. Sticks. + N der Aminosäuren)	—	8·08 (2·10)[2]	—	5·52 (2·61)[2]	—	9·52 (2·32)[2]
Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen	—	12·43	—	2·41	—	11·35
Gesamtproteinstickstoff . . .	56·12	38·54	19·71	16·80	44·87	38·15
Gesamtnichtproteinstickstoff organischer Verbindungen . .	4·77	26·49	1·55	10·84	3·78	28·07
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen . . .	60·89	65·03	21·26	27·64	48·65	66·22
Gewinn an organischem Sticks.	—	+4·14	—	+6·38	—	+17·65

[1]) Die in () eingeklammerten Zahlen dieser Rubrik in dieser und allen anderen Tabellen sind durch Verdoppelung der nicht eingeklammerten gewonnen und geben also den ganzen Stickstoff der Aminosäureamide an.

[2]) Die in () eingeklammerten Zahlen dieser Rubrik in dieser und allen anderen Tabellen sind durch Abziehen der Zahlen der vorhergehenden Rubrik von den nicht eingeklammerten Zahlen dieser Rubrik gewonnen (z. B. 8·08—5·98=2·10) und geben also den Stickstoff der wirklichen Aminosäuren an.

TABELLE VII.

Sämtliche Pflanzen sind im Dunkeln kultiviert.

	Stickstoff der Samen	Stickstoff der Pflänzchen: aus salpeterfreier Lösung I II III	Stickstoff der Pflänzchen: aus salpeterhaltiger Lösung: Gefäss IV	Stickstoff der Pflänzchen: aus salpeterhaltiger Lösung: Gefäss V u. VI
Gesamtstickstoff	100	110·3	175·6	181·1
Salpeterstickstoff	0·0	0·0	39·5	41·1
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	72·3	51·0	63·5	64·1
Stickstoff der löslichen Proteinstoffe	19·9	12·2	16·0	14·4
Stickstoff des fertigen Ammoniaks	—	3·4	5·3	5·0
„ aus Amiden abspaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff)	—	9·8 (19·6)	13·6 (27·2)	13·8 (27·6)
Stickstoff aus Aminosäuren durch N_2O_3 abspaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff + Aminosäurestickstoff)	—	13·5 (3·7)	25·8 (12 2)	18 6 (4·8)
Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen	—	20·4	11·8	23·4
Gesamtproteinstickstoff	92·2	63·2	79·5	78·5
Gesamtnichtproteinstickstoff organischer Verbindungen . . .	7·8	43·7	51·2	55·8
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen	100	106·9	130·7	134·3
Gewinn an organischem Stickstoff	—	+ 6·9	+30·7	+34·3

Diese beiden Bestimmungen ergaben also, dass weder Peptone noch organische Basen in sicher bestimmbaren Mengen in den Pflänzchen vorhanden waren.

Versuch 2.

Am 9 Juli 1897 hat man in 6 Schönjahn'schen Keimapparaten je 50 Weizensamen ausgesät. Als die Wurzeln etwa 2 cm lang waren, wurde das Wasser durch vollständige Nährlösung ersetzt. Zwei Apparate wurden in einem dunklen Schrank, 4 am Ostfenster des Laboratoriums unter einer Glasglocke in kohlensäurefreier Luft gehalten. Die Vegetation dauerte vom 9 bis 29 Juli, an welchem

Tage die Ernte erfolgte. Die mangelhaft entwickelten Pflänzchen wurden wie immer von der Ernte ausgeschlossen.

Die Gewichtsbestimmungen auf 1 Pflanze in mgr berechnet sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

TABELLE VIII.

	Pflanzen im Dunkeln Mittelzahlen aus 50 Pflänz.	Pflanzen im Lichte I Mittelzahlen aus 68 Pflänz.	Pflanzen im Lichte II Mittelzahlen aus 78 Pflänz.
Gewicht 1 Samens . . . . . in mgr	53·16	53·16	53·16
Trockensubstanz 1 Samens . . „ „	46·54	46·54	46·54
Frischgewicht 1 Pflänzchens . „ „	378·4	403·0	451·0
Trockensubstanz 1 Pflänzchens „ „	31·42	30·85	32·97
„ der Stengel u. Blätter „ „	21·65	20·66	22·04
„ „ Wurzel . . . „ „	4·60	5·87	6·37
„ des Samenrestes . „ „	5·17	4·32	4·56
veratmet . . . . . „ „	15·12	15·69	14·17
„ in % der Trockensubstanz des Samens	32·5%	33·7%	30·5%

Diese Zahlen zeigen, dass auch bei den Lichtpflanzen die Assimilation vollständig ausgeschlossen war, da die Abnahme des Trockengewichtes infolge der Atmung bei den Lichtpflanzen eine eben so grosse war wie bei den Dunkelpflanzen.

Die Resultate der Analyse, bei welcher bei den Lichtpflanzen auch der Stickstoff der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen bestimmt wurde, sind in folgender Tabelle zusammengestellt. In dieser Tabelle gibt wie in den andern die Rubrik „Stickstoff der Peptone und organischen Basen“ den Stickstoff der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen unter Abzug des Stickstoffs der löslichen Proteinstoffe und des Ammoniaks an.

TABELLE IX.

	50 Dunkelpflanzen		68 Lichtpflanzen		78 Lichtpflanzen	
	Samen mgr Stickstoff	Pflanzen mgr Stickstoff	Samen mgr Stickstoff	Pflanzen mgr Stickstoff	Samen mgr Stickstoff	Pflanzen mgr Stickstoff
Gesamtstickstoff	40·06	75·89	54·48	109·90	62·24	136·44
Salpeterstickstoff	0·00	22·79	0·00	45·00	0·00	45·00
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	28·95	16·76	39·37	28·70	45·15	35·64
Stickstoff der löslichen Proteinstoffe	7·97	3·92	10·84	5·13	12·44	7·00
Stickstoff der Peptone und der organischen Basen . . .			.	3·87	—	5·25
Stickstoff des fertigen Ammoniaks		1·96	—	3·50	—	3·85
Aus Amiden bei Inversion abspaltbarer Ammoniakstickstoff		6·81		8·73	—	10·44
($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff)		13·62		17·46		20·88
Durch N_2O_3 aus Aminosäure abspaltbarer Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u Glutaminstickstoff		15·33	—	17·55	—	17·72
+ Aminosäurenstickstoff) .		6·52		8·82		7·28
Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen . . .	—	10·32	—	7·42		11·54
Gesamtproteinstickstoff . .	36·92	20·68	50·21	33·83	57·59	42·64
Gesamtnichtproteinstickstoff organischer Verbindungen . .	3·14	30·46	4·27	33·57	4·90	44·95
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen . . .	40·06	51·14	54·88	71·40	62·49	87·59
Gewinn an organischem Stickstoff		[illegible]		[illegible]		[illegible]

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffes der Samen = 100, so berechnen sich aus den Zahlen der vorigen Tabelle die Mengen der einzelnen Stickstoffformen der Samen und der Pflänzchen, wie folgt:

TABELLE X.

Stickstoffform	Samen	Dunkelpflanzen	Lichtpflanzen I	Lichtpflanzen II
Gesamtstickstoff	100	189·4	201·8	201·9
Salpeterstickstoff	—	56·9	64·3	72·2
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe . . .	72·3	41·8	52·7	58·0
„ „ löslichen „ . . .	19·9	9·8	9·4	11·4
„ „ Peptone u. organischen Basen .	—	—	7·1	8·5
„ des fertigen Ammoniaks	—	4·9	6·4	6·2
Aus Amiden abspaltbarer Ammoniakstickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminstickstoff) . . .	—	17·0 (34·0)	16·0 (32·0)	17·0 (34·0)
Durch N_2O_3 aus Aminosäuren abspaltbarer Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminst. + Stickstoff der Aminosäure	—	33·0 (16·0)	32·3 (16·3)	28·8 (11·8)
Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen	—	25·7[1])	13·7	18·8
Gesamtproteinstickstoff	92·2	51·6	62·1	69·4
Gesamtnichtproteinstickstoff organischer Verbindungen	7·8	75·7	69·1	73·1
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen	100·0	127·3	131·1	142·5
Gewinn an organischem Stickstoff	—	+27·6	+31·1	42·5

Versuch 3.

Am 21 April 1898 hat man in zwei Schönjahn'schen Keimapparaten je 50 Weizensamen von einem durchschnittlichen Gewichte von 45·4 und 46 mgr ausgesät und dieselben unter einer Glasglocke in kohlensäurefreier Luft in einem Glashaus des botanischen Gartens aufgestellt. Nährlosung vollständig. Der Versuch dauerte bis zum 4 Mai. Die Temperatur des Glashauses hielt sich während des Versuches meistens zwischen 27 und 29° C.

Die Gewichtsbestimmung der Pflänzchen ergab folgendes:

[1]) Samt dem Stickstoff der Peptone und organischen Basen, welche hier nicht bestimmt wurden.

TABELLE XI.

	I	II
	mgr	mgr
Frischgewicht 1 Samens . . .	45·54	46·00
Trockengewicht 1 Samens . . .	39·43	40·27
Frischgewicht 1 Pflänzchens . .	282·0	278·6
Trockengewicht 1 Pflänzchens .	31·64	27·84
„ der Stengel u. Blätter	16·76	18·37
„ „ Wurzeln . . .	3·18	3·30
„ „ Samenüberreste .	11·70	6·11
veratmet in mgr	7·79	12·43
„ in % der Trockensubstanz des Samens	19·7	30·8

Bei der Analyse wurde wegen der geringen Menge der Substanz nur der Salpetersäurestickstoff, der Stickstoff der löslichen und unlöslichen Verbindungen und der Gesamtnichtproteinstickstoff bestimmt.

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Siehe TABELLE XII auf Seite 344.

Versuch 4.

Am 18 Juni 1898 hat man 4 Portionen Weizensamen zu je 50 Samen im Schönjahn'schen Keimapparate ausgesät. Nachdem die Wurzel etwa 15 mm lang geworden war, ersetzte man das Wasser in drei Apparaten durch vollständige (salpeterhaltige), in dem vierten durch salpeterfreie Nährlösung. Alle vier Apparate wurden unter Glasglocken in kohlensäurefreier Luft in ein Glashaus des botanischen Gartens gestellt und daselbst bis zum 4 Juli stehen gelassen. Die Temperatur des Glashauses schwankte während des Versuches zwischen 15—31°C, Mitteltemperatur 23°C.

Die Gewichtsbestimmungen der Ernte ergaben folgendes:

TABELLE XII.

Pflanzen im Lichte in kohlensäurefreier Atmosphäre kultiviert.

	Stickstoff der geernteten Substanz in mgr				Stickstoff d. Samen = 100 gesetzt		
	I		II			Pflänzchen	
	28 Samen	28 Pflänzchen	30 Samen	30 Pflänzchen	Samen	I	II
Gesamtstickstoff	18·95	34·50	20·53	37·59	100	182·0	183·1
Salpeterstickstoff	0·00	7·84	0·00	8·68	0·0	41·4	42·3
Stickstoff der löslichen Proteinstoffe	3·77	3·64	4·08	4·34	19·9	19·2	21·1
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	13·69	14·56	14·84	13·16	72·3	76·8	64·1
Gesamtproteinstickstoff	17·46	18·20	18·92	17·50	92·2	96·0	85·2
Stickstoff der organischen nichtproteinverbindungen + Ammoniak	1·49	8·46	1·61	11·41	7·8	44·6	55·6
Gesamtstickstoff der organischen Verbindungen + Ammoniak	18·95	26·66	20·53	28·91	100	140·6	140·8
Stickstoff assimiliert		7·71		8·38		40·6	40·8

TABELLE XIII.

	salpeterfreie Lösung	salpeterhaltige Lösung	
	I Durchschnitt aus 23 Pflänzchen mgr	II u. III Durchschnitt aus 78 Pflänzchen mgr	IV Durchschnitt aus 41 Pflänzchen mgr
Frischgewicht 1 Samens	50·10	45·15	51·15
Trockengewicht 1 Samens . . .	43·85	39·52	44·77
Frischgewicht 1 Pflänzchens . .	263·0	352·5	384·4
Trockengewicht 1 Pflänzchens . .	30·85	28·64	32·08
„ der Stengel u. Blätter .	25·77	18·60	21·06
„ der Wurzeln		5·86	6·14
„ des Samenüberrestes .	5·08	4·18	4·88
veratmet in mgr	13·00	10·88	12·49
„ in % der Trockensubstanz des Samens	29·6%	27·53%	28·35%

Die bedeutende Abnahme der Trockensubstanz der Pflänzchen im Verhältnisse zu der der Samen beweist, dass es gelungen ist, die Assimilation auszuschliessen.

Bei der Analyse wurde diesmal die Bestimmung der Amide und Aminosäuren in dieser Portion des Auszuges vorgenommen, welche mit Phosphorwolframsäure gefällt wurde, dagegen wurde diejenige Portion, aus welcher mit $Cu(OH)_2$ die löslichen Eiweissstoffe gefällt wurden, nach dem Abfiltrieren des Niederschlages im Glycerinbade nach Ansäuern mit Weinsäure abgedampft und nach Förster verbrannt und es diente dieselbe auf diese Weise zur Kontrolle der Gesamtstickstoffbestimmung, welche auch wie gewöhnlich in einer besonderen Portion der Lösung vorgenommen wurde. Von den sehr wenig von einander differierenden Zahlen wurde dann der Durchschnitt genommen.

Siehe TABELLE XIV, Seite 346.

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffs der Samen = 100, so berechnen sich die Mengen der einzelnen Stickstoffformen der Samen und der Pflänzchen, wie folgt:

Siehe TABELLE XV, Seite 347.

Versuche mit Gerste.

Versuch 5.

Am 16 November wurden je 50 Gerstesamen in 8 Schönjahn'schen Keimapparaten ausgesät und im Dunkeln gehalten. Am 23 November wurde das Wasser in den Apparaten durch Nährlösungen ersetzt. Die Hälfte der Apparate, nämlich die Apparate I, Ia, II und IIa haben eine stickstofffreie, die andere Hälfte, d. h. die Apparate III, IIIa, IV und IVa eine salpeterhaltige Nährlösung erhalten. Am 29 November wurden die Nährlösungen durch frische von gleicher Zusammensetzung ersetzt, wobei aber zu den Lösungen in den Apparaten II und IIa (stickstofffreie Lösungen) und in den Apparaten IV, IVa (salpeterhaltige) 2% Rohrzucker und 1% Traubenzucker hinzugefügt wurden. Man wollte nämlich durch diesen Zusatz den in der letzten Zeit viel besprochenen Einfluss des Zuckers auf die Proteinbildung und Proteinregeneration prüfen. In dieser zuckerhaltigen Flüssigkeit blieben die Pflänzchen in den Apparaten mit stickstofffreier Lösung, II und IIa, bis zum 2 Dezember, in der

TABELLE XIV.

Pflanzen im Lichte in kohlensäurefreier Atmosphäre kultiviert.

	salpeterfreie Lösung					
	33 Samen mgr Stickstoff	33 Pflänz mgr Stickstoff	75 Samen mgr Stickstoff	75 Pflänz. mgr Stickstoff	41 Samen mgr Stickstoff	41 Pflänz. mgr Stickstoff
Gesamtstickstoff	24·64	26·50	50·49	119·49	31·23	71·99
Salpeterstickstoff	0·00	0·00	0·00	37·10	0·00	22·28
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	17·81	16·42	36·48	45·99	22·57	31·81
Stickstoff der löslichen Proteinstoffe	4·90	2·80	10·05	7·00	6·21	5·60
Stickstoff der Peptone u. organischen Basen	—	—	—	0·74	—	0·28
Stickstoff des Ammoniaks . .	—	—	—	3·70	—	0·84
Aus Amiden abspaltbarer Ammoniakstickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminstickstoff) . .	—	—	—	5·50 (11·0)	—	3·36 (6·72)
Aus Aminosäuren durch N_2O_3 ausgetriebener Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutamin + Amidosäurestickstoff)	—	—	—	10·16 (4·55)	—	7·54
Stickstoff sonstiger unbestimmten organischen Verbindungen .	—	—	—	9·50	—	
Gesamtproteinstickstoff . . .	22·71	19·22	46·53	52·99	28·78	37·41
Gesamtnichtproteinstickstoff der organischen Verbindungen .	1·93	7·28	3·93	25·90	2·45	11·18
Gesamtstickstoff der organischen Verbindungen	24·64	26·50	50·49	78·89	31·23	48·59
Gewinn an organischem Stickstoff	—	+ 1·86	—	+ 28·40	—	+ 17·36

stickstoffhaltigen, IV und IVa, nur bis zum 30 November Abends, wonach die Lösungen wieder durch rein mineralische ersetzt wurden. In der salpeter- und zuckerhaltigen Lösung wurden die Pflänzchen deswegen kürzer gehalten, weil schon am zweiten Tage eine leichte Trübung der Flüssigkeit infolge von Bakterienbildung zu beobachten war. Die Ernte der Pflänzchen wurde am 7 Dezember vorgenommen.

Zur Zeit als ich diesen Versuch ausführte, untersuchte in meinem Laboratorium mein damaliger Assistent Dr. Kosiński an

TABELLE XV.

Pflanzen im Lichte in kohlensäurefreier Atmosphäre kultiviert.

Form des Stickstoffs	Samen	Pflänzchen		
		stickstofffreie Lösung	stickstoffhaltige Lösung	
			I	II
Gesamtstickstoff	100	107 5	236·7	235·0
Salpeterstickstoff	0.00	0·00	73·5	71·3
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	72 30	66·6	91·1	101·8
Stickstoff der löslichen Proteinstoffe	19 90	11·40	13 9	17·9
Stickstoff der Peptone u. organischen Basen	—	—	1·5	0·9
Stickstoff des Ammoniaks . . .	—	—	6·9	2·7
Aus Amiden abspaltbarer Ammoniakstickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff	—	—	10·9 (21·8)	10·8 (21·5)
Aus Aminosäuren durch N_2O_3 ausgetriebener Stickstoff ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff + Stickstoff der Aminosäuren)	—	—	20·1 (9·2)	24·1 (13·3)
Stickstoff sonstiger unbestimmter Verbindungen	—	—	18 8	
Gesamtproteinstickstoff	92·2	78 00	105·0	119·7
Stickstoff der gesamten organischen Nichtproteinverbindungen	7·8	29·54	51 3	35·8
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen	100	107·5	156·3	155·5
Gewinn an organischem Stickstoff		+ 7·5%	+ 56·3%	+ 55·5%

verschiedenen Keimpflanzen den Einfluss der Stickstoffnährung auf die entsprechende Entwickelung der Wurzeln einerseits und der Sprosse anderseits. In dieser noch nicht publizierten Arbeit, welche Dr. Kosiński in dem botanischen Institute in Jena angefangen und in meinem Laboratorium weitergeführt und zum Abschluss gebracht hat, fand er, dass die Stickstoffnährung das Längenwachstum der Wurzeln herabsetzt und dasjenige der Stengel begünstigt. Um nun mein Versuchsmaterial gelegentlich zur Prüfung dieses Resultates Kosińskis zu verwerten, habe ich an je 10 Pflänzchen

aus jedem Apparate die Länge der Wurzel und der Sprosse (diese letzte von der Basis bis zur Spitze des längsten Blattes) genommen. Die Durchschnittszahlen aus dieser Messung waren folgende:

		Wurzellänge mm	Sprosslänge mm
I	Lösung ohne Stickstoff und ohne Zucker	132	320
Ia	„ „ „ „ „ „	132	330
II	„ „ „ „ mit Zucker	175	326
IIa	„ „ „ „ „ „	152	302
III	„ mit Stickstoff und ohne Zucker	84	366
IIIa	„ „ „ „ „ „	90	376
IV	„ „ „ „ mit Zucker	93·2	354
VIa	„ „ „ „ „ „	108	369

Diese Zahlen bestätigen vollkommen die Beobachtungen Kosińskis und zeigen ausserdem, dass der Zusatz von Zucker das Längenwachstum der Wurzeln begünstigte. Dass diese Begünstigung in stickstofffreier Lösung deutlicher hervortrat als bei salpeterhaltiger, erklärt sich schon dadurch, dass die ersten 3 Tage, die zweiten nur 1 Tag in Zuckerlösung verweilten.

Die Frisch- und Trockensubstanzbestimmungen der Pflänzchen ergaben (durchschnittlich für 1 Pflanze) folgendes:

Siehe TABELLE XVI, Seite 349.

Diese Zahlen bestätigen die Resultate der Messungen, indem sie auch zeigen, dass bei Stickstoffmangel das Wurzelwachstum im Verhältnisse zum Sprosswachstum bevorzugt wurde.

In der Tat berechnet man die Trockensubstanz der Wurzeln in % der Trockensubstanz der Wurzeln und Sprosse zusammen, so erhält man:

für	Wurzeln	aus	I	ohne	N	ohne	Zucker	22·4%
„	„	„	Ia	„	„	„	„	22·9%
„	„	„	II	„	„	mit	„	28·3
„	„	„	IIa	„	„	„	„	28·7
„	„	„	III	mit	N	ohne	Zucker	18·1%
„	„	„	IIIa	„	„	„	„	17·8%
„	„	„	IV	„	„	mit	„	18·5%
„	„	„	IV	„	„	„	„	18·3%

TABELLE XVI.

		Lösung ohne Stickstoff				Lösung mit Stickstoff			
		ohne Zucker		mit Zucker		ohne Zucker		mit Zucker	
		I	Ia	II	IIa	III	IIIa	IV	IVa
Frischgewicht	1 Samen . . . . mgr	49·36	54·16	49·67	53·37	49·29	53·23	49·67	53·30
	1 ganze Pflanze . „	407	415	405	466	440	495	455	415
	1 Stengel u. Blätter „	261	265	215	263	301	320	302	315
	1 Wurzel . . . . „	77	89	128	139	79	95	91	100
	1 Samenüberreste . „	69	61	62	64	60	66	62	65
Trockengewicht	1 Samen . . . . mgr	43·42	47·65	43·69	46·95	43·36	46·83	43·69	46·89
	1 ganze Pflanze . „	30·48	32·67	34·43	37·33	30·83	34·49	33·54	36·24
	1 Stengel u. Blätter „	18·40	19·78	19·09	21·02	20·48	22·57	21·29	22·48
	1 Wurzel . . . . „	5·30	5·86	7·55	8·47	4·27	4·90	4·83	5·03
	1 Samenüberreste . „	6·78	7·03	7·79	7·84	6·08	7·02	7·42	8·73
Verlust an Trockensubstanz durch Atmung . . . mgr		12·94	14·98	9·26	9·62	12·53	12·34	10·15	10·65
Verlust an Trockensubstanz durch Atmung in % der Samentrockensubstanz mgr		27·9	31·4	21·2	20·5	28·9	26·4	23·2	22·7

Auch aus diesen Zahlen sehen wir, dass die Wurzelbildung im Verhältnisse zur Sprossbildung besonders dann bevorzugt war, wenn der stickstofffreien Nährlösung Zucker zugesetzt wurde, wahrscheinlich deshalb, weil bei reichlicher Ernährung mit stickstofffreier Substanz der Stickstoffhunger sich noch mehr gesteigert hat. Es macht den Eindruck, als ob die nach Stickstoff hungernde Pflanze durch Verwendung möglichst grosser Mengen der disponiblen Stoffe zur Wurzelbildung eine bessere Ausnutzung der spärlichen Stickstoffquellen im Boden anstrebe. Dass der hinzugefügte Zucker von den Pflanzen aufgenommen wurde, folgt daraus, dass der Verlust

an Trockensubstanz bei den Pflanzen, denen Zucker dargeboten wurde, deutlich kleiner war als bei denjenigen, welche die ganze Zeit in rein mineraler Lösung verweilten.

Die Analyse der geernteten Pflanzen auf verschiedene Stickstoffformen ergab folgende Resultate:

Siehe TABELLE XVII, Seite 351.

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffs in den Samen = 100, so berechnen sich die Mengen der einzelnen Stickstoffformen in den Samen und in den Pflanzen, wie folgt:

Siehe TABELLE XVIII, Seite 352.

Versuch 6.

Am 10. Mai 1902 hat man in 6 Schönjahn'schen Keimapparaten je 50 Gerstensamen ausgesät. Nachdem die Plumulae etwa 1 m hoch waren, wurde das Wasser in den Apparaten durch Nährlösungen ersetzt. In den Apparaten I u. Ia wurde eine salpeterhaltige, in II, IIa, III und IIIa eine salpeterfreie Nährlösung gegeben. Alle Apparate wurden ins Licht ins Vegetationshaus des Laboratoriums gestellt, und zwar I, Ia, II und IIa unter Glasglocken in kohlensäurefreier Luft, III und IIIa in freier Luft. Um einer zu grossen Luftfeuchtigkeit unter den Glocken vorzubeugen, wurden in denselben Abdampfschalen mit trockenem $CaCl_2$ aufgehängt. Als gegen das Ende des Versuches das Chlorcalcium sich in dem absorbierten Wässer verflüssigt hatte und die Glockenwandungen stark durch den Tau beschlagen waren, wurde $CaCl_2$ durch frische trockene Substanz ersetzt. Da nun aber der Übergang von feuchter zu trockener Luft zu scharf war und die Pflänzchen, namentlich die aus salpeterhaltiger Lösung teilweise welk wurden, wurden die Pflänzchen am 31. Mai geerntet. Die Frisch- und Trockensubstanzbestimmungen ergaben folgendes:

Siehe TABELLE XIX, Seite 353

Die Bevorzugung der Wurzelbildung gegenüber der Sprossbildung durch Stickstoffmangel im Sinne Kosińskis wird auch durch diese Zahlen bestätigt, indem z. B. das frische Durchschnittsgewicht einer Wurzel aus salpeterfreier Lösung 114 mgr, das einer Wurzel aus salpeterhaltiger Lösung nur 101 mgr betrug. Ganz besonders prägnant tritt aber diese Bevorzugung der Wurzelbildung bei den

	I u. Ia 91 Pflanzen Lösung ohne N ohne Zucker		II u. IIa 97 Pflanzen Lösung ohne Salpeter mit Zucker		III u. IIIa 95 Pflanzen Lösung mit Salpeter ohne Zucker		IV u. IVa Lösung mit Salpeter u. mit Zucker	
	Samen	Pflanzen	Samen	Pflanzen	Samen	Pflanzen	Samen	Pflanzen
Gesamtstickstoff	81·94	80·46	87·68	84·56	84·78	149·07	80·20	138·9
Salpeterstickstoff	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	50·41	0·00	43·75
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	69·55	32·0	74·42	36·26	71·96	38·54	68·07	40·25
„ „ löslichen „	8·29	5·7	8·87	4·55	8·58	5·95	8·11	12·95
„ „ Peptone u. organischen Basen	—	—	—	—	—	—	—	1·51
„ des Ammoniaks	—		—		—		—	4·20
„ des aus Amiden abspaltbaren Ammoniaks ($\frac{1}{2}$ Asparagin und Glutaminstickstoff)	—	16·0	—	16·55	—	16·80		10·50 [11·33] (21·00) [(22·66)]
Stickstoff durch N_2O_3 aus Amidosäuren abspaltbar ($\frac{1}{2}$ Asparagin u. Glutaminstickstoff + Amidosäurestickstoff)		22·7		17·41		20·27	—	15·25 [17·27] (4·75) [(5·94)]
Stickstoff sonstiger unbestimmten Verbindungen	—	3·55	—	10·79	—	17·10	—	10·54 [7·69]
Gesamtproteinstickstoff	77·84	57·70	83·29	39·81	80·54	44·59	76·18	53·20
Gesamtnichtproteinstickstoff der organ. Verb. samt Ammoniak	4·1	42·25	4·39	44·75	4·24	54·17	4·02	42·00
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen u. des Ammoniaks	81·94	79·95	87·68	84·56	84·78	98·66	80·20	95·20
Gewinn an organischem- u. Ammoniak-Stickstoff		—1·99		—3·12		+ 13·88		+ 15·00

TABELLE XVIII.

	Stickstoff in den Samen	Stickstoff in den Pflanzen			
		I u. Ia Lösung ohne N u. ohne Zucker	II u. IIa Lösung ohne N mit Zucker	III u. IIIa Lösung mit N ohne Zucker	IV und IV Lösung mit N u. mit Zucker
Gesamtstickstoff	100	97·5	96·5	175·5	173·2
Salpeterstickstoff	0·0	0·0	0·0	59·4	54·5
Stickstoff der unlöslichen Proteinstickstoffe	84·9	39·0	40·2	45·5	50·2
„ „ löslichen Proteinstoffe	10·1	7·0	5·2	7·0	16·1
„ „ Peptone u. der organischen Basen	—	—	—	—	1·9
„ des Ammoniaks	—	19·4	18·9	19·8	5·2
„ „ aus Amiden abspaltbaren Ammoniaks (¦ Asparagin und Glutaminstickstoff)	—				13·1 [14·1] [1]) (26·2) [(28·2)]
Stickstoff durch N_2O_3 aus Amidensäure abspaltbar (¦ Asparagin und Glutaminstickstoff + Aminosäurenstickstoff [1])	—	27·7	19·9	23·9	19·0 [21·5] (5·9) [(7·4)]
Stickstoff sonstiger unbestimmter Verbindungen	—	4·3	12·3	20·2	13·1 [9·7]
Gesamtproteinstickstoff	95·0	46·0	45·4	52·5	66·3
Gesamtnichtproteinstickstoff der organischen Verbindungen	5·0	51·5	51·5	63·9	52·4
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen und des Ammoniaks	100	97·5	96·5	116·4	118·7
Gewinn an organischem u. Ammoniakstickstoff		— 2·5%	— 3·5%	+ 16·4	+ 18·7

[1]) Die in [] eingeklammerten Zahlen stammen aus der Bestimmung nach Phosphorwolframsäurefällung.

TABELLE XIX.

Gewicht pro 1 Pflanze in mgr.

	salpeterhaltige Lösung		salpeterfreie Lösung			
	kohlensäurefreie Luft Glasglocke		kohlensäurefreie Luft Glasglocke		freie Luft mit CO_2	
	I	Ia	II	IIa	III	IIIa
Frischgewicht der Samens . .	46·6	49·5	46·7	49·5	46·6	46·7
„ der Pflanze . . .	360·4	369·2	353·3	358·3	498·0	525·1
„ „ Stengel u. Blätter	220·4	226·2	196·3	193·0	249·5	256·7
„ „ Wurzel . . .	90·1	102·0	113·7	114·1	202·3	235·1
„ des Samenrestes .	40·9	41·0	43·3	51·2	46·2	43·3
Trockengewicht des Samens .	41·00	43·5	41·1	43·5	41·0	41·1
„ der ganzen Pflanze	32·00	34·88	32·50	33·78	53·51	55·09
„ „ Stengel u. Blätter	19·55	20·97	18·46	19·43	29·00	30·12
„ „ Wurzel . . .	6·06	7·42	6·60	6·27	15·74	16·72
„ „ Samenreste . .	6·39	6·49	7·44	8·08	8·77	8·20
Verlust resp. Gewinn an Trockensubstanzen mgr	- 9·00	- 8·72	- 8·60	- 9·72	+ 12·51	+ 13·99
Verlust resp. Gewin an Trockensubstanzen in %	- 22%	-20·2%	-20·9%	-22·6%	+ 30·5%	+ 34·0%

Pflanzen ein, welche in freier Luft, also bei stattfindender Assimilation in stickstofffreier Lösung vegetierten. Die Zahlen zeigen nämlich, dass die unter diesen Bedingungen durch Assimilation neugebildete Substanz weit mehr zur Wurzelbildung als zur Sprossbildung verwendet wurde.

Die Trockensubstanz der assimilierender Pflänzchen war um 64% grösser als die der Pflänzchen aus kohlensäurefreier Luft. Dieser Unterschied verteilte sich aber nicht gleichmässig zwischen die Sprossen und die Wurzeln: derselbe betrug nur 50% bei den ersten und 152% bei den letzten. Man bekommt also wieder den Eindruck, als ob die an Stickstoff hungernde Pflanze durch Bevorzugung der Wurzelbildung zu einer besseren Ausnützung der vorhandenen und zur Aufsuchung neuer Stickstoffquellen strebe.

Die Analyse der Pflänzchen auf verschiedene Stickstoffformen ergab folgendes:

TABELLE XX
nger Stickstoff

	salpeterhaltige Lösung		salpeterfreie Lösung			
	kohlensäurefreie Luft		kohlensäurefreie Luft		freie kohlensäurehaltige Luft	
	94 Samen 1·5252 gr.	94 Pflanzen 3·2573 gr.	Samen 4·1768 gr.	Pflanzen 2·8804 gr.	Samen 4·478 gr.	Pflanzen 5·216 gr.
Gesamtstickstoff	84·08	160·29	77·60	74·58	83·20	89·20
Salpeterstickstoff	—	54·60	—	6·00	—	—
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	71·36	55·29	65·86	47·83	70·61	61·31
„ „ löslichen Proteinstoffe	8·51	7·00	7·85	5·74	8·12	4·77
„ „ Peptone u. organischen Basen	—	4·77	—	0·00	—	4·56
„ des Ammoniaks	—	2·83	—	2·59	—	1·26
„ „ aus Amiden abspaltbar. Ammoniaks ($^1/_2$ Asparagin u. Glutaminstickstoff)	—	13·76 [12·25] (27·52) [24·50]	—	5·46 [6·57] (10·92) [(13·14)]	—	3·58 [3·88] (7·16) [(7·76)]
„ aus Amidosäuren durch N_2O_3 abspaltbar ($^1/_2$ Asparagin u. Glutaminstick. + Amidosäurestickstoff)	—	21·44 [19·12] (7·68) [(5·87)]	—	11·45 [9·40] (5·99) [(2·83)]	—	[7·50] [(3·62)]
Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen	—	[4·43]	—	1·51 [2·45]	—	[5·92]
Gesamtproteinstickstoff	79·87	62·29	73·71	53·57	79·03	66·08
Gesamtnichtproteinstickstoff organisch. Verbind.	4·21	43·40	3·89	21·01	4·17	23·12
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen und des Ammoniaks	84·08	105·69	77·60	74·58	—	89·20
Gewinn an Stickstoff der organischen Verbindungen und des Ammoniaks	—	+ 21·61	—	— 3·02	—	+ 6·00

Setzt man die Menge des Gesamtstickstoffs der Samen = 100, so berechnen sich die Mengen der einzelnen Stickstofftormen in den Samen und in den Pflanzen, wie folgt:

Siehe TABELLE XXI, Seite 356

Versuch 7.

138 Gerstepflänzchen in stickstofffreier Nährlösung im Dunkeln gezogen, wurden getrocknet und auf verschiedene Stickstoffformen untersucht. Die Trockensubstanz der Pflänzchen wog 4·094 gr, und da die Samen 6·673 gr wogen und 5·871 gr Trockensubstanz enthielten, so betrug die Trockensubstanzabnahme 1·777 gr oder 30·3%. Die Analyse ergab folgendes:

TABELLE XXII.

	Stickstoff in mgr		Stickstoff der Samen = 100 gesetzt	
	Samen	Pflanzen	Samen	Pflanzen
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	105·6	43·5	84·9	35·0
„ der löslichen Proteinstoffe	12·5	5·8	10·1	4·7
„ der Peptone und organischen Basen	—	7·9	—	6·3
„ des fertigen Ammoniaks	—	4·4	—	3·5
„ des aus Amiden abspaltbaren Ammoniaks (1/2 Asparagin u. Glutaminstickstoffs)	—	16·8 [17·7] (33·6) [(35·4)]	—	13·5 [14·2] (27·0) [(28·4)]
Stickstoff durch N_2O_3 aus Amidosäuren abspaltbar (1/2 Asparagin u. Glutaminstickstoff + Amidosäurenstickstoff)	—	24·7 [21·6] (7·9) [(3·9)]	—	19·9 [17·4] (6·4) [(3·2)]
Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen	—	15·3 [17·5]	—	12·0 [14·1]
Gesamtproteinstickstoff	118·1	49·3	95·0	39·7
Gesamtnichtproteinstickstoff	6·2	69·1	5·0	55·5
Gesamtstickstoff	124·3	118·4	100	95·2
Stickstoffverlust	—	—5·9		—4·8

TABELLE XXI.

	Stickstoff der Samen	Stickstoff der Pflanzen		
		salpeterhaltige Nährlösung kolensäurefreie Luft	salpeterfreie kohlensäurefreie Luft	Nährlösung freie kohlensäure-haltige Luft
Gesamtstickstoff	1·00	190·6	96·1	107·2
Salpeterstickstoff	0·00	64·9	0·00	0·00
Stickstoff der unlöslichen Proteinstoffe	84·9	65·7	61·6	73·7
„ „ löslichen Proteinstoffe	10·1	8·3	7·4	5·7
„ der Peptone und organischen Basen	—	5·7	0·0	5·5
„ des Ammoniaks	—	3·4	3·3	1·5
„ des aus Amiden abspaltbaren Ammoniaks ($^1/_2$ Asparagin und Glutaminstickstoff)	—	16·4 [14·6] (32·8) [(29·0)]	7·0 [8·5] (14·0) [17·0]	4·2 [4·7] (8·4) [(9·4)]
„ durch N_2O_3 aus Amidosäuren abspaltbar ($^1/_2$ Asparagin u. Glutaminstickstoff + Stickstoff der Amidosäuren)	—	25·5 [22·7] (9·1) [(8·1)]	14·7 [12·1] (7·7) [(3·6)]	[9·0] [(4·3)]
Stickstoff sonstiger organischen Verbindungen	—	[5·3]	1·9 [3·2]	[7·1]
Gesamtproteinstickstoff	95·0	74·0	69·0	79·4
Gesamtnichtproteinstickstoff der organichen Verbindungen und des Ammoniaks	5·0	51·7	27·1	27·8
Gesamtstickstoff aller organischen Verbindungen und des Ammoniaks	100	125·7	96·1	107·2
Gewinn an organischem und Ammoniakstickstoff	—	+ 25·7	— 3·7	+ 7·2

Schlussfolgerungen.

Überblicken wir die oben zusammengestellten Versuchsergebnisse und Analysenresultate, so können wir zunächst mit voller Sicherheit konstatieren, dass auch die höheren Pflanzen befähigt sind im Dunkeln auf Kosten der salpetersauren Salze und ihrer stickstofffreien Reservestoffe organische Stickstoffverbindungen zu bilden. Diesen Schluss habe ich schon in meiner Mitteilung im Jahre 1897 aus meinen damaligen Versuchen gezogen, er bedarf aber, wie bereits hervorgehoben wurde, einer Bestätigung aus zwei Gründen: 1) weil Prianischnikow gegen die Beweiskraft meiner Analysen wegen zu kleiner Mengen Substanz, welche ich für Einzelbestimmungen verwendet habe, Einwände erhoben hat; 2) weil damals Ammoniak in den geernteten Pflanzen nicht besonders bestimmt, sondern sein Stickstoff zu den organischen Verbindungen mit eingerechnet wurde.

Nun hat sich bei meinen neuen Versuchen gezeigt, dass die Ammoniakmenge in den Keimpflanzen sowohl des Weizens wie der Gerste, mögen dieselben im Dunkeln oder im Lichte, in salpeterhaltiger oder salpeterfreier Lösung kultiviert werden, immer eine sehr geringe war. Sie schwankte meistens zwischen 3% und 5% des ursprünglichen Stickstoffgehaltes der Samen und erreichte in dem extremsten Falle 6·4% dieser Grösse, während der Gewinn an organischem Stickstoff im Dunkeln in einigen Fällen 38% des ursprünglichen Stickstoffgehaltes der Samen übertraf.

Auch der von Prianischnikow gegen die Stichhaltigkeit meiner früheren Versuche erhobene Einwand kann sich auf meine neuen Versuche nicht beziehen, da die für den Gewinn an organischem Stickstoff im Dunkeln in diesen Versuchen gefundenen Zahlen weit über die Grenze der möglichen Fehler hinauslaufen. So finden wir z. B., dass 70 Weizenkeimlinge im Versuche I 17·6 mgr, 50 Weizenkeimlinge im Versuche II 11·0 mgr und 84 Gerstekeimlinge im Versuche V 15 mgr Salpeterstickstoff in organische Verbindungen im Dunkeln übergeführt haben, während der höchste Fehler, welchen wir bei der Bestimmung des organischen Gesamtstickstoffs in unseren Kontrollanalysen begangen haben, nur 3 mrg betrug.

Eine Garantie dafür, das die beobachtete Zunahme des organischen Stickstoffs im Dunkeln nicht auf Analysenfehlern beruhe, bieten auch die Analysen der Pflänzchen, welche in den Lösungen

ohne Salpeter kultiviert wurden. Es wurden im allgemeinen 7 solcher Analysen ausgeführt. Die Differenzen zwischen der gefundenen Menge des organischen Stickstoffs in den Pflänzchen und in den Samen, aus welchen sie gezogen wurden, waren in diesen 7 Fällen folgende: + 4·14 mgr + 1·46 mgr — 1·99 mgr — 3·12 mgr — 3·02 mgr + 6·00 mgr — 5·9. Auch der exstremste Fall der Differenz von + 6 mgr betrug nur die Hälfte des Minimums dessen, was man bei den Pflanzen aus salpeterhaltiger Lösung gefunden hat. Jedenfalls scheint mir diese Differenz von 6·0 mgr und sogar die von 4·0 mgr zu gross zu sein, um von den analytischen Fehlern herzurühren, ich vermute eher, dass die Pflänzchen eine nicht vorausgesehene Stickstoffquelle gefunden und etwas Stickstoff wirklich assimiliert haben. Eine solche Stickstoffquelle konnte schon dadurch geboten werden, dass es vorgekommen ist, dass einzelne Samen schlecht oder gar nicht gekeimt, sondern sich zersetzt haben. Ihre stickstoffhaltigen Zersetzungsprodukte konnten dann selbstverständlich leicht von den an Stickstoff hungernden Pflänzchen aufgenommen worden und die bei der Analyse gefundene Stickstoffzunahme der Pflänzchen im Verhältnisse zu den Samen bedingen. Ich habe mich zwar bemüht, durch Sterilisation des Samens in Sublimat der Zersetzung der nicht keimenden Samen entgegen zu wirken, habe aber mehrmals konstatiert, dass diese Zersetzung doch stattfand, was bei der bekannten Schwierigkeit, solche Kulturen dauernd steril zu erhalten, nicht befremden kann.

Die Stickstoffassimilation im Dunkeln äusserte sich nicht nur in den Analysenresultaten, sondern auch in einer viel stärkeren Entwickelung der Pflänzchen aus salpeterhaltiger Nährlösung gegenüber denjenigen, welche in stickstofffreier Lösung kultiviert wurden. Diese stärkere Entwickelung äusserte sich nicht nur in dem Habitus der Pflänzchen während ihrer Vegetation, vielmehr hat sie auch in der Vergrösserung des frischen Gewichtes der geernteten Pflänzchen ihren Ausdruck gefunden. Dieses frische Gewicht der etiolierten Weizen- und Gerstekeimlinge aus der salpeterhaltigen Nährlösung war durchwegs höher als das derjenigen aus der salpeterfreien.

Wenn es zugestanden werden muss, dass die Verarbeitung des Salpeterstickstoffs zu organischen Stickstoffverbindungen auch im Dunkeln bei den höheren Pflanzen stattfindet, so folgt daraus durchaus nicht, dass das Licht für diesen Prozess belanglos ist. Im Ge-

genteil, das Resultat unserer früheren Versuche, dass das Licht fördernd auf die Verarbeitung des Salpeters einwirkt, hat sich auch in unseren neuen Versuchen vollkommen bestätigt.

So betrug der Gewinn an organischem Stickstoff auf Kosten der Nitrate ausgedrückt in % des ursprünglichen Stickstoffgehaltes der Samen in den Versuchen mit Weizenkeimlingen:
bei den Dunkelpflanzen 30·7% 34·3% 27·6%
bei den Lichtpflanzen 31·1 42·5% 40·6% 40·8% 56·3% 55·5%
und in den Versuchen mit Gerstekeimlingen:
bei den Dunkelpflanzen 16·4% 18·7%
bei den Lichtpflanzen 25·7%.

Den Unterschied zwischen der Stickstoffassimilation aus Nitraten im Lichte und im Dunkeln bei den Gerstekeimlingen würde wahrscheinlich viel grösser ausfallen, wenn die Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung in den letzten 5 Tagen des Versuches 6 infolge einer plötzlichen Verminderung der Luftfeuchtigkeit unter der Glocke nicht welk geworden wären.

Es muss mit allem Nachdruck betont werden, dass bei den Lichtpflanzen überall die Assimilation ausgeschlossen war, indem die Pflänzchen sich in kohlensäurefreier Luft entwickelten. Dass die Ausschliessung der Assimilation nicht nur angestrebt, sondern auch wirklich erreicht wurde, wird dadurch bewiesen, dass die Abnahme der Trockensubstanz durch Atmung bei den Lichtpflanzen eine ebenso grosse war wie bei den Dunkelpflanzen. Obwohl ich diesen Nachweis bereits in meiner ersten Mitteilung erbracht habe, wurde er von manchen Autoren übersehen; so bemerkt z. B. Prianischnikow in der Fussnote auf Seite 102 seiner bereits zitierten Abhandlung, dass er meine Versuche im Lichte unberücksichtigt lässt, weil die bei der Atmung der Pflanzen gebildete Kohlensäure teilweise wieder von der Pflanze assimiliert werden konnte. Ich habe eben wegen dieser theoretisch berechtigten Möglichkeit sowohl in meinen älteren wie in den vorliegenden Versuchen die Trockensubstanzbestimmungen der geernteten Pflänzchen überall ausgeführt und erst aus der Gleichheit der Trockensubstanzabnahme im Lichte und im Dunkeln auf das Nichtvorhandensein der Assimilation bei den Lichtpflanzen geschlossen. Dieser Nachweis, dass bei den Lichtpflanzen in meinen Versuchen keine Assimilation stattfand, berechtigt auch zu dem Schlusse, dass das Licht nicht indirekt durch Vermittelung der Assimilation, sondern direkt seine be-

günstigende Wirkung auf die Verarbeitung der Nitrate durch die höheren Pflanzen ausübt.

Durch den Nachweis, dass im Dunkeln und im Lichte in kohlensäurefreier Atmosphäre die Nitrate von den höheren Pflanzen verarbeitet werden, wird zugleich bestätigt, dass wenigstens der Regel nach die Entstehung der ersten organischen Stickstoffverbindungen mit dem Assimilationsprozesse nicht zusammenhängt, sondern dass die Stickstoffverbindungen auch bei den grünen Pflanzen auf Kosten der anorganischen Stickstoffverbindungen und organischen stickstofffreien Stoffe entstehen.

Einen noch grösseren Einfluss als auf die Verarbeitung der Nitrate hat die Lichtwirkung auf die Bildung der Eiweissstoffe in unseren Versuchen ausgeübt. In Übereinstimmung mit den Resultaten meiner früheren Versuche fand ich auch jetzt, dass die im Dunkeln gehaltenen Keimlinge, auch wenn sie in salpeterhaltiger Lösung wuchsen und Nitratstickstoff verarbeiteten, nie eine Zunahme, sondern immer eine Abnahme des Eiweissstickstoffs im Verhältnisse zu dem der Samen geäussert haben.

Doch ergab sich aus den Versuchen mit Weizen und mit Gerste, dass diese Eiweissabnahme in den Pflanzen aus nitrathaltiger Lösung kleiner ist als in denen aus stickstofffreier. Dasselbe habe ich schon in meinen früheren Versuchen vom Jahr 1896 beobachtet, habe aber damals noch für möglich gehalten, dass der Unterschied ein zufälliger sei. Diese Zufälligkeit ist nun angesichts der Bestätigung durch die neuen Versuche ausgeschlossen und es konnte sich nur noch darum handeln, ob die geringere Abnahme der Eiweissstoffe in den Pflanzen aus salpeterhaltiger Lösung daher rührt, dass auf Kosten des Salpeters eine gewisse Menge von Eiweissstoffen neugebildet wurde, wodurch die Abnahme teilweise kompensiert war, oder ob vielleicht die auf Kosten der Salpeters sich bildenden nicht proteinartigen Stickstoffverbindungen schützend auf die Eiweisszersetzung wirkten. In meiner früheren Mitteilung, wo ich diese Möglichkeiten auch erörtert habe, war ich mehr geneigt die letzte Hypothese als wahrscheinlicher anzusehen, jetzt aber, nachdem in der letzten Zeit die Eiweissbildung im Dunkeln vielfach bei den höheren Pflanzen und auch bei den Keimpflanzen (Suzuki) konstatiert worden ist, halte ich die erste Möglichkeit für naturgemässer.

Es ist höchst wahrscheinlich, dass in der Pflanze Eiweissbildung

und Eiweissspaltung auch im Dunkeln konstant nebeneinander vor sich gehen und die Zu- oder Abnahme der Eiweissstoffe davon abhängt, welcher von dieser Prozessen die Oberhand nimmt. Findet keine Assimilation des anorganischen Stickstoffs statt, so vollziehen sich diese Prozesse nur unter verschiedenen organischen Stickstoffverbindungen, welche aus den Reservestoffen der Samen und Knollen ihren Ursprung nehmen, kommt aber der neu aus Nitraten oder sonstigen Stickstoffquellen assimilierte Stickstoff hinzu, so wird auch er in diesen Kreislauf hineingezogen. Verhält sich die Sache wirklich so, so ist es verständlich, warum die Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung auch im Dunkeln an Eiweissstickstoff reicher sind als die aus salpeterfreier.

Im Versuche 5 wurde der Einfluss des Zuckers (2% Rohrzucker + 1% Traubenzucker) auf diese Prozesse im Dunkeln an Gerstekeimlingen geprüft. Bekanntlich hat Suzuki eben an den Gerstekeimlingen nachgewiesen, dass sie bei Anwesenheit grösserer Zuckermengen aus Nitraten im Dunkeln Eiweiss zu bilden vermögen.

Unser Versuch 5. ergab:

	Pro 100 des Samenstickstoffs: Abnahme des Proteinstickstoffes	Zunahme des organichen Nichtproteinstickstoffes
Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung die ganze Zeit ohne Zucker	— 43·0	+ 58·4
Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung $1^1/_2$ Tage mit Zucker . .	— 28·7	+ 47·4
Pflänzchen aus stickstofffreier Lösung die ganze Zeit ohne Zucker	— 49·0	+ 46·5
Pflänzchen aus stickstofffreier Lösung 3 Tage mit Zucker	— 49·6	+ 46·1

Das Resultat ist interessant.

In Gegenwart von Nitraten hat der Zucker, obgleich er nur $1^1/_2$ Tage mit den Pflänzchen in Berührung stand, die Eiweissabnahme bedeutend eingeschränkt, für die Pflänzchen, welche in stickstofffreier Lösung vegetierten, war die Ernährung mit Zucker, obgleich sie 3 Tage dauerte, für die Eiweissbildung belanglos; die Eiweissabnahme war bei den mit Zucker ernährten und nicht ernährten Pflänzchen gleich gross. Es macht also den Eindruck, als ob die

Neubildung des Eiweisses auf Kosten des Salpeters (bez. auf Kosten der bei Verarbeitung des Salpeters sich bildenden Stickstoffverbindungen) leichter im Dunkeln bei Anwesenheit des Zuckers vor sich ginge als die Eiweissregeneration aus den Produkten der Eiweissspaltung. Wäre es wirklich so, so würde daraus weiter folgen, dass die ersten stickstoffhaltigen Produkte, welche sich in der Pflanze aus der Verarbeitung des Salpeters bilden, mit den Spaltungsprodukten der Eiweissstoffe nicht identisch sind.

Der Versuch verdient wiederholt zu werden, da es selbstverständlich unstatthaft wäre, so wichtige Schlüsse auf einem einzigen Versuche aufzubauen.

Die Abnahme der Menge des Eiweissstickstoffs während der Vegetation im Dunkeln war bei unseren verschiedenen Versuchen nicht gleich, sie war im allgemeinen bei der Gerste stärker als bei dem Weizen, aber auch bei einer und derselben Pflanze war sie verschieden. So betrug die Verminderung des Eiweissstickstoffs pro 100 des Gesamtstickstoffs, bei dem Weizen:

in salpeterhaltiger Lösung	Versuch von 1896	26·6%	22·0%	20·8%
„ „ „	Versuch 1 . . .	12·7%	13·7%	
„ „ „	Versuch 2 . . .	40·6%		
in salpeterfreier Lösung	Versuch von 1896	31·0%		
„ „ „	Versuch 1 . . .	29·0%		
und bei der Gerste in salpeterfreier Lösung:				
	Versuch 5 . . .	49·0%		
	Versuch 7 . . .	55·3%		

Besonders grosse Unterschiede bestehen zwischen den Zahlen aus den Versuchen 1 und 2. Dass diese Unterschiede nicht durch verschiedene Entwickelungsstadien der in beiden Versuchen geernteten Pflanzen bedingt wurden, folgt daraus, dass die Mengen der veratmeten Trockensubstanz in beiden Versuchen gleich waren, sie konnten auch nicht durch Verschiedenheit des für die Versuche verwendeten Samenmaterials verursacht werden, da für beide Versuche das Material von derselben Samenprobe gedient hat, folglich konnten nur verschiedene Versuchsbedingungen diesen Unterschied verursachen. Da Versuch 1 im März, Versuch 2 im Juli ausgeführt wurde, so war es wahrscheinlich die höhere Temperatur während der Dauer des Versuches 2, welche ein stärkeres Übergewicht

der Eiweissspaltung über die Eiweissbildung hervorgerufen hat. Es wäre ohne Zweifel angezeigt, den Einfluss der Temperatur auf das Verhältnis zwischen diesen beiden Prozessen einer näheren experimentellen Prüfung zu unterwerfen.

Wir gelangen nun zu dem wichtigsten Punkte unserer Arbeit, d. h. zur Besprechung des Einflusses des Lichtes auf die Proteinbildung auf Kosten der nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen.

Man hat bisher die Frage nach dem Einflusse des Lichtes auf die Eiweissbildung in der Regel nur dahin zu beantworten gesucht, dass man sich bemüht hat festzustellen, ob dieser Prozess im Dunkeln vor sich gehen kann oder nicht.

Da die Versuche Zaleski's, Suzuki's, Hansteens und anderer dargethan haben, dass die Eiweissbildung auch bei den Pflanzenorganen im Dunkeln vollzogen werden kann, so folgerte man daraus, das dem Lichte keine direkte Rolle in diesem Prozesse zukommt. Hansteen z. B., wie wir sahen, betrachtet als festgestellte Tatsache, dass das Licht nur eine indirekte Rolle bei dem Prozesse der Eiweissbildung spielt.

Es ist aber zu bemerken, dass auch viele andere physiologische Prozesse, wie z. B. Transpiration, Wachstum, manche Bewegungserscheinungen u. s. w. im Dunkeln vollzogen werden können und doch vom Lichte beeinflusst werden, indem das Licht auf den Verlauf dieser Prozesse eine beschleunigende oder retardierende Wirkung ausübt. Das Gleiche bezieht sich auf die Eiweissbildung. Durch die Feststellung, dass die Eiweissbildung im Dunkeln sich vollziehen kann, ist die Frage nach der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit dieser Prozesse von der direkten Lichtwirkung noch nicht gelöst. Eine Unabhängigkeit vom Lichteinflusse dürfte erst dann angenommen werden, wenn der Beweis erbracht werden würde, dass bei gleicher Zufuhr von stickstofffreiem plastischen Nährmaterial die Eiweissbildung im Dunkeln und im Lichte mit gleicher Schnelligkeit erfolge. Nun verhält sich aber die Sache ganz anders.

Schon aus den in der Einleitung besprochenen Versuchen von Laurent und Marchal und namentlich aus ihren Versuchen im farbigen Lichte lässt sich auf eine von der Assimilation unabhängige, also direkte Wirkung des Lichtes auf Stickstoffassimilation und Eiweissbildung schliessen und sowohl unsere Versuche vom Jahre 1896 wie auch die jetzigen lassen über die Begünstigung sowohl der Eiweissneubildung auf Kosten der Nitrate wie der Eiweissre-

generation aus den Spaltungsprodukten derselben keinen Zweifel übrig.

Was die Neubildung des Eiweisses auf Kosten der Nitrate anbetrifft, so sehen wir, dass in Übereinstimmung mit meinen Versuchen von 1896 unsere jetzigen Versuche 3 und ganz besonders 4 zeigen, dass die in kohlensäurefreier Atmosphäre im Lichte gezogenen Weizenkeimpflanzen eine bedeutend grössere Menge von Eiweissstickstoff enthielten als die Samen. Die Eiweisssynthese im Lichte hat also trotz der mangelnden Assimilation nicht nur die ganze Menge der Eiweissstoffe, welche während der Entwickelung der Keimlinge gespalten wurde, wieder hergestellt, sondern noch darüber ein gewisses Plus ergeben. Im Dunkeln erreichte die Eiweissbildung kein einziges Mal die Höhe der Eiweissspaltung, so dass die geernteten Pflänzchen immer weniger Stickstoff enthielten als die Samen.

Ein abweichendes Verhalten zeigte sich bei den Versuchen 2 mit dem Weizen und 6 mit der Gerste. In diesen beiden Versuchen wurde auch bei den Lichtpflanzen eine Ahnahme des Eiweissstickstoffs im Verhältnisse zn dem der Samen konstatiert; die Eiweissspaltung übertraf also auch im Lichte die Eiweissbildung. Ich kann nicht bestimmt angeben, worauf dieses von dem üblichen verschiedene Verhalten beruht. In dem Versuche 6 mit Gerste hängt das wahrscheinlich damit zusammen, dass in den letzten 4 Tagen des Versuches eben die Pflänzchen aus salpeterhaltiger Lösung, infolge einer zu starken Feuchtigkeitsabnahme unter der Glocke welk wurden. Auch in dem Versuche 2 musste irgend eine Bedingung für regere Eiweisssynthese fehlen oder vielleicht war aus irgend welchen Gründen, z. B. wegen der hohen Temperatur, die Eiweissspaltung besonders stark, so dass sie auch im Lichte über die Eiweisssynthese Oberhand gewann. Wie dem auch sei, so ist doch zu konstatieren, dass auch in diesen in gewissem Sinne misslungenen Versuchen der Einfluss des Lichtes auf die Eiweissbildung nicht ausblieb, da im Versuche 2 die Abnahme des Eiweisses bei den Dunkelpflanzen doch eine bedeutend stärkere war als bei den Lichtpflanzen.

Bei dem Versuch 6 waren keine Vergleichspflanzen im Dunkeln gezogen, vergleicht man aber die Resultate dieses Versuches mit denjenigen des Versuches 5, welcher im Dunkeln ausgeführt wurde, so sieht man, dass die Eiweissabnahme bei den Lichtpflanzen des

Versuches 6 nicht nur um die Hälfte kleiner war als bei den in stickstoffhaltiger, rein mineralischer Lösung gezogenen Pflanzen des Versuches 5, sondern auch kleiner als bei denjenigen, welche mit Zucker ernährt wurden. Der begünstigende Lichteinfluss auf Eiweissbildung hat sich also auch hier deutlich geäussert.

Was nun die Regeneration der Eiweissstoffe aus ihren Spaltungsprodukten anbetrifft, so beweisen die Kulturen in stickstofffreier Lösung im Dunkeln und im Lichte, aber unter Ausschluss der Assimilation, dass auch dieser Prozess durch die direkte Lichtwirkung begünstigt wird. Ganz besonders instructiv ist in dieser Hinsicht die Vergleichung der Analysenresultate der in salpeterfreier Lösung gezogenen Lichtpflanzen im Versuche 6 mit den mit Zucker ernährten Dunkelpflanzen des Versuches 5. Die Abnahme der Trockensubstanz betrug bei den ersten 21·1%, bei der letzten 20·8%, dieselbe war also bei den Licht- und Dunkelpflanzen gleich. Dagegen wurde pro 100 Samenstickstoff in den geernteten Pflanzen gefunden:

	Eiweiss-stickstoff	Nichteiweiss-stickstoff
bei den Lichtpflanzen (Versuch 6.)	69·0	27·1
bei den Dunkelpflanzen (Versuch 5.)	45·4	51·1

Bei den Dunkelpflanzen des Versuches 7 war der Eiweisszerfall ein noch grösserer wie im Versuch 5, denn die Pflänzchen enthielten pro 100 Samenstickstoff nur 39·7 Eiweissstickstoff und 55·2 Stickstoff des Nichteiweisses. Hier war aber auch die Abnahme der Trockensubstanz grösser (30·3%); der Vergleich mit den Lichtpflanzen des Versuches 6 ist also weniger entscheidend. Auch der Vergleich der Resultate des Versuches 4 (Tabelle XV) mit denen des Versuches 1 (Tabelle VII) und 2 (Tabelle X) lässt auf direkte Lichtwirkung auf Eiweissregeneration aus ihren Spaltungsprodukten mit Sicherheit schliessen.

Es muss aber bemerkt werden, dass die Resultate dieser unserer Versuche mit Kulturen in stickstofffreier Nährlösung in doppelter Weise interpretiert werden können. Die unmittelbar nachgewiesene Tatsache ist nur die, dass bei 3 wöchentlichen Gerste- und Weizenkeimlingen im Verhältnisse zu den Samen die Abnahme an Eiweissstoffen und die Zunahme an nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen im Lichte auch unter Ausschluss der Assimilation

kleiner ist als im Dunkeln. Unsere Interpretation dieser Tatsache ist folgende: Das Licht begünstigt, auch unabhängig von der Assimilation, die Eiweissregeneration aus ihren Spaltungsprodukten natürlich unter der Bedingung, dass es der Pflanze an stickstofffreiem Material zu dieser Regeneration nicht fehlt. Es liegt aber auf der Hand, dass auch eine andere Interpretation der konstatierten Tatsache möglich wäre, nämlich die Annahme, dass das Licht die Prozesse der Eiweissspaltung verhindert. Eben durch eine solche Annahme versuchte Schulze[1]) meine in der Mitteilung von 1897 publizierten Resultate zu erklären: „Ich glaube aber," sagt Schulze, „dass die grosse Verschiedenheit, welche in Bezug auf den Eiweissgehalt zwischen den im Dunkeln und im Lichte in nitrathaltiger Nährstofflösung gezogenen Pflänzchen in denVersuchen Godlewskis sich zeigte, auf die von anderen und von mir nachgewiesene Tatsache zurückzuführen ist, dass oberirdische Teile lebenskräftiger Pflanzen einen starken Eiweissverlust erleiden, wenn man sie im Dunkeln vegetieren lässt. Es ist daher erklärlich, dass die im Dunkeln gezogenen Versuchspflanzen Godlewskis, auch wenn sie aus Nitraten Eiweissstoffe zu bilden vermochten, doch viel weniger Eiweiss enthielten als die im Licht erwachsenen Pflänzchen gleicher Art".

Diesem Erklärungsversuche schliesst sich auch Emmerling an, indem er nach der Besprechung meiner Versuche sagt[2]) „Mehr zutreffend scheint uns der Hinweis von E. Schulze zu sein, dass oberirdische Teile lebenskräftiger Pflanzen nach bekannten Erfahrungen einen Eiweissverlust erleiden, sobald man sie verdunkelt. Wenn man umgekehrt folgern darf, dass das Licht den entgegengesetzten Einfluss hat, also die Zersetzung verhindert oder verlangsamt, so kann man begreifen, dass es unter gewissen Umständen noch mehr zu leisten vermag als dies, nämlich die Eiweissbildung selbst zu fördern".

Ich kann nur den letzten Satz Emmerlings, dass das Licht die Eiweissbildung zu fördern vermag, als richtig anerkennen, dagegen kann ich dem Erklärungsversuche meiner Resultate der bei-

[1]) „Über den Umsatz des Eiweissstickstoffs in der lebenden Pflanze" Separat. Abd. aus Hoppe-Seylers Zeitschrift für physiologische Chemie B. 24. 1897. S. 93.

[2]) Emmerling „Studien über die Eiweissbildung in den Pflanzen". Die landwirtschaftlichen Versuchsstationen Bd. 54 1900. S. 228.

den um die Erforschung des Eiweissumsatzes so hoch verdienten Autoren nicht beipflichten. Meiner Meinung nach, ist nicht die Eiweisszersetzung im Lichte schwächer, sondern die Eiweissregeneration stärker als im Dunkeln. Wäre das erste der Fall, so wäre nicht einzusehen, warum sich diese schwächere Eiweisszersetzung im Lichte auch dann nicht äussern sollte, wenn in Ermangelung an stickstofffreiem Material die Eiweissregeneration unmöglich wird.

Nun haben aber die in meinem Laboratorium ausgeführten Untersuchungen von Frau Balicka dargethan, dass dies nicht der Fall ist[1]). Dieselbe kultivierte gelbe Lupine einerseits im Dunkeln, anderseits im Lichte, aber in einer kohlensäurefreien Atmosphäre und nach einer 19, 24 oder 30 Tage dauernden Vegetation unterzog sie die geernteten und getrockneten Pflanzen einer Analyse, in welcher Eiweissstickstoff, Asparaginstickstoff und Stickstoff sonstiger Verbindungen bestimmt wurde. Es zeigte sich, dass die Abnahme des Eiweissstickstoffs und die Zunahme des Nichtproteinstickstoffs bei den Lichtpflanzen eine ebenso grosse war wie bei den Dunkelpflanzen.

Damit wird sichergestellt, dass die Unterschiede, welche ich in dem Eiweissgehalt der im Lichte unter Ausschluss der Assimilation und im Dunkeln gezogenen Weizen- und Gerstekeimlinge gefunden habe, nicht auf eiweisszersetzungshemmende, sondern auf eiweissbildungfördernde Lichtwirkung zurückzuführen ist.

Demnach darf als festgestellt betrachtet werden, dass bei den höheren Pflanzen das Licht nicht nur auf indirekte Weise durch Vermittelung der Assimilation, sondern auch direkt sowohl auf die Verarbeitung der Nitrate im allgemeinen wie auf die Neubildung der Eiweissstoffe auf Kosten der anorganischen Stickstoffverbindungen wie endlich auch auf die Regeneration dieser Stoffe aus ihren Zersetzungsprodukten begünstigend einwirkt.

Nun muss aber die Frage aufgeworfen werden, wie man sich die Art und Weise dieser begünstigenden Lichtwirkung denken soll. Mir scheint, dass die einfachste, ja vielleicht die einzig mögliche

[1]) Balicka: „Recherches sur la décomposition et la régénération des corps albuminoïdes dans les plantes". Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des sc. math. et nat., 1903. S. 27—32.

Erklärung dieser Lichtwirkung in der Annahme liegt, welche schon Laurent und Marchal gemacht haben, dass nämlich das Licht die Energie für diese Prozesse liefert. Es sind dies ja durchwegs komplizierte synthetische Prozesse, zu deren Vollziehung Energie erforderlich ist. Diese Energie kann je nach den Umständen entweder in den chemischen Spannkräften oder in der Lichtstrahlung oder in beiden zugleich ihre Quelle haben. Eine ausgiebige Stickstoffassimilation aus salpetersauren Salzen sowie eine ausgiebige Eiweissbildung kann sich auch im Dunkeln vollziehen, aber nur dann, wenn reichliche Mengen von stickstofffreien plastischen Stoffen vorhanden und in Umwandlung begriffen sind. Die Stoffe liefern nicht nur das Material zur Eiweissbildung, sondern auch die für diesen Prozess nötige Energiequelle. Der ungemein starke Stoffwechsel und Verbrauch von grossen Mengen des Atmungsmaterials bei den Pilzen bietet eine hinreichende Erklärung dafür, dass bei den Pilzen die Stickstoffassimilation und Eiweisssynthese vom Lichte vollständig unabhängig zu sein scheint.

Je spärlicher die chemische Energiequelle für Eiweisssynthese fliesst, sei es aus Mangel an hinreichendem Atmungsmaterial sei es aus anderen Ursachen, desto mehr wird für diesen Prozess eine andere Energiequelle, und zwar die des Lichtes erforderlich. Da die Phanerogamen und überhaupt die grünen Pflanzen bei weitem nicht so viel Material verarbeiten wie die Pilze, so darf nicht befremden, dass sie auch in Bezug auf Stickstoffassimilation und Eiweissbildung sich etwas anders als die Pilze verhalten, weil nämlich bei diesen Pflanzen die in Rede stehenden Prozesse, um energisch vor sich zu gehen, der Wirkung des Lichtes als der Energiequelle bedürfen.

Da jedoch in Bezug auf die chemische Energiequelle zwischen den Pilzen und grünen Pflanzen kein absoluter, sondern nur ein quantitativer Unterschied besteht, so ist es verständlich, dass auch in Bezug auf die Befähigung, ohne Mithilfe des Lichtes Stickstoff aus Nitraten zu assimilieren und Eiweissstoffe auf Kosten anderer Stickstoffverbindungen aufzubauen, ein ähnlicher quantitativer Unterschied zwischen beiden Pflanzengruppen sich äussert.

Diese Prozesse im Dunkeln durchzuführen, sind auch die grünen Pflanzen, auch die Phanerogamen befähigt, aber in einem beschränkteren Masse als die Pilze; zu einer ausgiebigen Stickstoffassimilation und Eiweissbildung bedürfen diese Pflanzen der Mithilfe

des Lichtes und einer entsprechenden Einrichtung zur Ausnützung derselben, d. h. der Chloroplasten. Dementsprechend wird auch auf Grund verschiedener Tatsachen von den hervorragendsten Pflanzenphysiologen angenommen, dass die Eiweissstoffe hauptsächlich in den Blättern gebildet und von dort aus anderen Pflanzenteilen zugeführt werden. Auch hat Schimper gezeigt, dass in den panachyrten Blättern Nitrate leicht nur in grünen, nicht aber, wenigstens nicht so rasch in den weissen Teilen zersetzt werden, was für Beteiligung der Chlorophyllkörner an der Stickstoffassimilation aus Nitraten spricht. Da nach Laurent und Marchal die wichtigste Rolle bei Nitratverarbeitung und Eiweissbildung den brechbarsten, namentlich den ultravioletten Strahlen zukommt, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass die überaus starke Absorption in der brechbareren Hälfte des Chlorophyllspektrums eben mit der Wirkung des Lichtes auf Eiweissbildung zusammenhängt.

Eine Stickstoffassimilation und Eiweissbildung in anderen, nicht chlorophyllhaltigen Organen und im Dunkeln ist bei den höheren Pflanzen nicht nur nicht ausgeschlossen, sondern findet unzweifelhaft statt, sie tritt aber im Verhältnisse zur Eiweissbildung in den Blättern mehr in den Hintergrund. Ausgiebiger findet die Eiweissbildung im Dunkeln nur dann statt, wenn besonders günstige Bedingungen für diesen Prozess und für die Gewinnung der chemischen Energie für ihn bestehen, z. B. wenn man durch künstliche Fütterung der Pflanze mit fertigen Kohlenhydraten den Stoffwechsel begünstigt oder wenn in gewissen Pflanzenteilen besonders grosse Mengen von leicht verwendbaren Kohlenhydraten und amidartigen Stickstoffverbindungen miteinander zusammentreffen und dabei die Lebensvorgänge sich energisch abspielen (Keimung der Zwiebeln und Knollen).

Eine bemerkenswerte Tatsache, welche zu Gunsten der eben entwickelten Anschauungsweise angeführt werden kann, ist z. B. die, dass durch Zerkleinerung der Zwiebeln und Knollen und überhaupt durch Verwundung solcher Pflanzenteile, in welchen Kohlenhydrate und amidartige Verbindungen reichlich nebeneinander auftreten, Atmung und Eiweissbildung gleichzeitig in hohem Grade beschleunigt werden. Wahrscheinlich ist diese Tatsache dahin zu deuten, dass durch den Wundreiz die Atmung beschleunigt wird, wodurch die Pflanze mehr Energie für die Eiweisssynthese gewinnt.

Neulich hat Kovchoff[1]) gezeigt, dass nicht nur die Eiweissbildung im allgemeinen, sondern auch die Bildung der Nucleoproteide durch den Wundreiz beschleunigt wird. Auch diese Erscheinung hängt möglicherweise mit der Beschleunigung der Atmung zusammen.

Anderseits möge hervorgehoben werden, dass es durchaus unberechtigt wäre, in Konsequenz obiger Anschauungsweise stets einen Paralellismus zwischen Eiweissbildung im Dunkeln und Atmung zu fordern, da die Ausgiebigkeit der für irgend einen Prozess erforderlichen Energiequelle noch keineswegs allein über die Ausgiebigkeit dieses Prozesses, für welchen noch verschiedene andere Bedingungen nötig sind, entscheiden kann. Ebenso wie die Intensität des Lichtes für sich allein nicht über die Ausgiebigkeit der Kohlensäureassimilation eines Blattes entscheidet, ebensowenig kann auch die Intensität der die chemische Energie für Eiweisssynthese liefernden Atmung über die Ausgiebigkeit der Eiweisssynthese entscheiden. Es kann sich keineswegs allein um Ausgiebigkeit der Energiequelle für diesen Prozess handeln, sondern auch um die Bedingungen, unter welchen diese Energie am leichtesten ihre Wirkung in gewünschter Richtung ausüben konnte.

Dabei muss beachtet werden, dass mit der Atmung auch Eiweissspaltung verknüpft zu sein scheint, und dass dieser letzte Prozess gleichzeitig mit der Eiweissbildung fortwährend vor sich geht, so dass wir als Endresultat immer nur die Differenz zwischen diesen beiden Prozessen beobachten können. Verschiedene Ursachen können bald den einen bald den anderen von diesen beiden Prozessen begünstigen oder verlangsamen, wodurch natürlich das Endresultat abgeändert wird.

Auch bei der Entwickelung der Samenkeimlinge ist anzunehmen, dass fast von Anfang an immer diese beiden Prozesse gleichzeitig verlaufen, dass nämlich aus den stickstoffhaltigen Spaltungsprodukten der Eiweissstoffe und den in den Stoffwechsel hineingezogenen stickstoffreien Reservestoffen fortwährend Eiweiss regeneriert wird, dass aber in der ersten Entwickelungsperiode der Keimpflanzen die Eiweissspaltung bei weitem die Eiweissregeneration übertrifft, was eben zur Folge hat, dass zeitweise die Menge der Ei-

[1]) Kovchoff „Über den Einfluss der Verwundungen auf Bildung von Nucleoproteiden". Berichte der deutsch. bot. Gesell. B. XXI, 1903, S. 165.

weissstoffe beständig ab, die Menge der stickstoffhaltigen Spaltungsprodukte des Eiweisses konstant zunimmt. Bei der Weiterentwickelung hängt die Gestaltung des Endresultates beider Prozesse davon ab, ob diese Weiterentwickelung im Dunkeln oder im Lichte vor sich geht. Entwickelt sich die Keimpflanze im Dunkeln, so ist die Eiweissregeneration nur auf das stickstofffreie Material der Reservestoffe und auf die durch die Atmung gelieferte Energie angewiesen. Es ist nicht uninteressant, dass Prianischnikow[1]) gezeigt hat, dass das Maximum des Eiweissspaltungsprozesses bei der Entwickelung der Keimpflanzen in der Dunkelheit um mehrere Tage früher eintritt als das Maximum der Atmung. Es wäre möglich, dass die Ursache dieser Erscheinung darin zu suchen sei, dass der Pflanze erst dann eine hinreichende Energiequelle für die Eiweisssynthese zu Gebote steht, wenn die Atmung eine gewisse Grösse erreicht hat, und deshalb vollzieht sich die Eiweissregeneration in diesen weiteren Entwicklungsstadien zur Zeit des Maximums der Atmung energischer als es früher bei noch schwächerer Atmung der Fall war.

Das Andauern und der Grad der Eiweissregeneration im Dunkeln muss natürlich von der Menge der stickstofffreien Reservestoffe abhängen, denn davon hängt sowohl das Baumaterial wie auch die Energiequelle für die Eiweisssynthese ab. Deswegen ist es leicht begreiflich, weshalb für eine bestimmte Menge der Eiweissstoffe der Samen in den etiolierten Pflanzen, deren Samen an stickstofffreien Reservestoffen arm sind (Papilionaceae und vor allem Lupinus), mehr amidartige Stickstoffverbindungen und weniger Eiweissstoffe zu finden sind als in den etiolierten Pflanzen aus beispielweise sehr stärkereichen Samen (Cerealien). Nicht die Eiweissspaltung ist bei den ersten grösser, sondern die Eiweissregeneration kleiner als bei den letzten.

Wird nun die Keimpflanze zur rechten Zeit dem Lichte ausgesetzt, so wird dadurch der Eiweissspaltungsprozess gar nicht gehindert, sondern die Eiweissregeneration wird in dreifacher Weise gefördert.

1. wird durch Kohlensäureassimilation neues stickstofffreies Baumaterial für die Eiweisssynthese geschaffen;

[1]) Prianischnikow „Eiweisszerfall und Atmung in ihren gegenseitigen Verhältnissen“ Land. Versuchst., Bd. 52, 1899, S. 135.

2. wird durch dieselbe Assimilation neues Atmungsmaterial und dadurch eine neue Quelle der chemischen Energie zur Eiweisssynthese geliefert;

3. wird in der Lichtstrahlung eine neue unmittelbare Energiequelle für Eiweisssynthese gewonnen.

Handelt es sich nun um Keimpflanzen aus Samen, welche sehr reich an Proteinstoffen und arm an stickstofffreiem Material sind, wie z. B. Lupinensamen, so kommt vor allem der erste Punkt, d. h. die Beschaffung eines neuen stickstofffreien Baumaterials in Betracht, fehlt dieses Baumaterial, so helfen der Pflanze auch die reichsten Energiequellen für Eiweissregeneration gar nichts. Demzufolge wirkt das Licht auf die Regeneration der Eiweissstoffe bei den Lupinenkeimlingen nur in Anwesenheit der Kohlensäure, in einer kohlensäurefreien Luft wird sie nicht grösser als in tiefster Finsternis, so dass Lupinepflanzen, in einer solchen Luft am Lichte gezogen, eine eben so starke Abnahme der Proteinstoffe und eine eben so starke Zunahme an amidartigen Stickstoffverbindungen und sonstigen Produkten der Eiweissspaltung zeigen wie die Pflanzen, welche sich in der gleichen Zeit im Dunkeln entwickelten (Versuch von Frau Balicka).

Anders verhält sich die Sache, wenn es sich um Keimlinge aus an stickstofffreien Reservestoffen reichen Samen handelt. Hier fehlt es lange Zeit hindurch an stickstofffreiem Baumaterial für Eiweisssynthese nicht, aber die durch die Atmung der Pflanzen gelieferte Energie reicht nicht hin, um dieses Baumaterial für Eiweissregeneration vollkommen auszunutzen, wird nun die Pflanze auch bei Fernhaltung der Kohlensäure dem Lichte ausgesetzt, so kommt eben der dritte Punkt der drei Wirkungsweisen des Lichtes in Betracht, d. h. es wird vom Lichte Energie geliefert, welche eine bessere Ausnutzung des aus Reservestoffen stammenden Baumaterials zur Eiweissregeneration gestattet. Dementsprechend zeigten unsere Versuche mit in stickstofffreien Nährlösungen gezogenen Weizen- und Gerstekeimlingen, dass auch in kohlensäurefreier Atmosphäre bei vollständigem Ausschlusse der Assimilation die Eiweissregeneration durch das Licht begünstigt wurde.

Alles, was wir hier in Bezug auf Eiweissregeneration aus den Spaltungsprodukten der Proteinstoffe gesagt haben, bezieht sich natürlich auch auf die Eiweisssynthese aus denjenigen organischen Stickstoffverbindungen, welche unmittelbar aus den anorganischen,

also aus Nitraten und Ammoniaksalzen entstehen, nur ist hier die Energie nicht nur zur Eiweisssynthese, sondern auch zu dieser ersten Umbildung des anorganischen Stickstoffs in erste organische Stickstoffverbindungen erforderlich. Wie schon gesagt wurde, muss angenommen werden, dass auch hier wie bei der Eiweissregeneration diese Energie teils durch den chemischen Stoffwechsel teils durch das Licht geliefert wird.

Diese Annahme, dass ein und derselbe synthetische Prozess, nämlich die Eiweissbildung, unter Verwendung bald der chemischen bald der Lichtenergie sich vollziehen soll, darf insofern nicht befremden, als es doch bewiesen ist, dass das Gleiche auch denjenigen synthetischen Prozess betrifft, welcher von allen sich in Organismen abspielenden der wichtigste ist, nämlich die Kohlenstoffassimilation aus Kohlensäure und die Bildung der ersten organischen Substanz. Die grünen Pflanzen vermögen bekanntlich Kohlensäure nur im Lichte zu zersetzen, für die synthetische Bildung der organischen Substanz verwenden sie also Lichtenergie, aber die salpeterbildenden Bakterien Nitrosomonas wie auch Nitrobakter, welche sich auch mit Kohlensäure ernähren, vermögen aus derselben in tiefster Finsternis organische Substanz herzustellen, sie verwenden also zur Zersetzung der Kohlensäure und zur Bildung der organischen Substanz nicht Lichtenergie, sondern chemische Energie. Diese letzte schöpfen sie aus der ihr eigenthümlichen Atmungsweise, d. h. aus der Oxydation des Ammoniaks zu salpetriger Säure resp. der salpetrigen Säure zu Salpetersäure. Es ist kaum zu zweifeln, dass das Gleiche sich auch für Schwefelbakterien und überhaupt für alle Organismen ergeben wird, welche ihr Atmungsmaterial von aussen in der Form von oxydierbaren anorganischen Stoffen schöpfen. Ich halte es durchaus nicht für unwahrscheinlich, dass auch die Pilze und auch die höheren Pflanzen gelegentlich im Dunkeln, unter Verwendung der chemischen Energie, welche sie durch Atmung gewinnen, Kohlensäure zersetzen und daraus organische Substanz aufbauen, es liegt aber auf der Hand, dass sich dieser Prozess hier nie in sichtbarer Weise durch Trockensubstanz-Vergrösserung äussern kann, weil die Menge der auf diese Weise gebildeten organischen Substanz immer nur einen Bruchteil derjenigen sein kann, welche für die Gewinnung der für diese Bildung nötigen Energie veratmet werden muss.

Endlich möge noch das Auftreten verschiedener nichtprotein-

artiger Stickstoffverbindungen in den Weizen- und Gerstekeimlingen kurz besprochen werden.

Durch Bestimmung verschiedener Formen dieser Verbindungen in den Pflänzchen, welche einerseits in stickstofffreier, anderseits in salpeterhaltiger Lösung gezogen wurden, wollte ich versuchen, ob es nicht gelingen möchte, einige Anhaltspunkte über die Natur der intermediären Stickstoffverbindungen bei der Eiweisssynthese auf Kosten der Nitrate zu gewinnen. Sollte es sich herausstellen, dass einzelne Gruppen der Stickstoffverbindungen in den in salpeterhaltiger Lösung gezogenen Pflänzchen stärker vertreten sind als in den, welche in stickstofffreier Nährlösung vegetierten, so dürfte man vermuten, dass die in den mit Salpeter ernährten Pflänzchen vorherrschenden Stickstoffverbindungen als intermediäre Produkte der Eiweissbildung anzusehen sind. Indessen hat sich, wie wir bald sehen werden, diese Erwartung nicht erfüllt.

Um uns die Orientierung über die Verhältnisse, in welchen verschiedene, nichtproteinartige Stickstoffverbindungen in den Weizen- und Gerstekeimlingen auftreten, zu erleichtern, habe ich auf Grund der vorstehenden Analysen berechnet, welche Stickstoffmenge von 100 des Gesamtstickstoffs des Nichtproteins auf einzelne Gruppen verschiedener Stickstoffverbindungen entfallen.

Die Zahlen aus dieser Berechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Siehe die TABELLE auf Seite 375.

Es ist nicht möglich, auf Grund dieser Zahlen irgend einen charakteristischen Unterschied zwischen den Eiweissspaltungsprodukten und den intermediären Produkten der Eiweisssynthese auf Kosten der Nitrate zu präcisieren. Es besteht z. B. im Versuche I in der Verteilung des Stickstoffes auf verschiedene Gruppen der nichteiweissartigen Verbindungen kein Unterschied zwischen den Pflanzen aus stickstofffreier und denen aus nitrathaltiger Nährlösung.

Die erste Stelle unter den nichtproteinartigen Stickstoffverbindungen, mögen die Pflänzchen im Dunkeln oder im Lichte in salpeterhaltiger oder in salpeterfreier Lösung gezogen werden, nehmen immer die Aminosäureamide (Asparagin resp. auch Glutamin) auf. Ihr Stickstoff macht bei den Weizenkeimlingen nahezu die Hälfte des ganzen Nichtproteinstickstoffs aus.

Aminosäuren sind in wechselnder, aber ziemlich geringer Menge

Von 100 Stickstoff der nichtproteinartigen Verbindungen entfällt:	bei Weizenkeimlingen						
	kultiviert im Dunkeln			kultiviert im Lichte in kohlensäurefreier Luft			
	in stickstofffreier Nährlösung	in stickstoffhaltiger Nährlösung		in stickstoffhaltiger Nährlösung			
	V. 1	V. 1	V. 2	V. 2 a	V. 2 b	V. 4 a	V. 4 b
auf Ammoniak	7·2	8·2	6·1	8·5	7·4	7·8	
„ Aminosäureamide (Asparagin u. Glutamin)	41·6	45·4	42·2	42·4	42·9	37·4	
„ Aminosäuren	7·8	7·9	19·2	21·6	14·9	15·8	
„ Peptone u. organische Basen	5·3	Spuren	31·9	9·4	10·7	2·6	
„ unbestimmte Verbindungen	38·0	38·5		18·2	23·7	32·3	

	bei Gerstekeimlingen				
	kultiviert im Dunkeln		kultiviert im Lichte V. 6		
			Lösung stickstofffrei		Lösung stickstoffhaltig kohlensäurefreie Luft
	in stickstofffreier Nährlösung V. 7	in stickstoffhalt. Nährlösung 1½ Tage mit Zucker V. 5	gewöhnliche Luft	kohlensäurefreie Luft	
auf Ammoniak	6·3	9·9	5·4	12·2	6·6
„ Aminosäureamiden	51·2	53·2	34·0	62·7	56·5
„ Aminosäuren	5·8	14·1	15·5	13·3	15·6
„ Peptone u. organische Basen	11·3	3·6	19·9	0·0	11·0
„ unbestimmte Verbindungen	25·4	18·5	25·6	11·8	10·2

vertreten, manchmal entspricht der Aminosäurestickstoff nur der Menge des Ammoniakstickstoffs (1, 2), in dem extremsten Falle (Versuch 2, wo die Eiweissspaltung eine sehr starke war) betrug er 21% des ganzen Nichteiweissstickstoffs. Ammoniak war immer aber

nur spärlich vorhanden. Sein Stickstoff schwankte zwischen 5 und 12% des ganzen Nichteiweissstickstoffs. Ob dieses Ammoniak oder wenigstens die ganze Menge desselben in den Pflanzen präformiert war, darf angezweifelt werden; es ist sehr wahrscheinlich, dass wenigstens ein Teil desselben durch Inversion eines Teils der Aminosäureamide, sei es beim Trocknen der Pflänzchen, sei es bei der Destillation des Auszuges mit MgO (trotz der niedrigen Temperatur, bei welcher destilliert wurde) entstanden ist. Wäre es wirklich so, so würde die Menge der Aminosäureamide in den Keimpflänzchen tatsächlich noch grösser, die Menge der Aminosäuren noch kleiner, als in unseren Tabellen angegeben ist, und in Fällen, wo die Menge des Aminosäurestickstoffs nur derjenigen des Ammoniakstickstoffs entspricht, würden die Aminosäuren eigentlich gänzlich fehlen.

Da es mir wahrscheinlich erscheint, dass das gefundene Ammoniak wenigstens in seinem grössten Teil wirklich von der Inversion der Aminosäureamide herrührte und da bei einigen Analysen Ammoniak leider nicht bestimmt wurde, weshalb die betreffenden Analysen für die Zusammenstellung der Tabelle XXIII nicht benutzt werden konnten, so habe ich noch folgende Tabelle (XXIV) unter der Annahme zusammengestellt, dass sämtliches Ammoniak aus der Inversion der Aminosäureamide stammte. In dieser Tabelle konnten also auch die Resultate dieser Versuche aufgenommen werden, in welchen Ammoniak nicht besonders bestimmt wurde. Wo diese Bestimmung stattfand, wurde der Ammoniakstickstoff zu dem abspaltbaren Amidstickstoff addiert und diese Zahl verdoppelt, indem damit der Stickstoff der Aminosäureamide ausgedrückt wurde. Durch Substraktion dieser Zahl von der Menge des durch N_2O_3 ausgetriebenen Aminosäurestickstoffs erhielt man die Menge des Stickstoffs der Aminosäuren.

Die so erhaltenen Zahlen, auf 100 des jeweiligen Gesamtstickstoffs der Nichtproteinverbindungen umgerechnet, sind in folgender Tabelle wiedergegeben.

Siehe TABELLE, Seite 377.

Ist die Annahme, unter welcher die Zahlen dieser Tabelle berechnet wurden, richtig, so beträgt der Stickstoff der Aminosäureamide bei den Weizenpflanzen mehr als die Hälfte, bei den Gerstekeimlingen meistens ungefähr $\frac{3}{4}$ des ganzen Stickstoffs der Nichtproteinverbindungen. Aminosäuren sollen nach diesen Zahlen

Von 100 Stickstoff der nichteiweissartigen Verbindungen entfällt:	in Weizenkeimlingen						
	Pflänzchen im Dunkeln kultiviert			Pflänzchen im Lichte kultiviert kohlensäurefreie Luft			
	in salpeterfreier Lösung	in salpeterhaltiger Lösung		salpeterhaltige Nährlösung			
	V. 1	V. 1	V. 2	V. 2 a	V. 2 b	V. 4 a	V. 4 b
auf Amidosäureamide	56·0	61·8	54·4	59·4	58·5	61·0	70·4
„ Aminosäuren	0·7	0·0	13·7	13·1	7·1	4·0	29·6
„ Peptone u. organische Basen	5·3	Spuren	31·9	9·4	10·7	2·6	
„ unbestimmte Verbindungen	38·0	38·5		18·2	23·7	32·3	

Von 100 Stickstoff der nichteiweissartigen Verbindungen entfällt:	in Gerstekeimlingen							
	Pflänzchen im Dunkeln					Pflänzchen im Lichte		
	in stickstofffreier Lösung			in stickstoffhaltiger Lösung		salpeterfreie Lösung		salpeterhaltige Nährlös. kohlensäurefreie Luft
	ganze Zeitlang rein mineralische Nährlösung		3 Tage mit Zucker ernährt	ganze Zeitlang rein mineralische Nährlösung	1½ Tage mit Zucker ernährt	kohlensäurefreie Luft	kohlensäurehaltige Luft	
	V. 7	V. 5	V. 5	V. 5	V. 5	VI. 6	VI. 6	VI. 6
auf Aminosäureamide	63·8	75·7	74·0	62·0	73·7	87·1	44·4	69·7
„ Aminosäuren	0·0	15·9	1·9	6·4	4·2	1·1	10·1	9·0
„ Peptone u. organische Basen	11·3	8·4	24·1	31·6	3·6	0·0	19·9	11·0
„ unbestimmte Verbindungen	25·4				18·5	11·8	25·6	10·2

manchmal gänzlich fehlen, etwas reichlicher waren sie nur dann in den Keimpflanzen vertreten, wenn in denselben der Eiweisszerfall im Verhältnisse zur Eiweissbilbung besonders stark war (Versuch 2 mit Weizen und 5 mit Gerste).

Die Ernährung mit Zucker der in stickstofffreier Lösung im Versuche 5 im Dunkeln vegetierenden Gerstepflänzchen hat zwar keine Vermehrung der Eiweissbildung, doch aber die Umwandlung der Aminosäuren in andere nicht näher bestimmte Stickstoffverbindungen zur Folge gehabt. (Da die Phosphorwolframfällung bei der Analyse dieser Pflänzchen nicht vorgenommen wurde, so bleibt unentschieden, ob diese Umwandlungsprodukte der Aminosäuren nicht Peptone waren). In stickstoffhaltiger Nährlösung hat die Ernährung der Keimlinge mit Zucker deutlich die Eiweissbildung begünstigt.

Die mit Phosphorwolframsäure fällbaren Stickstoffverbindungen waren in sehr wechselnden, aber immer nur kleinen Mengen vertreten. Nur in den Gerstepflänzchen, welche in stickstofffreier Lösung im Lichte unter Zutritt von CO_2 (Versuch 6) kultiviert wurden, erreicht die Menge des mit Phosphorwolframsäure fällbaren Nichteiweissstickstoffs die Höhe von nahezu 20% des Gesamtnichteiweissstickstoffs.

Summiert man die Stickstoffmengen der Aminosäureamide, der Aminosäuren, des Ammoniaks und der mit Phosphorwolframsäure fällbaren Verbindungen und vergleicht diese Summe mit dem Gesamtstickstoff der Nichteiweissverbindungen, so bleibt noch ein manchmal ziemlich ansehnlicher Rest des Stickstoffs übrig. Es folgt daraus, dass in den Keimpflanzen, ausser den aufgezählten Gruppen der Stickstoffverbindungen, noch andere zu keiner dieser Gruppen gehörenden Stickstoffverbindungen vorhanden sind. Was das für Verbindungen sind, bleibt zur Zeit unbekannt; ihre Menge ist schwankend, in den Weizenkeimlingen, wo sie grösser ist als in den Gerstekeimlingen, erreicht die Stickstoffmenge dieser unbestimmten Verbindungen nahezu 40% des Gesamtstickstoffs des mehr Nichteiweisses. Im Dunkeln wachsende Keimpflanzen scheinen mehr von diesen Stickstoffverbindungen zu enthalten als im Lichte vegetierende.

Zusammenfassung der Resultate.

Zum Schlusse wollen wir noch die Resultate der vorliegenden Arbeit in folgenden kurzen Sätzen zusammenfassen.

1. Nicht nur die Pilze, sondern auch die höheren Pflanzen vermögen im Dunkeln den Stickstoff aus salpetersauren Salzen zu

assimilieren und eine Eiweisssynthese sowohl auf Kosten dieses neu assimilierten Stickstoffs wie auf Kosten der Spaltungsprodukte der Proteinstoffe herbeizuführen.

2. Während bei den Pilzen die Stickstoffassimilation und Eiweissbildung vom Lichte vollkommen unabhängig ist, werden diese Prozesse bei den höheren Pflanzen sehr stark durch das Licht beeinflusst und eine dauernde und ausgiebige Stickstoffassimilation und Eiweissbildung findet bei den höheren Pflanzen nur bei Lichtwirkung statt.

3. Die begünstigende Lichtwirkung auf die Eiweisssynthese bezieht sich sowohl auf die Neubildung dieser Stoffe auf Kosten der salpetersauren Salze wie auch auf die Regeneration der Eiweissstoffe aus ihren Spaltungsprodukten.

4. Das Licht begünstigt die Stickstoffassimilation und Eiweisssynthese bei den höheren Pflanzen einerseits indirekt, indem sie die Kohlensäureassimilation durch die Pflanze bewirkt und dadurch das stickstoffhaltige Baumaterial für die Eiweisssynthese schafft, anderseits direkt, indem sie der Pflanze die für das Zustandekommen der Stickstoffassimilation und der Eiweisssynthese nötige Energie liefert.

5. Sofern die Stickstoffassimilation und die Eiweisssynthese bez. Eiweissregeneration ohne Mitwirkung des Lichtes eintritt, wird die für diesen Prozess nötige Energie durch die bei dem Stoffwechsel resp. bei der Atmung frei werdenden Kräfte geliefert.

6. Die Unabhängigkeit der Stickstoffassimilation und der Eiweisssynthese vom Lichte bei den Pilzen erklärt sich durch den relativ starken Stoffwechsel bei dieser Pflanzengruppe, wodurch die Pilze mehr als die höheren Pflanzen chemische Energie für die Eiweisssynthese zur Verfügung haben.

7. Bei den höheren Pflanzen findet eine ausgiebigere Eiweisssynthese im Dunkeln nur dann statt, wenn den betreffenden Zellen stickstofffreie, im Stoffwechsel begriffene, plastische Stoffe reichlich zu Gebote stehen, d. h. wenn die Lebensbedingungen der eiweissbildenden Zellen sich denjenigen der Pilze nähern.

8. Unter den nichteiweissartigen Stickstoffverbindungen, welche in den dreiwöchentlichen Weizen- und Gerstekeimlingen auftreten und teils durch Eiweissspaltung teils als intermediäre Produkte der Eiweisssynthese auf Kosten der anorganischen Stickstoffverbindungen entstehen, sind Aminosäureamide (in erster Linie Asparagin) am reichlichsten vertreten; etwa die Hälfte des gesamten Stickstoffs

des Nichteiweisses ist in der Form der Aminosäureamide vorhanden. Die Aminosäuren und die mit Phosphorwolframsäure fällbaren Stickstoffverbindungen sind in wechselnder und in der Regel geringer Menge vorhanden. Ausser diesen drei Gruppen der nichteiweissartigen Stickstoffverbindungen finden sich in den Keimpflanzen in wechselnder, ziemlich bedeutender Menge noch andere zu keiner dieser Gruppen gehörende Stickstoffverbindungen.

9. Übereinstimmend mit den noch nicht publizierten Beobachtungen Kosińskis zeigte es sich auch bei den Weizen- und Gerstekeimlingen, dass bei Stickstoffmangel die Wurzelbildung im Verhältnisse zur Sprossbildung bevorzugt wird, so dass man den Eindruck bekommt, als ob die Pflanze dahin strebe, durch stärkere Wurzelentwicklung den Stickstoff des Substrates besser auszunutzen.

---

28. M. ST. ZAREMBA m. c. **O pewnem uogólnieniu klasycznej teoryi tarcia wewnętrznego.** ***(Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité).***

I. Introduction.

On peut chercher à rendre compte des phénomènes dus à la viscosité des fluides en admettant que la distribution des tensions intérieures dans un fluide en mouvement soit, à chaque instant, identique à celle qui régnerait dans un corps fictif parfaitement élastique et isotrope lequel aurait éprouvé une certaine déformation. C'est précisément sur cette hypothèse que M. Natanson[1]), qui en attribue d'ailleurs la première idée à Poisson et à Maxwell, a tenté de fonder une théorie mathématique de la viscosité. Malheureusement les équations définitives qu'il propose et sur lesquelles reposent tous ses travaux ultérieurs doivent être rejetées[2]) comme contraires à l'un des principes fondamentaux de la mécanique. M. Natanson obtient, il est vrai, ces équations erronées en négligeant certains termes, qu'il n'était pas permis de négliger, dans d'autres équations qui n'ont pas le défaut précédent. Mais, ces équations là n'ont pas la géné-

[1]) Natanson, Sur les lois de la viscosité. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

[2]) Zaremba. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903.

ralité voulue: pour les obtenir, il faut faire une hypothèse particulière que rien ne justifie à priori; d'ailleurs la déduction qu'en donne M. Natanson est tout-à-fait incorrecte.

L'hypothèse que M. Natanson a prise pour base de sa théorie n'étant pas, selon nous, dénuée de vraisemblance, il nous a paru intéressant de la préciser et de la compléter, sans cependant en restreindre arbitrairement la généralité, de façon qu'il soit possible d'en déduire les équations du mouvement d'un fluide visqueux, d'établir ensuite ces équations au moyen d'une analyse rigoureuse et de faire ressortir enfin les défauts de l'analyse de M. Natanson. Tel est précisément l'objet de ce travail. Le chapitre suivant contient la théorie que nous proposons et le dernier chapitre l'examen de celle de M. Natanson.

II. Equations du mouvement d'un fluide visqueux.

Nr. 2. Commençons par rappeler certains faits bien connus dans la théorie de la déformation d'un milieu continu [1], faits qui joueront un rôle important dans les considérations qui vont suivre. L'espace étant rapporté à un système de coordonnées rectangulaires, désignons par a, b, c les coordonnées d'un élément matériel m, d'un milieu continu (M) à une époque t_0 et par

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \xi \\ y &= b + \eta \\ z &= c + \zeta \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

les coordonnées du même élément matériel m du milieu (M) à une autre époque t. Les époques t_0 et t étant données, les quantités ξ, η et ζ seront évidemment des fonctions déterminées des variables a, b et c. Supposons que les dérivées partielles du premier ordre des fonctions ξ, η et ζ des variables a, b, c soient des fonctions continues de ces variables et envisageons trois éléments matériels m, m' et m'' du milieu (M). Soient A_0, A'_0 et A''_0 les positions de ces éléments matériels à l'époque t_0 et A, A', A'' leurs positions à l'époque t. Je suppose que les distances des points A'_0 et A''_0 au point A_0 soient infiniment petites et je désigne par l_1, l_2 et l_3 les cosinus-directeurs du vecteur $\overline{A'_0\,A''_0}$. On aura, à des infiniment petits d'ordre supérieur près:

[1]) Voir par exemple Appell. Cours de Mécanique T. III.

$$\overline{A'A''}^2 = \{(1+2\varepsilon_1)l_1^2 + (1+2\varepsilon_2)l_2^2 + (1+2\varepsilon_3)l_3^2 + \\ + 2\gamma_1 l_2 l_3 + 2\gamma_2 l_3 l_1 + 2\gamma_3 l_1 l_2\}\overline{A_0'A_0''}^2$$

en posant:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2\right\} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial b}\right)^2\right\} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial\zeta}{\partial c} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)^2\right\} \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\partial\zeta}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\xi}{\partial c} + \frac{\partial\eta}{\partial b}\frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\frac{\partial\zeta}{\partial c} \\ \gamma_2 &= \frac{\partial\xi}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial c}\frac{\partial\eta}{\partial a} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\frac{\partial\zeta}{\partial a} \\ \gamma_3 &= \frac{\partial\eta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial a}\frac{\partial\zeta}{\partial b} \end{aligned} \right.$$

où a, b et c représentent les coordonnées du point A_0. Nous dirons que les six fonctions

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$$

sont les composantes de la déformation éprouvée par le milieu (M) dans le voisinage de l'élément matériel m pendant l'espace de temps de t_0 à t.

Lorsque les dérivées partielles du premier ordre des fonctions ξ, η et ζ sont assez petites pour que l'on puisse négliger les termes du second degré par rapport à ces dérivées partielles, les formules (2) et (3) peuvent être remplacées par les formules plus simples que voici:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{\partial\xi}{\partial a},\quad \varepsilon_2 = \frac{\partial\eta}{\partial b},\quad \varepsilon_3 = \frac{\partial\zeta}{\partial c} \\ \gamma_1 = \frac{\partial\zeta}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial c} \\ \gamma_2 = \frac{\partial\xi}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial a} \\ \gamma_3 = \frac{\partial\eta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial b} \end{aligned} \right.$$

Supposons que le milieu continu M ait éprouvé dans deux espaces de temps consécutifs, de t' à t'' et de t'' à t''', deux déformations consécutives. Soient

$$\varepsilon_1', \ \varepsilon_2', \ \varepsilon_3', \ \gamma_1', \ \gamma_2', \ \gamma_3'$$

les composantes de la déformation qui s'est produite de l'époque t' à l'époque t'' et

$$\varepsilon_1'', \ \varepsilon_2'', \ \varepsilon_3'', \ \gamma_1'', \ \gamma_2'', \ \gamma_3''$$

celles de la déformation que le milieu a éprouvée dans l'espace de temps de t'' à t'''. Si les conditions voulues pour que les formules (4) soient applicables sont remplies pour chacune des deux déformations précédentes, les composantes de la déformation que le milieu a éprouvée dans l'espace de temps de t' à t''' seront représentées approximativement par les expressions:

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_1' + \varepsilon_1'', & \varepsilon_2' + \varepsilon_2'', & \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' \\ \gamma_1' + \gamma_1'', & \gamma_2' + \gamma_2'', & \gamma_3' + \gamma_3'' \end{array}\right|$$

Nr. 3. L'hypothèse dont nous nous proposons de poursuivre les conséquences mathématiques, hypothèse énoncée au début de l'Introduction, exige que nous distinguions en un instant quelconque t deux espèces de déformation dans le sein du fluide: 1° celle que le fluide a réellement subie depuis une certaine époque fixe, soit t_0, jusqu'à l'époque considérée t. Nous appellerons cette déformation, la déformation géométrique du fluide et nous en représenterons les composantes par les symboles:

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3, \ \gamma_1, \ \gamma_2, \ \gamma_3 \tag{5}$$

2° celle du corps fictif parfaitement élastique que nous substituons par la pensée, à chaque instant, au fluide réel et dont l'état de tension intérieure est identique à celui qui, à l'instant considéré, règne dans le sein du fluide. Nous désignerons les composantes de cette déformation par

$$\varepsilon_1^*, \ \varepsilon_2^*, \ \varepsilon_3^*, \ \gamma_1^*, \ \gamma_2^*, \ \gamma_3^* \tag{6}$$

et nous dirons qu'elles représentent les composantes de la déformation élastique du fluide ou celles de la déformation du corps fictif.

Nous admettrons que la déformation élastique du fluide est telle qu'il soit permis d'en représenter les composantes par des formules

de la forme (4). En d'autres termes, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un élément matériel du corps fictif dans l'état de déformation qu'il a à l'époque t et par x^*, y^*, z^* les coordonnées du même élément matériel du corps fictif à l'état naturel et dans la position à partir de laquelle on suppose qu'il a subi la déformation, on aura approximativement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1^* &= \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_2^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*}, \quad \varepsilon_3^* = \frac{\partial \zeta^*}{\partial z^*} \\ \gamma_1^* &= \frac{\partial \eta^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \\ \gamma_2^* &= \frac{\partial \zeta^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \xi^*}{\partial z^*} \\ \gamma_3^* &= \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} - \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \end{aligned}\right.$$

en posant:

$$x = x^* + \xi^*, \quad y = y^* + \eta^*, \quad z = z^* + \zeta^*$$

L'hypothèse précédente est indispensable pour que l'on soit en droit de faire usage des formules de la théorie de l'élasticité.

L'état de tension intérieure qui règne en un point x, y, z du fluide est caractérisé comme on le sait par six quantités que l'on désigne ordinairement par

$$p_{xx}, \; p_{yy}, \; p_{zz}$$
$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}.$$

L'état de tension intérieure du fluide étant à l'époque t identique à celui d'un corps fictif parfaitement élastique et isotrope qui aurait éprouvé une déformation caractérisée par les quantités (6), on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= -\lambda\theta^* - 2\mu\varepsilon_1^* \\ p_{yy} &= -\lambda\theta^* - 2\mu\varepsilon_2^* \\ p_{zz} &= -\lambda\theta^* - 2\mu\varepsilon_3^* \\ p_{yz} &= -\mu\gamma_1^* \\ p_{zx} &= -\mu\gamma_2^* \\ p_{xy} &= -\mu\gamma_3^*, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(9)\qquad \theta^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*$$

et en désignant par λ et μ les deux coefficients qui caractérisent les propriétés élastiques du corps fictif. Ces coefficients doivent être regardés comme des fonctions de la température et de la densité du fluide au point et à l'époque auxquels on rapporte les équations (8), mais, à titre de première approximation, il faudra regarder ces quantités comme constantes.

On pourrait nous objecter qu'en écrivant les formules (8), nous avons supposé implicitement que la pression constante p_0 qui règne sur la frontière de la partie de l'univers accessible à nos expériences est nulle et que nous aurions dû remplacer p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} dans ces formules par les différences:

$$p_{xx} - p_o\,, \quad p_{yy} - p_o\,, \quad p_{zz} - p_o$$

Nous estimons qu'il est inutile de compliquer les formules par l'introduction de la constante inconnaissable p_0; il suffit de convenir une fois pour toutes que ce que l'on appelle pression normale à un élément de surface n'est en réalité que l'excès (au sens algébrique) de la pression véritable sur la pression constante qui règne peut-être sur les confins de l'espace accessible à l'expérience humaine. Pour aller plus loin, deux hypothèses nous seront nécessaires.

Hypothèse I. Supposons qu'à partir d'une époque quelconque t tout mouvement ultérieur du fluide par rapport aux axes x, y, z, ainsi que tout changement de distribution des températures dans son sein, aient été supprimés. Nous admettrons qu'il se produirait alors, en chaque point du fluide, un phénomène que nous appellerons „relaxation“ lequel consisterait en ceci: les quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} tendraient, dans ces conditions vers une limite commune p tandis que les quantités p_{yz}, p_{zy} et p_{xy} tendraient vers zéro.

Dans le phénomène de la relaxation tel que nous venons de le définir, la température et la densité du fluide au point (x, y, z) conserveront les valeurs τ et ϱ qu'elles avaient en ce point à l'époque t. Par conséquent la quantité p n'est autre chose que la pression hydrostatique qui, pour le fluide considéré, correspondrait à la température τ et à la densité ϱ. Il résulte de là que les quantités p, ϱ et τ vérifieront une équation de la forme:

$$F(p,\ \varrho,\ \tau) = 0 \tag{10}$$

bien connue dans la théorie classique de la chaleur sous le nom d'équation caractéristique.

Considérons le fluide dans les conditions spécifiées plus haut et désignons par

$$d_2\, p_{xx}\,, \quad d_2\, p_{yy}\,, \quad d_2\, p_{zz}\,, \quad d_2\, p_{yz}\,, \quad d_2\, p_{zx}\,, \quad d_2\, p_{xy}$$

les variations infiniment petites dues à la relaxation qu'éprouvent les quantités

$$p_{xx}\,, \quad p_{yy}\,, \quad p_{zz}\,, \quad p_{yz}\,, \quad p_{zx}\,, \quad p_{xy}$$

pendant l'élément de temps dt' qui s'écoule d'une époque quelconque t', non antérieure à l'époque t, à l'époque $t' + dt'$. Nous pourrons poser:

$$(11) \quad \begin{cases} d_2\, p_{xx} = A_x\, dt'\,, \quad d_2\, p_{yy} = A_y\, dt'\,, \quad d_2\, p_{zz} = A_z\, dt' \\ d_2\, p_{yz} = B_y\, dt'\,, \quad d_2\, p_{zx} = B_y\, dt'\,, \quad d_2\, p_{xy} = B_z\, dt' \end{cases}$$

en désignant par $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ certaines fonctions des paramètres définissant l'état physique du fluide au point x, y, z à l'époque t'.

On peut évidemment prendre pour ces paramètres les quantités:

$$(12) \qquad p_{xx} - p\,, \quad p_{yy} - p\,, \quad p_{zz} - p\,, \quad p_{yz}\,, \quad p_{zx}\,, \quad p_{xy}$$

ainsi que la température τ et la densité ϱ du fluide au point x, y, z à l'époque t. Pendant le phénomène de la relaxation, faisons le remarquer, les quantités τ et ϱ ne varient, par définition, que quand on passe d'une particule du fluide à une autre particule. Supposons que les quantités

$$(13) \qquad A_x\,, \quad A_y\,, \quad A_z\,, \quad B_x\,, \quad B_y\,, \quad B_z$$

soient développables en séries procédant suivant les puissances entières et positives des quantités (12) et supposons de plus que ces quantités soient assez petites pour qu'il soit permis d'arrêter ces séries aux termes du premier degré. Les quantités (13) s'annulent par définition en même temps que les quantités (12). Par conséquent elles se présenteront sous forme de fonctions linéaires et homogènes des quantités (12), fonctions dont les coefficients pourront être des fonctions des quantités ϱ et τ. Nous aurions donc en tout 36 coefficients. En réalité le nombre de ces coefficients se réduit à 2. Cela résulte, comme nous allons le démontrer, de ce qu'un fluide est un corps essentiellement isotrope.

Considérons dans le fluide un tétraèdre infiniment petit $(\mathfrak{T})$, supposons que le centre de gravité G d'une de ses faces soit situé

au point (x, y, z) et désignons par σ l'aire de cette face et par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale (N) à cette face. Nous supposerons que cette normale est élevée en G et qu'elle est dirigée vers l'intérieur du tétraèdre. Cela posé, désignons par $P\sigma$ la projection de la pression qu'exerce sur la face σ le fluide extérieur, sur la normale (N) à la face considérée du tétraèdre $(\overline{\sigma})$, et soit $d_2 P$ la variation infiniment petite qu'éprouve, grâce au phénomène de la relaxation, la quantité P pendant le temps qui s'écoule de l'époque t' à l'époque infiniment voisine $t' + dt'$. Si l'on pose:

$$\varphi(X, Y, Z) = (p_{xx} - p) X^2 + (p_{yy} - p) Y^2 + (p_{zz} - p) Z^2 + \\ + 2 p_{yz} YZ + 2 p_{zx} ZX + 2 p_{xy} XY,$$

$$\psi(X, Y, Z) = A_x X^2 + A_y Y^2 + A_z Z^2 + \\ + 2 B_x YZ + 2 B_y ZX + 2 B_z XY,$$

on aura

$$P - p = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\frac{d_2 P}{dt'} = \psi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Pour aller plus loin, nous allons suivre une méthode géométrique analogue à celle que M. Appell[1]) a indiquée à propos d'une autre question. Portons sur l'axe (N) défini plus haut deux vecteurs GM et GM' définis par les équations

$$GM = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$GM' = \psi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Soient (Σ) et (Σ') les lieux des points M et M' quand l'axe (N) tourne autour du point G. La surface (Σ) représente graphiquement les valeurs de la quantité $P - p$ à l'époque t' pour les différents axes qui passent par le point G, tandis que la surface (Σ') représente celle de la dérivée $\frac{d_2 P}{dt'}$. Un fluide étant un corps isotrope, la surface (Σ) peut être considérée comme définissant complètement l'état physique, déterminé à l'époque t' au point (x, y, z) du fluide, par la marche du phénomène de la relaxation à partir de l'époque t jusqu'à l'époque considérée t'. Il n'en serait pas ainsi s'il s'agissait

[1]) Cours de Mécanique T. III, p. 503 et suivantes. Voir aussi l'article de M. Appell dans les Nouvelles Annales de mathématiques, mai 1902.

d'un corps non isotrope: dans ce cas, pour définir l'état physique du corps au point (x, y, z), il aurait fallu connaître, en dehors de la surface (Σ), l'orientation de cette surface par rapport aux directions remarquables dans le corps considéré au point x, y, z. Puisque la surface (Σ) définit d'une façon complète l'état physique du fluide au point (x, y, z) à l'époque t', les plans de symétrie de cette surface seront des plans de symétrie de l'état physique du fluide au point (x, y, z) à l'époque t'. D'autre part la distribution des valeurs de la quantité $\frac{d_2 P}{dt'}$, à l'époque t', sur les différents axes passant par le point (x, y, z) ne dépend manifestement que de l'état physique du fluide à l'époque t' au point considéré. Par conséquent la surface (Σ'), qui représente graphiquement cette distribution des valeurs de la quantité $\frac{d_2 P}{dt'}$, doit avoir les mêmes plans de symétrie que la surface (Σ). Or si l'on représente par (X, Y, Z) un système d'axes de même sens que le système (x, y, z), mais ayant le point G pour origine, les plans de symétrie des surfaces (Σ) et (Σ') coïncideront respectivement avec les plans de symétrie de la quadrique

$$(Q) \qquad \varphi(X, Y, Z) = 1$$

et de la quadrique

$$(Q') \qquad \psi(X, Y, Z) = 1.$$

Donc les plans de symétrie de ces quadriques coïncident. Rapportons ces quadriques à leurs plans de symétrie et soit alors

$$(14) \qquad s_1 X'^2 + s_2 Y'^2 + s_3 Z'^2 = 1$$

l'équation de la quadrique (Q) et

$$(15) \qquad l_1 X'^2 + l_2 Y'^2 + l_2 Z'^2 = 1.$$

celle de la quadrique (Q').

Désignons par

$$p_{X'X'} - p, \quad p_{Y'Y'} - p, \quad p_{Z'Z'} - p, \quad p_{Y'Z'}, \quad p_{Z'X'}, \quad p_{X'Y'}$$

et par

$$A_{X'}, \quad A_{Y'}, \quad A_{Z'}, \quad B_{X'}, \quad B_{Y'}, \quad B_{Z'}$$

les quantités dont le rôle par rapport au système d'axes (X', Y', Z') est identique à celui des quantités (12) et (13) par rapport au système de coordonnées (x, y, z).

On aura:

$$p_{X'X'} - p = s_1\,, \quad p_{Y'Y'} - p = s_2\,, \quad p_{Z'Z'} - p = s_3$$
$$p_{Y'Z'} = p_{Z'X'} = p_{X'Y'} = 0$$
$$A_{X'} = l_1\,, \quad A_{Y'} = l_2\,, \quad A_{Z'} = l_3$$
$$B_{X'} = B_{Y'} = B_{Z'} = 0\,.$$

Nous aurons donc

$$l_1 = a\,s_1 + b\,s_2 + c\,s_3\,,$$

en désignant par a, b, c certaines fonctions des quantités τ et ϱ. Par raison de symétrie, la quantité l_1 ne doit pas changer quand on permute s_2 et s_3. Donc

$$b = c\,.$$

Posons

$$a - b = -\frac{1}{T} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{3T'}\,.$$

il viendra:

$$l_1 = \frac{s_1}{T} - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'}\,.$$

J'observe maintenant que, à cause de l'isotropie du fluide les valeurs de l_2 et de l_3 doivent se déduire de celle de l_1 par la permutation circulaire des nombres 1, 2, 3 dans les indices

Cela prouve que l'on aura:

$$l_2 = -\frac{s_2}{T} - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'}$$

$$l_3 = -\frac{s_3}{T} - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'}\,.$$

Les quantités l_1, l_2, l_3 ayant les valeurs précédentes, la relation:

$$l_1 X'^2 + l_2 Y'^2 + l_3 Z'^2 + \frac{1}{T}(s_1 X'^2 + s_2 Y'^2 + s_3 Z'^2 +$$
$$+ \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = 0$$

sera une identité. Transformons cette identité en remplaçant les variables X', Y', Z', considérées comme les coordonnées d'un point dans le système (X', Y', Z'), par leurs valeurs en fonction des coordonnées du même point dans le système (X, Y, Z), système dans lequel sont écrites les équations (Q) et (Q'). Il viendra:

$$\varphi(X, Y, Z) + \frac{1}{T} q(X, Y, Z) -$$

$$+ \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3T'} (X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Remarquons que l'on a

$$s_1 + s_2 + s_3 = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} - 3p$$

et posons

$$p_m = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

L'identité précédente nous donnera les relations suivantes:

$$(16) \quad \left| \begin{array}{l} A_x = -\dfrac{p_{xx} - p}{T} - \dfrac{p_m - p}{T'} \\ B_x = -\dfrac{p_{yz}}{T}, \end{array} \right.$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par la permutation circulaire des lettres x, y, z dans les indices. Les valeurs précédentes des quantités A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z, sont certainement les plus générales de toutes celles qui sont compatibles avec le fait qu'un fluide est une substance isotrope; c'est là une conséquence nécessaire de la voie suivie pour les obtenir. On peut en revanche se demander si les formules en question ne sont pas trop générales. Pour s'assurer qu'il n'en est pas ainsi, il suffit de vérifier qu'elles conservent leurs formes sans aucun changement quand on passe du système de coordonnées (x, y, z) à un autre système quelconque de coordonnées rectangulaires.

Continuons à nous placer dans les conditions spécifiées dans l'énoncé de l'hypothèse qui nous a fait introduire la notion de relaxation et cherchons les valeurs des quantités (12) au point (x, y, z) à une époque quelconque t' postérieure à l'époque t. A cet effet désignons, pour abréger l'écriture, par p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, les valeurs des quantités p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} à l'époque t au point (x, y, z), et par p'_1, p'_2, p'_3, q'_1, q'_2, q'_3, les valeurs des mêmes fonctions, au même point à l'époque t'. Posons en outre:

$$(17) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{T_1} = \dfrac{1}{T} + \dfrac{1}{T'} \\ \Pi = \dfrac{p_1 + p_1 + p_3}{3} \end{array} \right.$$

Les équations (11) et (16) nous donneront aisément les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} p_i' - p &= \Pi e^{-\frac{t'-t}{T_1}} + (p_i - \Pi) e^{-\frac{t-t}{T}} \\ q_i' &= q_i e^{-\frac{t'-t}{T}} \end{aligned} \quad (i = 1,\ 2,\ 3)\,. \right\} \tag{18}$$

Ces relations nous apprennent que l'hypothèse de la relaxation exige que l'on ait:

$$\left.\begin{aligned} T &> 0 \\ T_1 &> 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Il est aisé de déduire des équations (18) la signification physique des quantités T et T_1: la quantité T détermine la manière dont les efforts tranchants tendent vers zéro; c'est ce qui résulte des trois dernières équations du système considéré; pour déterminer la signification physique de la quantité T_1 il suffit d'ajouter membre à membre les trois premières équations du système précédent; on trouve:

$$\Pi' - p = \Pi e^{-\frac{t'-t}{T_1}}, \tag{20}$$

en posant

$$\Pi' = \frac{p_1' + p_2' + p_3'}{3}\,.$$

Cela prouve que la quantité T_1 détermine la manière dont la pression normale moyenne tend vers sa limite p. D'ailleurs les dimensions des quantités T et T_1 sont celles d'un espace de temps; on pourrait donc appeler: T le temps de relaxation de la rigidité et T_1 celui de relaxation de la pression normale moyenne.

Nous avons fait remarquer dès le début des considérations sur la relaxation, que les coefficients des fonctions linéaires et homogènes qui font connaître les expressions des quantités (13) en fonction des quantités (12) doivent être considérés comme des fonctions de la température τ et de la densité ϱ qu'a le fluide à l'époque t au point $(x.\ y,\ z)$, fonctions qui ne dépendront d'ailleurs que de la nature du fluide considéré. Par conséquent les quantités T et T' (ou si l'on veut T et T_1) doivent être regardées comme des fonctions des variables ϱ et τ. Il est à peine utile d'ajouter que, dans

les premières applications de la théorie de la relaxation à l'étude d'un fluide déterminé, il faudra se placer dans des conditions où τ et ϱ varient assez peu pour qu'il soit possible, dans une première approximation, de regarder les quantités T et T' comme constantes.

Dans la suite de ce travail nous n'aurons à considérer les valeurs des premiers membres des équations (11) que pour le temps infiniment court dt qui s'écoule de l'époque t, à partir de laquelle le fluide est supposé être placé dans les conditions spécifiées plus haut, à l'époque $t + dt$. Les formules qui nous seront nécessaires se déduisent immédiatement des relations (11) et (16); les voici:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} d_2\, p_{xx} &= -\left(\frac{p_{xx} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'}\right) dt \\ d_2\, p_{yy} &= -\left(\frac{p_{yy} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'}\right) dt \\ d_2\, p_{zz} &= -\left(\frac{p_{zz} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'}\right) dt \\ d_2\, p_{yz} = -\frac{p_{yz}}{T}\, dt\,; \quad d_2\, p_{zx} &= -\frac{p_{zx}}{T}\, dt\,; \quad d_2\, p_{xy} = -\frac{p_{xy}}{T}\, dt \end{aligned}\right.$$

où, rappelons-le, p_m représente la moyenne arithmétique des quantités p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}.

Telles sont les formules les plus générales qui résultent, comme première approximation, de l'hypothèse de la relaxation.

Pour énoncer la deuxième hypothèse, il est nécessaire de définir préalablement certains nouveaux éléments. Supposons que le fluide jouisse pendant le temps qui s'écoule de l'époque t à l'époque $t + dt$ et en conservant le mouvement réel qu'il a dans cet intervalle de temps, des propriétés élastiques du corps fictif dont l'état de tension intérieure serait identique à celui qui règne dans le sein du fluide à l'époque t. Cela posé convenons d'indiquer par le symbole d_1, placé devant celui qui représente un élément quelconque relatif au fluide, la variation qu'éprouverait dans ces conditions l'élément considéré. Proposons-nous ensuite de calculer les quantités

$$d_1\, \varepsilon_i^* \quad \text{et} \quad d_1\, \gamma_i^* \; (i = 1, 2, 3).$$

A cet effet désignons par x, y, z les coordonnées d'une particule du fluide à l'époque t et représentons par $x + \xi'$, $y + \eta'$, $z + \zeta'$ les coordonnées de la même particule à une époque quelconque t' postérieure

à l'époque t. L'époque t restant fixe, ξ', η', ζ' seront évidemment des fonctions des quatre variables x, y, z et t'. J'admets que, pour des valeurs de t' assez voisines de t, les dérivées partielles du premier ordre des quantités $\frac{\partial \xi'}{\partial t'}$, $\frac{\partial \eta'}{\partial t'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial t'}$ par rapport aux variables x, y, et z soient des fonctions finies et continues des quatre variables x, y, z et t'. Quelle sera la valeur de $\frac{\partial \xi'}{\partial x}$ à l'époque $t' = t + dt$? Pour $t' = t$ on a $\frac{\partial \xi'}{\partial x} = 0$ puisque ξ s'annule par définition pour $t' = t$. Donc, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, la valeur de $\frac{\partial \xi'}{\partial x}$ pour $t' = t + dt$ sera égale à $\left(\frac{\partial^2 \xi'}{\partial x \partial t'}\right)_{t'=t} dt$. Désignons par u, v, w les projections orthogonales sur les axes, de la vitesse de la particule du fluide qui, à l'époque t, se trouve au point x, y, z. Le résultat obtenu peut être exprimé au moyen de l'égalité suivante:

$$\left(\frac{\partial \xi'}{\partial x}\right)_{t'=t+dt} = \frac{\partial u}{\partial x} dt \tag{22}$$

puisque

$$\left(\frac{\partial \xi'}{\partial t'}\right)_{t'=t} = u.$$

On établira de la même manière les égalités suivantes:

$$\left(\frac{\partial \xi'}{\partial y}\right)_{t'=t+dt} = \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \xi'}{\partial z}\right)_{t'=t+dt} = \frac{\partial u}{\partial z} dt$$

ainsi que celles qui se déduiraient des égalités précédentes et de l'égalité (22) en remplaçant ξ' et u une première fois par η' et v et une deuxième fois par ζ' et w. Cela posé on verra aisément, en se reportant au Nr. 2, que les composantes de la déformation géométrique éprouvée par le fluide pendant le temps qui s'écoule de l'époque t à l'époque $t + dt$ auront les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll} a_1\, dt, & a_2\, dt, & a_3\, dt \\ c_1\, dt, & c_2\, dt, & c_3\, dt, \end{array}\right\} \tag{23}$$

en posant, pour abréger:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_3 = \frac{\partial w}{\partial y} \\ c_1 &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ c_2 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ c_3 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right.$$

A l'époque t, les composantes de la déformation élastique du fluide ont les valeurs (6). De l'époque t à l'époque $t + dt$, le fluide éprouve une déformation géométrique dont les composantes ont les valeurs (23). Enfin de l'époque t à l'époque $t + dt$, le fluide se comporte, par hypothèse, comme se comporterait le corps fictif parfaitement élastique que nous avons à considérer en vertu de l'hypothèse fondamentale relative à la nature des phénomènes dus à la viscosité. Il résulte de tout cela et de ce qui a été rappelé à la fin du Nr. 2 au sujet de la composition de deux déformations successives que les composantes de la déformation élastique du fluide à l'époque $t + dt$ auraient, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, approximativement les valeurs suivantes:

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon_1^* + a_1\,dt, \quad \varepsilon_2^* + a_2\,dt, \quad \varepsilon_3^* + a_3\,dt \\ &\gamma_1^* + c_1\,dt, \quad \gamma_2^* + c_2\,dt, \quad \gamma_3^* + c_3\,dt. \end{aligned}\right.$$

J'ai dit que les expressions précédentes représentent des valeurs approchées des éléments que nous voulions calculer. En effet les formules (25) se déduisent des formules exactes, on le vérifierait aisément, en négligeant les produits des dérivées qui figurent dans le second membre des équations (7) par les quantités (23). Par conséquent les différences entre les valeurs (25) et les valeurs exactes des éléments demandés sont des infiniment petits de l'ordre même de dt. D'ailleurs les coefficients de dt dans ces différences seront petits par rapport aux coefficients

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$$

de cette différentielle dans les formules (25) et c'est pour cela que les expressions (25) peuvent être regardées comme les valeurs approchées des quantités demandées. Il résulte de tout ce qui précède que l'on a approximativement:

$$d_1\,\varepsilon_i^* = a_i\,dt \quad \text{et} \quad d_1\,\gamma_i^* = c_i\,dt. \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

on aura donc, en vertu des formules (8):

$$\left.\begin{aligned} d_1 p_{xx} &= -\{\lambda\tilde{\omega} + 2\mu a_1\}\,dt \\ d_1 p_{yy} &= -\{\lambda\tilde{\omega} + 2\mu a_2\}\,dt \\ d_1 p_{zz} &= -\{\lambda\tilde{\omega} + 2\mu a_3\}\,dt \\ d_1 p_{yz} &= -\mu c_1\,dt \\ d_1 p_{zx} &= -\mu c_2\,dt \\ d_1 p_{xy} &= -\mu c_3\,dt \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

en posant

$$\tilde{\omega} = a_1 + a_2 + a_3\,. \tag{27}$$

Voici maintenant la deuxième hypothèse que nous allons admettre:

Hypothèse II. Considérons une particule quelconque du fluide et convenons d'indiquer par le symbole d la variation qu'éprouve réellement une quantité quelconque relative à cette particule dans le temps qui s'écoule de l'époque t à l'époque $t+dt$. Nous admettrons que l'on a les relations suivantes:

$$d\,p_{xx} = d_1\,p_{xx} + d_2\,p_{xx}$$
$$d\,p_{yz} = d_1\,p_{yz} + d_2\,p_{yz}$$

ainsi que toutes celles qui s'en déduisent par la permutation circulaire des lettres x, y, z.

Si l'on désigne comme plus haut par u, v, w les projections orthogonales sur les axes, de la vitesse de la particule du fluide qui, à l'époque t, a x, y, z pour coordonnées, les formules (21) et (26) et l'hypothèse que nous venons d'énoncer nous donneront les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v\frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w\frac{\partial p_{xx}}{\partial z} &= -\lambda\tilde{\omega} - 2\mu a_1 - \frac{p_{xx}-p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ \frac{\partial p_{yy}}{\partial t} + u\frac{\partial p_{yy}}{\partial x} + v\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + w\frac{\partial p_{yy}}{\partial z} &= -\lambda\tilde{\omega} - 2\mu a_2 - \frac{p_{yy}-p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} + u\frac{\partial p_{zz}}{\partial x} + v\frac{\partial p_{zz}}{\partial y} + w\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= -\lambda\tilde{\omega} - 2\mu a_3 - \frac{p_{zz}-p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\ \frac{\partial p_{yz}}{dt} + u\frac{\partial p_{yz}}{\partial x} + v\frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + w\frac{\partial p_{yz}}{\partial z} &= -\mu c_1 - \frac{p_{yz}}{T} \\ \frac{\partial p_{zx}}{\partial t} + u\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + v\frac{\partial p_{zx}}{\partial y} + w\frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= -\mu c_2 - \frac{p_{zx}}{T} \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial t} + u\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + v\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + w\frac{\partial p_{xy}}{\partial z} &= -\mu c_3 - \frac{p_{xy}}{T}\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Les équations précédentes, rappelons-le, ne peuvent être considérées que comme l'expressien approchée des hypothèses que nous avons faites parce que les formules (26) ne sont, comme nous l'avons vu, que des formules approximativement exactes.

Pour obtenir le système complet des équations de l'hydrodynamique, il suffit de joindre aux équations (28):

1°. Les équations fournies par le principe de d'Alembert à savoir:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right\} &= \varrho X-\left\{\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right\} \\ \varrho\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right\} &= \varrho Y-\left\{\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}\right\} \\ \varrho\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right\} &= \varrho Z-\left\{\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}\right\} \end{aligned}\right.$$

où l'on a désigné par ϱ, comme plus haut, la densité du fluide et par X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la force extérieure, rapportée à l'unité de masse, sollicitant le fluide.

2°. L'équation de continuité:

$$(30)\qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=0\,.$$

3°. L'équation (10) laquelle fait connaître la relation qui existe entre la quantité p, la densité ϱ du fluide et la température τ:

4°. Les équations tirées de la thermodynamique et de la théorie de la conductibilité calorifique.

Il faudra, bien entendu, tenir compte en outre des conditions aux limites qui caractériseront le problème particulier auquel on voudra appliquer les équations précédentes.

Nr. 4. Passons à l'examen des cas-limites les plus intéressants des équations établies au numéro précédent. Par quelles équations devra-t-on remplacer les équations (8) et (28) quand on voudra considérer un fluide incompressible? Les équations demandées sont les équations-limites des équations précédentes pour $\lambda=\infty$. Faisons croître λ indéfiniment et supposons, comme cela est indispensable pour arriver à un résultat ayant un sens, que les expressions

$$\lambda\,\Theta^* \quad \text{et} \quad \lambda\,\tilde{\omega}$$

tendent vers des limites finies. Voyons d'abord ce que deviennent les équations (8). Il est évident que l'expression Θ^* aura zéro pour

limite. Par conséquent si l'on désigne par $-p_m$ la limite du produit $\lambda\Theta^*$, les équations (8) devront être remplacées par les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= p_m - 2\mu\,\varepsilon_1^* \\
p_{yy} &= p_m - 2\mu\,\varepsilon_2^* \\
p_{zz} &= p_m - 2\mu\,\varepsilon_3^* \\
p_{yz} &= -\mu\,\gamma_1^* \\
p_{zx} &= -\mu\,\gamma_2^* \\
p_{xy} &= -\mu\,\gamma_3^* \\
\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* &+ \varepsilon_3^* = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

La signification de la quantité p_m est immédiate: p_m représente, comme d'ailleurs plus haut, évidemment la moyenne arithmétique des trois quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz}. Considérons maintenant les équations (28). Les trois dernières équations de ce système conserveront leur forme sans aucun changement. Voyons ce que deviennent les trois premières. Observons à cet effet que la première d'entre elles peut s'écrire ainsi:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v\frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w\frac{\partial p_{xx}}{\partial z}$$

$$= -2\mu a_1 - \frac{p_m - p + \dfrac{\lambda TT'\tilde{\omega}}{T-T'}}{T}$$

$$- \frac{p_m - p + \dfrac{\lambda TT'\tilde{\omega}}{T+T'}}{T'}\,.$$

Lorsque λ croît indéfiniment, l'expression

$$p - \frac{\lambda TT'\tilde{\omega}}{T+T'}$$

tendra vers une certaine limite p', puisque $\lambda\tilde{\omega}$ tend par hypothèse vers une limite déterminée. La quantité p' devra évidemment être regardée comme une certaine fonction des quatre variables x, y, z, t, fonction qui sera l'une des inconnues du problème de la détermination du mouvement d'un fluide incompressible. D'après cela l'équation qui nous occupe prendra, à la limite, la forme suivante:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial t} - u\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - v\frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w\frac{\partial p_{xx}}{\partial z} =$$

$$(32) \qquad = -2\mu a_1 - \frac{p_{xx} - p'}{T} - \frac{p_m - p'}{T'} .$$

Par conséquent, dans le cas d'un fluide incompressible, les trois premières équations du système (28) devront être remplacées par l'équation (32) et par les deux équations analogues relatives à p_{yy} et à p_{zz}; quant aux trois dernières équations du système (28), elles resteront comme nous l'avons dit sans aucun changement. L'équation de continuité prendra évidemment la forme suivante:

$$(33) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

On vérifiera aisément l'intéressante remarque que voici: dans le cas d'un fluide incompressible et lorsqu'il est possible de regarder les quantités T et T' comme des constantes indépendantes de la température, les dix inconnues

$$u,\ v,\ w,\ p_{xx},\ p_{yy},\ p_{zz},\ p_{yz},\ p_{zx},\ p_{xy} \text{ et } p'$$

pourront être déterminées au moyen du système formé par: les six équations par lesquelles le système (28) doit être remplacé ici, les trois équations du système (29) et l'équation (33).

Voyons maintenant à quelles équations-limites on arrive en faisant tendre T vers zéro. Les produits $T\lambda$ et $T\mu$ pourront tendre alors vers les limites finies λ_0 et μ_0 non nécessairement nulles; si l'on suppose encore que le rapport $\frac{T}{T'}$ tende vers zéro [1]), les équations (28) devront être remplacées par les équations suivantes:

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{xx} - p &= -\lambda_0\,\tilde{\omega} - 2\mu_0 a_1 \\ p_{yy} - p &= -\lambda_0\,\tilde{\omega} - 2\mu_0 a_2 \\ p_{zz} - p &= -\lambda_0\,\tilde{\omega} - 2\mu_0 a_3 \\ p_{yz} &= -\mu_0 c_1 \\ p_{zx} &= -\mu_0 c_2 \\ p_{xy} &= -\mu_0 c_3 . \end{aligned} \right.$$

[1]) Nous faisons cette hypothèse pour simplifier, mais, si nous avions supposé que le rapport $\frac{T}{T'}$ tendit vers une limite non nulle, nous serions arrivé à un résultat qui, au fond, serait le même.

Sans examiner ce que deviennent à la limite les équations (8), chose qui d'ailleurs n'offrirait aucune difficulté, on voit que l'on retombe sur la théorie classique de la viscosité. C'est ce qui permet de regarder la théorie de la viscosité exposée dans ce travail comme une généralisation de la théorie classique.

Examinons enfin le cas-limite

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} = 0 .$$

Remplaçons, pour abréger l'écriture, le symbole

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

par le symbole plus simple

$$\frac{d}{dt} .$$

Les équations (28) donneront:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dt} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_1 \\ \frac{dp_{yy}}{dt} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_2 \\ \frac{dp_{zz}}{dt} &= -\lambda \tilde{\omega} - 2\mu a_3 \\ \frac{dp_{yz}}{dt} = -\mu c_1 ; \quad \frac{dp_{zx}}{dt} &= -\mu c_2 ; \quad \frac{dp_{xy}}{dt} = -\mu c_3 . \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Ces équations sont celles que l'on déduit par la différentiation par rapport au temps des équations classiques de la théorie de l'élasticité d'un corps isotrope. En effet: désignons par a, b, c les coordonnées d'un élément matériel d'un corps isotrope parfaitement élastique lorsque ce corps se trouve à l'état de l'équilibre naturel en l'absence de tout espèce de forces extérieures et soient

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \xi \\ y &= b + \eta \\ z &= c + \zeta \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

les coordonnées du même élément matériel à l'époque t lorsque le corps est déformé. Nous avons:

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_1 \\ p_{yy} &= -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_2 \\ p_{zz} &= -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_3 \\ p_{yz} &= -\mu\gamma_1 \\ p_{zx} &= -\mu\gamma_2 \\ p_{xy} &= -\mu\gamma_3 \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial\xi}{\partial a},\quad \varepsilon_2 = \frac{\partial\eta}{\partial b},\quad \varepsilon_3 = \frac{\partial\zeta}{\partial c}$$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c}$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}$$

Nous supposerons naturellement que les termes de degré supérieur au premier par rapport aux quantités $\frac{\partial\xi}{\partial a}, \frac{\partial\xi}{\partial b}, \frac{\partial\xi}{\partial c}$ et aux quantités qui s'en déduisent en remplaçant successivement ξ par η et ζ, ainsi que par rapport aux dérivées de ces quantités, sont négligeables; c'est en effet l'hypothèse fondamentale de la théorie classique de l'élasticité. Il est aisé de voir que, pour montrer que le système (35) peut être regardé comme le résultat de la dérivation par rapport au temps du système (37), il suffit de montrer que les dérivées partielles du premier ordre des quantités

$$(38)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t},\ \frac{\partial\eta}{\partial t},\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

par rapport aux variables a, b, c peuvent, dans les limites du degré d'approximation adopté dans la théorie de l'élasticité, être confondues avec celles des quantités

$$(39)\qquad u,\ v,\ w$$

par rapport aux variables x, y, z. Les quantités (38) ne diffèrent des quantités (39) que parce qu'elles sont exprimées en fonction

des variables a, b, c et t au lieu de l'être en fonction des variables x, y, z, t. Par conséquent si l'on résout les équations (36) par rapport aux variables a, b, c et si l'on porte les valeurs trouvées dans les expressions (38), celles-ci se confondront avec les expressions (39). D'après cela on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial a \, \partial t} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial b \, \partial t} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial c \, \partial t} \frac{\partial c}{\partial x}. \tag{40}$$

On s'assurera aisément en calculant les dérivées $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial x}$ au moyen des équations (36) qu'avec le degré d'approximation adopté, l'équation (40) est équivalente à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial a \, \partial t}.$$

On établirait de la même manière les autres relations qui existent entre les dérivées du premier ordre des quantités (38) et (39). La proposition que nous avions en vue est donc établie.

La comparaison des équations (8) aux équations (37) donne:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^* &= \varepsilon_i \\ \gamma_i^* &= \gamma_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Autrement dit la déformation du corps fictif est ici identique à la déformation géométrique du corps considéré. En résumé le cas-limite

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} = 0$$

est celui où le fluide se transforme en un corps isotrope parfaitement élastique. C'est ce que nous voulions mettre nettement en évidence et c'est ce qu'il était d'ailleurs aisé de prévoir a priori.

III. Analyse du développement théorique donné par M. Natanson à l'hypothèse que nous avons étudiée au chapitre précédent.

Nr. 5. M. Natanson expose sa théorie, comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, dans son mémoire „Sur les lois de la viscosité“ [1]). Sans revenir sur les équations définitives proposées par

[1]) Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

M. Natanson nous allons examiner celles dont il les déduit en négligeant des termes qu'il n'était pas permis de négliger. Les équations que nous avons en vue sont les équations (1 a), (1 b), (1 c), (2 a), (2 b), (2 c) du § 8 de son mémoire. On les obtiendrait, à une légère différence de notation près, en posant

$$\frac{1}{T'} = 0. \tag{1}$$

dans les équations (28) du chapitre précédent. Il est évident qu'au point de vue de la physique, rien ne justifie l'hypothèse exprimée par l'égalité (1). Par conséquent les équations de M. Natanson ne peuvent pas être regardées comme l'expression adéquate de l'hypothèse fondamentale d'où il est parti. Voyons par quelle voie M. Natanson arrive à ses équations. Il les obtient en combinant par voie d'addition les équations (1 a), (1 b), (1 c), (2 a), (2 b), (2 c), du § 3 avec les équations (2 a), (2 b), (2 c), (3 a), (3 b), (3 c) du § 4. Ces deux systèmes d'équations correspondent vaguement aux équations (26) et (21) du chapitre précédent. mais il est impossible, en s'appuyant sur le texte de M. Natanson, d'associer une idée précise à aucun de ces deux systèmes d'équations: les équations du § 3, celles qui correspondraient aux équations (26) du chapitre précédent contiennent les symboles

$$\left(\frac{dp_{xx}}{dt}\right)_1, \quad \left(\frac{dp_{yz}}{dt}\right)_1 \quad \text{etc.}$$

dont la signification reste obscure pour le lecteur; il en est ainsi parce que M. Natanson présente ces équations sans avoir préalablement introduit la notion de ce que nous avons appelé „déformation élastique du fluide“ et qu'il ne fait intervenir que plus tard, sous le nom de déformation véritable, sans d'ailleurs la préciser et sans lui avoir fait jouer un rôle quelconque dans la déduction des équations (1) et (2) du § 8. Quant aux équations du § 4 lesquelles correspondraient aux équations (21) du chapitre précédent, M. Natansou les écrit à titre de relations hypothétiques sans expliquer clairement ce qu'il entend représenter par les symboles:

$$\left(\frac{dp_{xx}}{dt}\right)_2, \quad \left(\frac{dp_{yz}}{dt}\right)_2 \quad \text{etc.}$$

Cette manière peu méthodique d'introduire les équations en question a eu pour conséquences: 1° que les équations du § 8 n'ont

pas la généralité qu'elles devraient avoir, 2° que M. Natanson ne s'est pas aperçu que la quantité qu'il désigne, comme nous même d'ailleurs, par p n'est autre chose qu'un élément bien connu dans la théorie classique de la chaleur, élément qui vérifie l'équation (10) du chapitre précédent; n'ayant pas reconnu la véritable nature de la quantité p, M. Natanson développe au sujet de cette quantité, dans le § 5 de son mémoire, des considérations que rien ne justifie.

Faisons encore remarquer, en terminant cette analyse, que M. Natanson regarde les quantités

$$\varepsilon, \varphi, \psi, \alpha, \beta, \gamma$$

lesquelles représentent, dans son mémoire ce qu'au chapitre précédent, nous avons appelé „composantes de la déformation géométrique", comme définies au moyen des formules (1) du § 1. Il commet là une erreur parce que les formules (1) ne seraient applicables, à titre de formules approchées, que dans le cas, où les dérivées du premier ordre des quantités ξ, η, ζ par rapport aux variables x, y, z seraient très petites. Or cette hypothèse est évidemment inadmissible.

En résumé M. Natanson s'est proposé un problème intéressant, mais il ne lui a pas été donné de le résoudre d'une façon satisfaisante.

---

29. M. ST. ZAREMBA m. c. **O podwójnem załamaniu w cieczach odkształconych i wywodach prof. Natansona, odnoszących się do tej kwestyi.** ***(Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène).***

I. Introduction.

Il est possible de rendre compte des phénomènes dus à la viscosité des fluides en admettant que l'état de tension intérieure d'un fluide en mouvement soit, à chaque instant, assimilable à celui d'un corps fictif parfaitement élastique et isotrope, lequel aurait éprouvé une certaine déformation et que l'on substituerait par la pensée, à l'instant considéré, au fluide réel. C'est l'hypothèse que M. Natanson, qui en attribue d'ailleurs la première idée à Poisson et Maxwell, a tenté de développer dans son mémoire „Sur les lois

de la viscosité“ [1]). Adoptons avec M. Natanson l'hypothèse précédente et admettons avec lui que la théorie de M. E. F. Neumann de la double réfraction accidentelle dans les solides déformés soit applicable à ce corps fictif que, par la pensée, nous substituons à chaque instant au liquide réel.

Il sera possible alors de soumettre à une étude théorique le phénomène de la double réfraction accidentelle dans les liquides [2]). C'est précisément ce que se propose de faire M. Natanson dans son mémoire „Sur la double réfraction accidentelle dans les liquiques“ (Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901).

Voici le problème que l'on a à résoudre quand on se propose d'appliquer les vues théoriques précédentes à un cas de double réfraction accidentelle dans un liquide: déterminer l'état de déformation qu'il faut, à chaque instant, attribuer à ce corps fictif dont nous avons parlé plus haut pour que l'état de tension intérieure du corps fictif soit constamment identique à celui qui règne réellement dans le sein du liquide. M. Natanson envisage le cas d'un liquide placé entre deux cylindres de révolution de même axe; le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur tourne avec une vitesse angulaire constante; chaque particule du liquide se déplace sur un cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe des cylindres et ayant son centre sur cet axe; enfin la vitesse angulaire d'une particule ne dépend que du rayon du cercle qu'elle décrit. M. Natanson ne précise pas d'une façon plus explicite les conditions dans lesquelles il se place mais, en réalité, il suppose que le liquide remplit tout l'espace indéfini limité par les deux cylindres et il admet que les forces extérieures sollicitant le liquide se réduisent à l'effet des parois cylindriques qui le contiennent. Nous ne discuterons pas dans quelle mesure les conditions théoriques précédentes peuvent être identifiées avec celles des expériences auxquelles M. Natanson applique les résultats de sa théorie. Bornons-nous à dire que ce qui détermine la différence la plus essentielle qui existe entre les conditions théoriques et celles des expériences, c'est sans

[1]) Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

[2]) On trouvera un exposé très complet de l'état actuel du problème de la double réfraction accidentelle dans les liquides dans une communication faite par M. de Metz au XIe Congrès des naturalistes et des médecins russes tenu à St. Pétersbourg en 1901.

aucun doute ce qui se passe à la base de la colonne liquide verticale qui fait l'objet des expériences. Nous estimons cependant que, pour une colonne liquide assez haute les conditions théoriques énoncées plus haut peuvent être considérées comme réalisées approximativement. Malheureusement les calculs de M. Natanson reposent sur des équations qui, ainsi que je l'ai montré ailleurs [1]), sont incompatibles avec un des principes fondamentaux de la mécanique; ils constituent d'ailleurs une application incorrecte de ces équations erronées et le résultat définitif auquel ils conduisent est naturellement inexact. Nous expliquerons tout cela d'une façon détaillée après avoir exposé la solution correcte du problème d'hydrodynamique auquel la question se ramène.

II. Intégration des équations du problème et comparaison du résultat de la théorie rigoureuse à celui que trouve M. Natanson.

Nr. 2. Il est évident que, sans commettre d'erreur appréciable, il serait permis d'admettre l'incompressibilité du liquide ainsi que la constance de la température dans toute l'étendue de sa masse; on reconnaîtra même aisément que, si l'on tenait compte de la compressibilité du liquide et de ce que la température peut varier quand on passe d'une couche cylindrique infiniment mince, parallèle aux cylindres limitant la masse liquide, à une autre couche semblable, on n'augmenterait pas les chances d'obtenir une solution bien adaptée aux conditions des expériences réelles. Cependant nous n'admettrons ni l'incompressibilité du liquide, ni la constance de la température; nous supposerons seulement que la température en un point du liquide ne dépend que de la distance de ce point à l'axe commun des parois cylindriques. Cela nous permettra de mettre en évidence ce fait curieux, que diverses circonstances relatives au mouvement du liquide peuvent être déterminées complètement, dans ce problème particulier [2]), sans rien connaître des relations qui existent entre la densité, la température et les pressions; c'est même pré-

[1]) Zaremba. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903; voir aussi mon mémoire „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité". Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903.

[2]) Je suppose bien entendu que l'on adopte les hypothèses sur lesquelles reposent les équations générales de l'hydrodynamique qui vont nous servir de point de départ.

cisément ce qui se produit pour l'élément dont dépendrait, suivant M. Natanson, le phénomène de la double réfraction.

Pour plus de clarté rappelons, sous leur forme générale, les équations qui vont nous servir de point de départ et dont on trouvera la déduction dans notre mémoire „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité" (Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903).

Désignons par:

t — le temps

u, v, w — les composantes parallèles aux axes de la vitesse de la particule du liquide qui, à l'époque t a x, y, z pour coordonnées

p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} — les six quantités bien connues qui caractérisent les pressions qui, à l'époque t, règnent en un point x, y, z du liquide.

p_m — la moyenne arithmétique des trois quantités p_{xx}, p_{yy}, et p_{zz}.

p — la limite commune vers laquelle tendraient les quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} si, à partir de l'époque t, tout mouvement ultérieur du liquide par rapport aux axes et tout changement de distribution des températures étaient brusquement suspendus.

X, Y, Z — les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse sollicitant la particule du liquide qui, à l'époque t, se trouve au point x, y, z.

λ, μ, T et T' — des quantités qu'à titre de première approximation, nous regardons comme des constantes physiques du liquide, mais qui en réalité sont des fonctions de la température et de la densité, fonctions dont la forme dépend uniquement de la nature du liquide.

a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3 et $\tilde{\omega}$ — les quantités définies par les équations suivantes:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ c_1 &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ c_2 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ c_3 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \tilde{\omega} &= a_1 + a_2 + a_3 . \end{aligned}\right.$$

Les équations que nous voulions rappeler seront alors les suivantes:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{xx}}{\partial t}+u\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial p_{xx}}{\partial y}+w\frac{\partial p_{xx}}{\partial z}=-\lambda\tilde{\omega}-2\mu a_1-\frac{p_{xx}-p}{T}-\frac{p_m-p}{T'}\\
&\frac{\partial p_{yy}}{\partial t}+u\frac{\partial p_{yy}}{\partial x}+v\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial p_{yy}}{\partial z}=-\lambda\tilde{\omega}-2\mu a_2-\frac{p_{yy}-p}{T}-\frac{p_m-p}{T'}\\
&\frac{\partial p_{zz}}{\partial t}+u\frac{\partial p_{zz}}{\partial x}+v\frac{\partial p_{zz}}{\partial y}+w\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}=-\lambda\tilde{\omega}-2\mu a_3-\frac{p_{zz}-p}{T}-\frac{p_m-p}{T'}\\
&\frac{\partial p_{yz}}{\partial t}+u\frac{\partial p_{yz}}{\partial x}+v\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+w\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}=-\mu c_1-\frac{p_{yz}}{T}\\
&\frac{\partial p_{zx}}{\partial t}+u\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+v\frac{\partial p_{zx}}{\partial y}+w\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}=-\mu c_2-\frac{p_{zx}}{T}\\
&\frac{\partial p_{xy}}{\partial t}+u\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+v\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+w\frac{\partial p_{xy}}{\partial z}=-\mu c_3-\frac{p_{xy}}{T}\\
&\varrho\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\varrho X-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\\
&\varrho\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right\}=\varrho Y-\left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}\right)\\
&\varrho\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right\}=\varrho Z-\left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial \varrho u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v}{\partial y}+\frac{\partial \varrho w}{\partial z}=0\,.
\end{aligned}
\right\}\quad(2)
$$

Rappelons maintenant comment, après avoir intégré les équations précédentes, on peut déterminer l'état de déformation dans lequel on doit concevoir le corps fictif pour que, à chaque instant, la distribution des pressions intérieures dans le corps fictif représente la distribution des pressions réelles dans le sein du liquide à l'instant considéré.

Envisageons dans le corps fictif deux particules B et C infiniment voisines d'une troisième particule A. Désignons par A_0, B_0, C_0 les positions des particules A, B, C avant la déformation et par A_1, B_1, C_1 leurs positions après la déformation. Si l'on désigne par α, β, γ les cosinus directeurs du vecteur B_0, C_0, on aura:

$$
\begin{aligned}
\frac{B_1C_1^2}{B_0C_0^2}=&(1+2\varepsilon_1^*)\alpha^2+(1+2\varepsilon_2^*)\beta^2+(1+2\varepsilon_3^*)\gamma^2\\
&+2\gamma_1^*\beta\gamma+2\gamma_2^*\gamma\alpha+2\gamma_3^*\alpha\beta
\end{aligned}
$$

où

$$(3) \qquad \varepsilon_1^*, \ \varepsilon_2^*, \ \varepsilon_3^*, \ \gamma_1^*, \ \gamma_2^*, \ \gamma_3^*,$$

représentent certaines quantités qui définissent la déformation du corps fictif et que nous appellerons „composantes de la déformation du corps fictif". Cela posé, voici ce que nous avons établi dans le mémoire cité au début de ce numéro: si l'on se représente le corps fictif comme se confondant à chaque instant, dans son état de déformation instantanée, avec le liquide, les quantités (3) pourront être calculées au moyen des équations suivantes:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = -\lambda\Theta^* - 2\mu\varepsilon_1^* \\ p_{yy} = -\lambda\Theta^* - 2\mu\varepsilon_2^* \\ p_{zz} = -\lambda\Theta^* - 2\mu\varepsilon_3^* \\ p_{yz} = -\lambda\gamma_1^*; \quad p_{zx} = -\lambda\gamma_2^*; \quad p_{xy} = -\lambda\gamma_3^*; \\ \Theta^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* \end{array} \right.$$

où λ et μ représentent les mêmes constantes que dans les équations (2).

Nr. 3. Passons maintenant au problème même que nous nous proposons de résoudre. Prenons à cet effet pour axe des z, l'axe commun des deux cylindres et pour plan des x, y, un plan quelconque perpendiculaire à cet axe. En vertu des conditions dans lesquelles nous nous sommes placés, les différentes quantités qui entrent dans les équations du numéro précédent ne dépendent que des deux variables x et y. On aura en outre

$$w = 0$$

et, de plus, la dernière équation du système (2) ainsi que l'équation

$$(5) \qquad \tilde{\omega} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

seront vérifiées identiquement, quelle que soit la forme de l'équation liant la densité ϱ du liquide à la quantité p et à la température τ. Il est très aisé de se rendre compte de la justesse des deux dernières remarques: $\tilde{\omega}$ représente la vitesse de dilatation rapportée à l'unité de volume d'une portion infiniment petite du liquide, cette quantité sera donc nulle identiquement en vertu de l'hypothèse faite sur la nature du mouvement considéré; d'autre part, la dernière équation du système (2) peut s'écrire ainsi:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\tilde{\omega} = 0 .$$

Or l'expression

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \frac{\partial \varrho}{\partial y} + w \frac{\partial \varrho}{\partial z}$$

représente la vitesse avec laquelle varie la densité d'une portion infiniment petite du liquide et cette vitesse sera nulle identiquement en vertu de la nature même du mouvement considéré. Donc l'équation de continuité et l'équation (5) seront, comme nous l'avons dit vérifiées identiquement.

Voici par conséquent la forme que prendront ici les équations (2):

$$\left.\begin{aligned}
u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} &= -2\mu a_1 - \frac{p_{xx} - p}{T} - \frac{p_m}{T'} p \\
u \frac{\partial p_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} &= -2\mu a_2 - \frac{p_{yy} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\
u \frac{\partial p_{zz}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{zz}}{\partial y} &= -\frac{p_{zz} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} \\
u \frac{\partial p_{yz}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} &= -\frac{p_{yz}}{T} \\
u \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{zx}}{\partial y} &= -\frac{p_{zx}}{T} \\
u \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} &= -\mu c_3 - \frac{p'}{T}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} \\
\varrho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \\
0 &= -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Introduisons les variables r et Θ définies par les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
x &= r \cos \Theta \\
y &= r \sin \Theta
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Pour une particule déterminée r sera constant et Θ sera une certaine fonction du temps. Posons

$$q = \frac{d\Theta}{dt} \quad (9)$$

et

$$q = r\frac{d\Theta}{dt} \tag{10}$$

La lettre q représentera alors la vitesse de la particule considérée; cette vitesse sera positive ou négative suivant le sens de rotation de cette particule autour de l'axe des z; ce sera dans tous le cas une fonction de r seul. On aura:

$$\left\{\begin{aligned} u &= -q \sin\Theta \\ v &= q \cos\Theta \end{aligned}\right. \tag{11}$$

On s'assurera très aisément que, quelle que soit la fonction $F(x, y)$, l'on aura

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{q}{r}\frac{\partial F}{\partial \Theta} \tag{12}$$

D'autre part, il est évident que l'on aura $p_{yz} = p_{zx} = 0$ et qu'après avoir exprimé p_{zz} en fonction de r et de Θ, on devra trouver:

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial \Theta} = 0\,.$$

Cela étant, les 3-e, 4 e et 5-e équations du système (6) prennent la forme suivante:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{p_{zz} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'} = 0 \\ &p_{yz} = p_{zx} = \frac{\partial p_{yz}}{\partial \Theta} = \frac{\partial p_{zx}}{\partial \Theta} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Considérons à l'intérieur du liquide un tétraèdre infiniment petit (T); soit σ l'aire d'une des faces de ce tétraèdre et ν_1, ν_2, ν_3 les cosinus-directeurs de la normale à la face σ dirigée vers l'intérieur du tétraèdre. Si l'on désigne par σF_x, σF_y et σF_z les composantes de la pression σF exercée sur cette face du tétraèdre par le liquide adjacent, on aura d'après un théorème classique:

$$\left\{\begin{aligned} F_x &= \nu_1 p_{xx} + \nu_2 p_{xy} + \nu_3 p_{xz} \\ F_y &= \nu_1 p_{yx} + \nu_2 p_{yy} + \nu_3 p_{yz} \\ F_z &= \nu_1 p_{zx} + \nu_2 p_{yz} + \nu_3 p_{zz}\,. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Il serait aisé maintenant de calculer la projection de la pression σF sur un axe quelconque $L'L$. Si l'on désignait par σF_l cette projection et par β_1, β_2, β_3 les cosinus-directeurs de l'axe $L'L$, on aurait:

$$F_l = \beta_1 F_x + \beta_2 F_y + \beta_3 F_z \,. \tag{15}$$

Cela posé, désignons par M le centre de gravité de la face σ du tétraèdre infiniment petit (T) et soit M_1 le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe des z. Supposons en premier lieu que les quantités ν_1, ν_2, ν_3 se confondent avec les cosinus-directeurs du vecteur $M_1 M$. La face σ sera perpendiculaire à $M_1 M$ et l'on aura, en vertu des formules (14) et des égalités (8) et (13):

$$\left.\begin{aligned} F_x &= p_{xx} \cos\Theta + p_{xy} \sin\Theta \\ F_y &= p_{xy} \cos\Theta + p_{yy} \sin\Theta \\ F_z &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Menons par le point M un axe MM_2 perpendiculaire à l'axe $M_1 M$ et parallèle au plan des x, y. Suivant le sens attribué à l'axe MM_2 ses cosinus-directeurs seront représentés par les quantités

$$-\sin\Theta, \ \cos\Theta, \ 0$$

ou par les quantités

$$\sin\Theta, \ -\cos\Theta, \ 0 \,.$$

Dirigeons l'axe MM_2 de façon que ses cosinus-directeurs aient les valeurs: $-\sin\Theta$, $\cos\Theta$, 0. Cela posé, le tétraèdre infiniment petit (T) étant placé comme il a été dit plus haut, si l'on désigne par σP et σQ les projections de la pression σF que supporte la face σ sur les axes $M_1 M$ et MM_2, les quantités P et Q seront évidemment des fonctions de la seule variable $r = \overline{M_1 M}$. D'ailleurs les formules (15) et (16) nous donnent:

$$\left.\begin{aligned} P &= p_{xx} \cos^2\Theta + 2\, p_{xy} \cos\Theta \sin\Theta + p_{yy} \sin^2\Theta \\ Q &= p_{xy} (\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) + (p_{yy} - p_{xx}) \sin\Theta \cos\Theta \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Orientons maintenant notre tétraèdre infiniment petit de façon que les quantités ν_1, ν_2, ν_3 deviennent identiques respectivement aux cosinus-directeurs de l'axe MM_2. La face σ se trouvera alors dans un plan passant par l'axe des z. La projection de la force σF supportée maintenant par la face σ sur l'axe $M_1 M$ sera, comme on le vérifierait sans peine et comme cela résulte d'un théorème classique, égale à σQ. Calculons la projection σH de la même force sur l'axe MM_2. Les formules (14) nous donnent:

$$\begin{aligned} F_x &= -p_{xx} \sin\Theta + p_{xy} \cos\Theta \\ F_y &= -p_{xy} \sin\Theta + p_{yy} \cos\Theta \\ F_z &= 0 \end{aligned}$$

d'où, en faisant usage de la formule (15):

$$H = p_{xx} \sin^2 \Theta - 2 p_{xy} \cos \Theta \sin \Theta + p_{yy} \cos^2 \Theta . \tag{18}$$

Il est évident que la fonction H sera une fonction de la seule variable r.

Une transformation facile des formules (17) et (18) nous donnera:

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}(p_{xx} + p_{yy}) + \tfrac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) \cos 2\Theta + p_{xy} \sin 2\Theta \\ Q &= -\tfrac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) \sin 2\Theta + p_{xy} \cos 2\Theta \\ H &= \tfrac{1}{2}(p_{xx} + p_{yy}) - \tfrac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) \cos 2\Theta - p_{xy} \sin 2\Theta \end{aligned}$$

d'où:

$$\left\{ \begin{aligned} p_{xx} &= \tfrac{1}{2}(P + H) + \tfrac{1}{2}(P - H) \cos 2\Theta - Q \sin 2\Theta \\ p_{xy} &= \tfrac{1}{2}(P - H) \sin 2\Theta + Q \cos 2\Theta \\ p_{yy} &= \tfrac{1}{2}(P + H) - \tfrac{1}{2}(P - H) \cos 2\Theta + Q \sin 2\Theta . \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Les formules (8) et (11) donneront aisément:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \sin 2\Theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\tfrac{1}{2}\left\{ \frac{q}{r} + \frac{dq}{dr} \right\} - \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \cos 2\Theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{q}{r} + \frac{dq}{dr} \right\} - \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \cos 2\Theta \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\tfrac{1}{2}\left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \sin 2\Theta . \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Substituons dans les deux premières et dans la dernière des équations (6) les valeurs (19) des quantités p_{xx}, p_{xy} et p_{yy} et les valeurs (20) des dérivées des fonctions u et v. On effectuera ce calcul rapidement en s'appuyant sur l'identité (12) et l'on obtiendra le système suivant:

$$\frac{q}{r}\left\{ -(P - H) \sin 2\Theta - 2Q \cos 2\Theta \right\} = -\mu \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \sin 2\Theta - \frac{p_m - p}{T'} - \frac{\tfrac{1}{2}(P + H) + \tfrac{1}{2}(P - H) \cos 2\Theta - Q \sin 2\Theta - p}{T}$$

$$\frac{q}{r}\left\{ (P - H) \sin 2\Theta + 2Q \cos 2\Theta \right\} = +\mu \left\{ \frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right\} \sin 2\Theta - \frac{p_m - p}{T'} \frac{\tfrac{1}{2}(P + H) - \tfrac{1}{2}(P - H) \cos 2\Theta + Q \sin 2\Theta - p}{T}$$

$$\frac{q}{r}\left\{(P-H)\cos\Theta-2Q\sin 2\Theta\right\}=+\mu\left\{\frac{q}{r}-\frac{dq}{dr}\right\}\cos 2\Theta$$
$$-\frac{\frac{1}{2}(P-H)\sin 2\Theta+Q\cos 2\Theta}{T},$$

système que l'on peut écrire comme il suit:

$$\left.\begin{aligned} L\sin 2\Theta+M\cos 2\Theta+N&=0\\ -L\sin 2\Theta-M\cos 2\Theta+N&=0\\ M\sin 2\Theta-L\cos 2\Theta\qquad&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

en posant:

$$L=-(P-H)\frac{q}{r}+\mu\left(\frac{q}{r}-\frac{dq}{dr}\right)-\frac{Q}{T}$$

$$M=-2Q\frac{q}{r}+\frac{P-H}{2T}$$

$$N=\frac{\frac{1}{2}(P+H)-p}{T}+\frac{p_m-p}{T'}.$$

Le système (21) est évidemment équivalent au système

$$L=M=N=0,$$

ce qui donne:

$$\left.\begin{aligned} (P-H)\frac{q}{r}-\mu\left(\frac{q}{r}-\frac{dq}{dr}\right)+\frac{Q}{T}&=0\\ 4Q\frac{q}{r}-\frac{P-H}{T}&=0\\ \frac{\frac{1}{2}(P+H)-p}{T}+\frac{p_m-p}{T'}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Introduisons maintenant les variables r et Θ dans les deux premières équations du système (7). Nous avons

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}=-\frac{\partial p_{xx}}{\partial\Theta}\frac{\sin\Theta}{r}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial r}\cos\Theta$$

$$\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}=\frac{\partial p_{yy}}{\partial\Theta}\frac{\cos\Theta}{r}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial r}\sin\Theta$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}=-\frac{\partial p_{xy}}{\partial\Theta}\frac{\sin\Theta}{r}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial r}\cos\Theta$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}=\frac{\partial p_{xy}}{\partial\Theta}\frac{\cos\Theta}{r}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial r}\sin\Theta.$$

D'autre part la formule (11) et l'identité (12) nous donnent:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{q^2}{r}\cos\Theta$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{q^2}{r}\sin\Theta\,.$$

Cela posé, on s'assurera au moyen d'un calcul facile, en s'appuyant sur les formules (19), que les deux premières équations (7) prennent la forme suivante:

$$\left(\varrho\frac{q^2}{r}-\frac{P-H}{r}-\frac{dP}{dr}\right)\cos\Theta+\left(\frac{2Q}{r}+\frac{dQ}{dr}\right)\sin\Theta=0$$

$$-\left(\frac{2Q}{r}+\frac{dQ}{dr}\right)\cos\Theta+\left(\varrho\frac{q^2}{r}-\frac{P-H}{r}-\frac{dP}{dr}\right)\sin\Theta=0\,,$$

d'où:

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}\varrho\frac{q^2}{r}&=\frac{dP}{dr}+\frac{P-H}{r}\\ 0&=\frac{2Q}{r}+\frac{dQ}{dr}\,.\end{aligned}\right.$$

Nr. 4. On verra aisément avec un peu d'attention que le problème est ramené à la détermination des sept quantités P, Q, H, p_x, p, ϱ et q. Pour les calculer, il faut adjoindre aux cinq équations formant l'ensemble des systèmes (22) et (23), 1° la relation qui existe entre la température τ et les quantités p et ϱ, 2° l'équation de l'équilibre thermique obtenue en tenant compte du dégagement de chaleur dû à la viscosité, 3° la première équation du système (13).

Mais ce qu'il y a d'intéressant c'est ceci: il est possible de déterminer les quantités Q et q sans avoir recours aux deux relations précédentes. D'autre part, si l'on admet les vues de M. Natanson sur la relation qui existe entre le phénomène de la double réfraction dans les expériences dont il a tenté de donner la théorie et les éléments qui caractérisent l'état de déformation du corps fictif défini dans l'introduction, les seuls éléments qu'il y ait lieu de calculer sont précisément Q et q. A cause de cela, c'est à la détermination de ces éléments-là que nous allons nous borner; cela nous permettra d'arriver au but en ne nous servant que des équations déjà établies.

La seconde des équations (23) donne:

$$Q = \frac{A}{r^2} \tag{24}$$

en désignant par A la constante arbitraire introduite par l'intégration. D'autre part, on tire des deux premières équations du système (22):

$$Q = \frac{\mu\left(\frac{q}{r} - \frac{dq}{dr}\right)T}{4T^2\left(\frac{q}{r}\right)^2 + 1}.$$

Posons

$$q = r\varphi, \tag{25}$$

il viendra:

$$Q = \frac{-\mu T r \frac{d\varphi}{dr}}{4T^2\varphi^2 + 1} \tag{26}$$

En portant cette valeur de Q dans l'équation (24), on trouve

$$\frac{\mu T \frac{d\varphi}{dr}}{4T^2\varphi^2 + 1} = -\frac{A}{r^3}$$

d'où

$$\varphi(r) = \frac{1}{2T}\, tg\left(\frac{A}{\mu r^2} + \frac{B}{\mu}\right), \tag{27}$$

en désignant par B une nouvelle constante arbitraire introduite par l'intégration.

Désignons par a et b ($a < b$), les rayons des parois cylindriques contenant le liquide et plaçons-nous dans le cas général où chacune de ces parois tourne autour de leur axe commun avec une vitesse angulaire donnée. Désignons par α et β les vitesses angulaires de la paroi intérieure et de la paroi extérieure. Si l'on admet, ce qui est très probable, qu'il ne se produise pas de glissement au contact du liquide avec les parois qui le contiennent, on aura pour déterminer les constantes A et B le système suivant de deux équations:

$$\left.\begin{aligned} tg\left(\frac{A}{\mu a^2} + \frac{B}{\mu}\right) &= 2T\alpha \\ tg\left(\frac{A}{\mu b^2} + \frac{B}{\mu}\right) &= 2T\beta. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

En calculant au moyen de ces équations les constantes A et B, il faudra tenir compte de ce que la fonction $\varphi(r)$ doit rester finie dans toute l'étendue de l'intervalle (a, b). Cette condition fait disparaître toute ambiguité dans la solution. En effet désignons par α_1 et β_1 les arcs compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ vérifiant les équations:

$$(29) \qquad \begin{cases} tg\,\alpha_1 = 2\,T\alpha \\ tg\,\beta_1 = 2\,T\beta\,. \end{cases}$$

Portons sur le cercle trigonométrique à partir de l'origine E des arcs. un arc $EA_1 = \alpha_1$ et un arc $EB_1 = \beta_1$ et soient A_1' et B_1' les points diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique aux points A_1 et B_1. Portons encore sur notre cercle trigonométrique l'arc variable

$$EM = \frac{A}{\mu r^2} + \frac{B}{\mu}\,.$$

Pour $r = a$, le point M coïncidera, en vertu des équations (28) et (29) avec le point A_1 ou avec le point A'_1. Pour $r = b$ le point M devra coïncider: dans le premier cas avec le point B_1 et dans le second avec le point B'_1; autrement la fonction $\varphi(r)$ aurait une discontinuité dans l'intervalle (a, b). Nous aurons donc:

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{A}{\mu a^2} + \dfrac{B}{\mu} = \alpha_1 + (k' + 2\,k'')\,\pi \\[2ex] \dfrac{B}{\mu b^2} + \dfrac{B}{\mu} = \beta_1 + (k' + 2\,k''')\,\pi \end{cases}$$

où les lettres k', k'' et k''' représentent des entiers quelconques. Mais, pour que la fonction $\varphi(r)$ soit continue dans l'intervalle (a, b), il faut encore que la différence

$$\frac{A}{\mu a^2} + \frac{B}{\mu} - \left(\frac{A}{\mu b^2} + \frac{B}{\mu}\right)$$

soit, en valeur absolue, inférieure à π. On aura donc $k' = k''$ et si l'on pose $k = k' + 2\,k''$, on déduira des équations (30) les formules suivantes:

$$(31) \qquad \begin{aligned} \frac{A}{\mu} &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}(\alpha_1 - \beta_1) \\ \frac{B}{\mu} &= \frac{b^2 \beta_1 - a^2 \alpha_1}{b^2 - a^2} + k\,\pi\,. \end{aligned}$$

Portons ces valeurs de $\frac{A}{\mu}$ et de $\frac{B}{\mu}$ dans la formule (27); il viendra:

$$\varphi(r) = \frac{1}{2T} tg \left\{ \frac{a^2 b^2 (\alpha_1 - \beta_1)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{b^2 \beta_1 - a^2 \alpha_1}{b^2 - a^2} \right\} \tag{32}$$

où, comme nous l'avions annoncé, aucune ambiguité ne subsiste. On voit en même temps que, sans nuire à la généralité, on peut prendre

$$\frac{B}{\mu} = \frac{b^2 \beta_1 - a^2 \alpha_1}{b^2 - a^2}.$$

Occupons-nous maintenant de la déformation du corps fictif. Considérons à cet effet une particule M du liquide et envisageons un système d'axes mobiles x', y', z' superposable au système x, y, z, défini comme il suit: l'origine et l'axe des z' du système x', y', z' coïncide avec l'origine et l'axe des z du système x, y, z, tandis que le plan des y', z' passe constamment par la particule M. Cela posé rapportons la déformation du corps fictif aux axes (x', y', z'). Dans ces conditions les composantes de la déformation en M seront des fonctions de la seule variable r, distance du point M à l'axe des z_1 et elles seront identiques aux valeurs que prennent les quantités

$$\varepsilon_1^*, \quad \varepsilon_2^*, \quad \varepsilon_3^*, \quad \gamma_1^*, \quad \gamma_2^*, \quad \gamma_3^*$$

calculées au moyen des formules (4), lorsqu'après y avoir effectué le changement de variables défini par les formules

$$x = r \cos \Theta; \quad y = r \sin \Theta,$$

on fait $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Désignons, comme M. Natanson, par γ_{rq}^* la valeur que prend γ^*_3 dans ces conditions et calculons γ_{rq}^*. La seconde des formules (19) donne:

$$\{p_{xy}\}_{\Theta = \frac{\pi}{2}} = -Q,$$

on aura donc, en vertu de la 6-e des formules (4):

$$\gamma_{rq}^* = \frac{Q}{\mu}$$

et les formules (24) et (31) donneront:

$$\gamma_{rq}^* = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{r^2} \tag{33}$$

D'après les vues théoriques adoptées par M. Natanson, la quantité qu'il désigne par Δ et qu'il appelle „la double réfraction rap-

portée à l'unité de longueur" (terme qu'il ne définit pas) serait donnée par la formule

$$\Delta = R\gamma_{rq}^{*} \tag{34}$$

où R représente „un coefficient optique". On voit que le phénomène de la double réfraction ne dépendrait, d'après M. Natanson, que de γ_{rq}^{*}, élément que nous avons pu déterminer sans faire usage de la relation qui existe entre p, ϱ et τ et de l'équation de l'équilibre thermique.

Mettons la formule (33) sous une forme plus commode. On a:

$$tg\,(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{tg\,\alpha_1 - tg\,\beta_1}{1 + tg\,\alpha_1\,tg\,\beta_1}$$

d'où en vertu des formules (29):

$$tg\,(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{2\,T\,(\alpha - \beta)}{1 + 4\,T^2\,\alpha\,\beta}.$$

Par conséquent la formule (33) prendra la forme définitive que voici:

$$\gamma_{rq} = \frac{a^2\,b^2}{(b^2 - a^2)\,r^2}\,arctg\left\{\frac{2\,T\,(\alpha - \beta)}{1 + 4\,T^2\,\alpha\,\beta}\right\}. \tag{35}$$

Mais quelle est la détermination de l'expression

$$arctg\left\{\frac{2\,T\,(\alpha - \beta)}{1 + 4\,T^2\,\alpha\,\beta}\right\} \tag{36}$$

qu'il faut prendre dans la formule (35)? Les arcs α_1 et β_1 sont compris chacun entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, par conséquent la différence $\alpha_1 - \beta_1$ sera inférieure en valeur absolue à π et elle aura le même signe que la différence $\alpha - \beta$. Par conséquent la détermination demandée de l'expression (36) est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ et elle est positive ou négative en même temps que la différence $\alpha - \beta$.

La formule (35) offre des particularités qui pourraient étonner:

1°. Lorsque les quantités a, b, α et β ont des valeurs fixes, α et β étant en outre de même signe, si l'on fait croître T à partir de zéro, γ_{rq}^{*} croît d'abord en valeur absolue mais, à partir d'une certaine valeur de T, facile à calculer, cette fonction décroît en valeur absolue et tend vers zéro. Ceci est en désaccord avec l'idée fondamentale que nous avons adoptée au sujet du jeu des forces intérieures dans le liquide. Quelle est la raison de ce paradoxe?

L'explication en est facile: les équations fondamentales dont nous sommes partis ont été établies dans l'hypothèse où toutes les composantes de la déformation du corps fictif sont très petites, or il est aisé de voir que, lorsque l'on fait croître T indéfiniment, α et β restant fixes, certaines de ces composantes cessent de satisfaire à l'hypothèse précédente. Par conséquent lorsque α et β ont des valeurs données, la formule (35) n'est applicable que pour des valeurs de T qui ne dépassent pas une certaine limite. Il n'est donc pas étonnant que la formule (35) conduise à une conséquence absurde quand on examine ce qui se produit lorsque T croît indéfiniment.

2°. Peut-être trouvera-t-on étrange que, d'après la formule (35), γ_{rq}^* ne se présente pas, considéré comme fonction des vitesses angulaires α et β des parois cylindriques contenant le liquide, sous forme d'une fonction de la différence $\alpha - \beta$ de ces vitesses angulaires. Ceci n'a rien de paradoxal. En effet la force centrifuge ne peut évidemment pas être sans influence sur la distribution des pressions dans le sein du liquide et par conséquent elle doit aussi influer sur la déformation du corps fictif. Or la force centrifuge est un élément qui ne dépend pas uniquement de la différence $\alpha - \beta$. Donc il n'y a pas lieu de s'étonner de ce que la formule (35) contienne α et β autrement que par l'intermédiaire de leur différence.

Il y a intérêt à remarquer que la constante T' n'entre pas dans la formule (35). Le phénomène de la double réfraction considérée ne dépendrait donc nullement de T'.

Nr. 5. M. Natanson envisage le cas où le cylindre extérieur est fixe tandis que le cylindre intérieur tourne en effectuant N tours par seconde.

Les formules (35) et (34) donneront dans ce cas

$$\Delta = R \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} \operatorname{arctg} (4 \pi T N) \tag{37}$$

Cette formule est tout à fait différente de celle de M. Natanson; il trouve:

$$\Delta = \frac{R A N T}{1 + B N^2 T^2} \tag{38}$$

où

$$A = \frac{4\pi a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}; \qquad B = \frac{16\pi^2 a^4 (b^2 - r^2)^2}{r^4 (b^2 - a^2)^2}.$$

Peut-être dira-t-on que la formule (38) ne doit pas être regardée comme inexacte pour la raison suivante: les équations d'où nous sommes partis ont été établies dans l'hypothèse où les composantes de la déformation du corps fictif sont assez petites pour qu'il soit permis de négliger toutes les quantités de degré supérieur au premier par rapport à ces composantes de la déformation du corps fictif; or le produit TN est de l'ordre de grandeur de γ_{rq}^*, donc les puissances du produit TN de degré supérieur au premier seraient négligeables et les formules (37) et (38) pourraient être considérées. l'une et l'autre, comme équivalentes à la formule suivante:

$$\Delta = 4R \frac{\pi a^2 b^2 TN}{(b^2 - a^2) r^2}. \tag{39}$$

Cette manière de voir serait incorrecte: en examinant la formule de M. Natanson, nous ne devons pas tenir compte des restrictions qui dérivent de la théorie que nous avons exposée nous-mêmes; nous sommes tenus de nous placer dans les conditions où se place M. Natanson lui-même. Or les valeurs du produit TN pour lesquelles il applique sa formule, ne sont pas assez petites pour qu'il soit permis de négliger le terme BN^2T^2; d'ailleurs il suffit de jeter un coup d'oeil sur les tables numériques qui se trouvent dans le mémoire de M. Natanson pour s'assurer que, dans sa pensée, le terme BN^2T^2 n'est nullement négligeable. Pour élucider la question d'une façon plus complète, passons à une application numérique des formules comparées.

Considérons le rapport de la valeur de Δ pour $r = b$ à la valeur de la même quantité pour $r = a$ et désignons par α et α' les valeurs de ce rapport déduites des formules (37) et (38) respectivement. On trouve:

$$\alpha' = \alpha (1 + 16\pi^2 N^2 T^2) \tag{40}$$

Dans la première série d'expériences considérées par M. Natanson, dans celle qui, selon lui, se prête le mieux aux applications de la théorie, il prend $T = 0{,}0014$ et le nombre 54 est une des valeurs de N comprises entre les valeurs extrêmes de cet élément dans la série des expériences considérées. L'équation (40) donne, en y portant les valeurs numériques précédentes de N et de T:

$$a' > a \,.\, 1{,}89 \,.$$

Par conséquent, la formule de M. Natanson accuse des variations bien plus rapides de Δ lorsque r varie dans l'intervalle (a, b) que celles qui résulteraient de la formule (37).

A la vérité, la discussion précédente de la formule de M. Natanson est presque superflue, parce que cette formule ne peut, comme on le verra au chapitre suivant, être considérée comme déduite logiquement par M. Natanson des hypothèses que lui-même a adoptées. Par conséquent l'accord ou le désaccord de cette formule avec d'autres formules théoriques ou avec l'expérience, ne peut nous donner aucun renseignement sur le bien fondé des hypothèses en vue de la vérification desquelles elle a été établie par son auteur.

III. Analyse du travail de M. Natanson „Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides“ [1]).

Nr. 6. Si M. Natanson était parti des équations (1) et (2) du § 8 de son mémoire „Sur les lois de la viscosité“ [2]) il serait parvenu, en dirigeant ses calculs correctement, à la formule (37) du chapitre précédent, formule que nous avons obtenue nous-même. En effet, d'une part les équations (6) du chapitre précédent se réduisent aux équations (1) et (2) du § 8 du mémoire de M. Natanson en posant

$$\overset{1}{T'} = 0$$

et d'autre part la formule (37) ne contient pas la constante T'. Or cela justifie pleinement notre assertion. En réalité, M. Natanson s'appuie sur les équations (9) et (10) du § 8 de son mémoire sur les lois de la viscosité. C'est ce qu'il dit explicitement à la seconde ligne de la page 166 du mémoire que nous analysons. Ce système d'équations, que nous désignerons par (E) est précisément celui qui, comme nous l'avons montré ailleurs [3]), est incompatible avec l'un des principes fondamentaux de la mécanique.

[1]) Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

[2]) Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901.

[3]) Zaremba. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité. Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903.

Examinons de plus près l'usage que fait M. Natanson des équations (E). Dans les calculs qu'il développe au § 4, il effectue les intégrations indiquées dans ces équations en regardant x et y comme des fonctions du temps; or, pour appliquer les équations en question d'une façon correcte, il aurait fallu effectuer les intégrations précédentes en traitant x, y et z comme des quantités indépendantes du temps. D'ailleurs cette application incorrecte des équations (E) conduit accidentellement au même résultat qu'une application correcte des équations exactes dont nous nous sommes servis nous-mêmes. C'est ce qui explique pourquoi la formule (2) du § 5 du mémoire de M. Natanson est exacte. Au § 6 M. Natanson applique de nouveau les équations (E), mais cette fois il ne commet plus l'inconséquence que nous avons relevée au § 4. Les résultats qu'il obtient maintenant ne dérivent naturellement pas de l'hypothèse qu'il a adoptée dans sa conception de la viscosité; il obtient ceux auxquels aurait conduit une application correcte de la théorie classique de la viscosité. Il est aisé de se rendre compte pourquoi il en est ainsi: les équations (E) sont équivalentes à celles que l'on obtient en supprimant dans les premiers membres des six premières équations du système (2) du chapitre précédent les termes qui contiennent l'une des quantités u, v, w en facteur et en posant de plus $\frac{1}{T'}=0$. Or quand on envisage un cas de mouvement permanent les dérivées des quantités p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx} et p_{xy} par rapport au temps sont nulles et les équations précédentes se réduisent, sauf une différence de notations, aux équations de la théorie classique de la viscosité. Il convient enfin de relever dans les calculs de M. Natanson le défaut suivant: il ne détermine pas conformément aux conditions du problème les éléments arbitraires introduits par l'effectuation des intégrations indiquées dans les équations (E). Il arrive à cause de cela à des formules qui ne conviennent pas, comme cela devrait être le cas, au régime du mouvement permanent Ce n'est que parce qu'il néglige, dans ses formules, les éléments qui dépendent du temps, que le temps disparaît dans la formule finale.

Il est évident que le résultat définitif obtenu par M. Natanson, résultat que nous avons comparé d'ailleurs à la fin du chapitre précédent au résultat exact, ne se rattache en réalité, comme nous l'avons affirmé, à aucune théorie.

30. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau la dernière publication de la Classe:

J. Brzeziński. „Rak drzew, jego przyczyny i pojawy". (*Le chancre des arbres ses causes et ses symptômes*), 23 gravures, 8-o, p. 65.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

28 Lipca 1903.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE

1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise

(Spółka wydawnicza polska)

à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie. Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed. A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 10 k. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV. ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Jagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI, XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 6 k. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol. VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 k. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski 4 k. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

— Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674. ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674—1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo, 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol. I. II. IV. V épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo, 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

N° 7. JUILLET 1903.

12.229

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER
DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE :

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR : S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de **M. Ladislas Natanson,**
Membre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 7. **Juillet** **1903.**

Sommaire: 31. M. CÉSAR ROUSSIAN. Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1e ordre. Première communication.
32. M. LAD. GORCZYŃSKI. Etudes sur la marche annuelle de l'insolation.
33. MM. CHARLES REUTT et BRONISLAS PAWLEWSKI. De la condensation des oximes avec les hydrazines et des proprietés des hydrazones.
34. M. GUILLAUME FRIEDBERG. Sur le bassin miocénique de Rzeszów.
35. M. F. TONDERA. Contribution à la connaissance de la gaine d'amidon.
36. M. M. KOWALEWSKI. Études helmintologiques, VII-me partie.
37. M. STANISLAS MAZIARSKI. Sur les rapports des muscles et de la cuticule chez les Crustacés.
38. M. PHILIPPE EISENBERG. Sur l'adaptation des microorganismes aux moyens de défense de l'organisme infecté
39. M. W. HEINRICH. Sur la fonction de la membrane du tympan.

Séance du lundi 6 Juillet 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

31. M. CÉSAR ROUSSIAN. **Metoda Pfaff'a całkowania równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Część pierwsza.** ***(Die Pfaffsche Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. Erste Mitteilung).*** *(Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1e ordre. Première communication).* Mémoire présenté par M. C. Żorawski m. c.

§ 1.

Pfaff hat schon in den Jahren 1814—15 die allgemeine Methode der Integration der partiellen Differentialgleichung 1. 0.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = H\left(x_1, \ldots . x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{1}$$

angegeben [1]). Er hat nämlich diese Aufgabe als die Aufgabe der Integration der Differentialgleichung

$$dz - H\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n = 0\,, \tag{1'}$$

[1]) Abh. d. kgl. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1814—15. S. 76—136.

wo $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ ist, dargestellt, welcher Gedanke bis auf Lagrange zurückreicht [1]). Diese letzte Aufgabe betrachtet er als den speziellen Fall der allgemeinen Differentialgleichung

$$X_1\, dx_1 + \ldots\ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0\,.$$

Das Charakteristische dieser Methode besteht in der speziellen Transformation der Variablen, welche den wahren Zweck hat, wie es Gauss später bemerkt hat [2]), die vorgelegte Differentialgleichung auf die einfachste Form mit der kleinsten Anzahl der Differentiale zu reduzieren und in dieser Form zu integrieren.

Die späteren Verfasser, wie Cauchy, Jacobi, Mayer, haben die verschiedenen Methoden der Integration angegeben, die alle einen und denselben inneren Gedanken haben, nämlich die Differentialgleichung (1′) in ihrer einfachsten Form zu integrieren und also die Eigenschaften der Veränderlichen dieser Form auf dem einen oder auf dem anderen Wege zu benutzen, von denen nur Jacobi in seiner ersten Methode der Integration [3]) die reine Methode der Transformation von Pfaff angewandt und in mehreren Punkten ausgebildet hat. Es leuchtet sowohl aus dieser letzteren sowie aus den Arbeiten von Cauchy [4]) ein, dass diese Methode der Cauchyschen ähnlich ist.

Darboux [5]) hat später gezeigt, dass die Methode der Pfaffschen Transformation in der vom Verfasser gegebenen Form mit der Cauchyschen übereinstimmt.

Die Pfaffsche Methode ist trotz dieser Arbeiten in ihrer ganzen Allgemeinheit, zu der sie nur fähig ist, noch nicht dargestellt worden.

Ich beabsichtige in dieser Abhandlung die Theorie der Integration einer partiellen Differentialgleichung oder des Systems solcher Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion mit Hilfe der Pfaffschen Transformation in der allgemeinsten Form durchzuführen [6]).

[1]) Abh. d. Berl. Acad. 1772.

[2]) Gött. gelehr. Anz. 1815.

[3]) J. Crelle, Bde 2, 17. Vorles. üb. Dyn., 1866; Journal d. Math., Liouv. 1838.

[4]) Exercices d'An. et de Phys. math. T. II, 1841. Compt. Rend. T. 14, 1842.

[5]) Bull. d. Sc. math. et astr. 1882. Compt. Rend., 1882.

[6]) Die gegenwärtige erste Mitteilung enthält die Theorie einer partiellen Differentialgleichung. Die Verallgemeinerung auf Systeme partieller Differential-

Diese Theorie enthält in der rein analytischen Form die Ergebnisse der gemischten analytisch-geometrischen Methode von Lie, die er in den Math. Ann. Bd. 9 gegeben hat.

Sie enthält auch die Methode von Cauchy als den einfachsten Fall sowie die erste Methode von Jacobi in der von Mayer[1]) und Darboux[2]) verbesserten Form.

Für das System der partiellen Differentialgleichungen sind einige von den Ergebnissen dieser schon von G. Morera[3]) und Saltikow[4]) gefunden worden.

Ich benutze im folgenden aus der Theorie des Pfaffschen Ausdruckes die möglichst kleine Anzahl der Hülfsätze, nämlich nur die folgenden:

1. Die Formel der Transformation

$$x_i = x_i(y_1 y_2 \ldots y_p) \qquad (i = 1, 2 \ldots p),$$

nach welcher der gegebene Differentialausdruck

$$\Omega = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_p\, dx_p$$

eine der neuen Variablen z. B. y_1 nur in dem gemeinschaftlichen Faktor μ enthält, genügen dem System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots\ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial y_1} &= 0, \\ (1, 1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, 1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots\ldots + (p, 1) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} + \lambda X_1 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1, p) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2, p) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots\ldots + (p\, p) \frac{\partial x_p}{\partial y_1} + \lambda X_p &= 0, \end{aligned} \tag{A}$$

wo $(i\,k) = -(k\,i) = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$ und $\lambda = \frac{\partial lg\, \mu}{\partial y_1}$ ist.

Diese Transformation ist für den Fall $p = 2n$ immer möglich, da die Determinante

gleichungen werde ich in der nächsten Sitzung der Math. naturw. Cl. der Akademie mitteilen.

[1]) Math. Ann. Bd. 3.

[2]) Compt. Rend. 1874; Bull. d. Sc. Math. Bd. 8 (Série 1).

[3]) Rendic. de l'Inst. Lomb., 1883.

[4]) Compt. Rend. 1899.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} O & X_1 \ldots\ldots X_p \\ -X_1, & (11) \ldots\ldots (p\,1) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -X_p, & (1,p) \ldots\ldots (p\,p) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Diese Gleichungen (A) sind hinreichend und Ω hat nach der Transformation die Form

$$\Omega = e^{\int \lambda\, dy_1} (Y_2\, dy_2 + \ldots + Y_p\, dy_p),$$

wo $Y_2 \ldots Y_p$ von y_1 frei sind [1]).

2. Der Differentialausdruck

$$\Omega = df_0 + F_1\, df_1 + \ldots + F_m\, df_m$$

mit $m+1$ Differentialen, wo alle Veränderlichen unabhängig sind, kann immer durch $m+1$ und nicht weniger endliche Gleichungen zum Verschwinden gebracht werden. Die allgemeinste Methode dafür ist die folgende: Man stellt zwischen $f_0, f_1, \ldots f_m$ $k\,(\leqq m+1)$ beliebige Gleichungen

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} f_0 &= \Theta_0(f_k, f_{k+1}, \ldots\ldots f_m) \\ f_1 &= \Theta_1(f_k, f_{k+1}, \ldots\ldots f_m) \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_{k-1} &= \Theta_{k-1}(f_k, f_{k+1}, \ldots\ldots f_m) \end{aligned}$$

auf, deren eine die Veränderliche f_0 bestimmen soll, und dann haben die gesuchten $m+1$ Relationen die Form [2])

$$(\beta) \qquad f_0 = \Theta_0, \ldots\ldots f_{k-1} = \Theta_{k-1},$$

$$F_k + \sum_1^{k-1} i \frac{\partial \Theta_i}{\partial f_k} F_i + \frac{\partial \Theta_0}{\partial f_k} = 0, \ldots\ldots F_m + \sum_1^{k-1} i \frac{\partial \Theta_i}{\partial f_m} F_i + \frac{\partial \Theta_0}{\partial f_m} = 0.$$

Wenn wir die Veränderliche f_0 auf die neue H mit Hilfe der Formel

$$H = f_0 + F_1 f_1 + \ldots + F_{k-1} f_{k-1}$$

transformieren, so bekommen wir den Differentialausdruck und das System der Gleichungen (β) in der Form

[1]) Diese Gleichungen sind aufgestellt worden bei Jacobi (J. Crell, 2), A. Mayer (Math. Ann. Bd. 17). Verg. auch meine Arbeit (Denkschrift. der Neuruss. Univ., 1896)

[2]) S. Lie, Math. Ann., Bd. 9.

$$\Omega = dH - f_1\, dF_1 - \ldots - f_{k-1}\, dF_{k-1} + F_k df_k + \ldots + F_m\, df_m$$

und

$$H = \Theta_0 + F_1\, \Theta_1 + \ldots + F_{k-1}\, \Theta_{k-1}$$

$$f_i = \frac{\partial H}{\partial F_i}\,(i = 1,\ 2 \ldots k-1), \quad F_j = -\frac{\partial H}{\partial f_j}\,(j = k, \ldots m). \quad (\beta)$$

§ 2.

1. Es sei die Differentialgleichung 1. 0.

$$F\left(x_1 x_2 \ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{1}$$

vorgelegt. Wenn $z = f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ das Integral derselben ist, so bringen $n+1$ endliche Gleichungen

$$z = f(x_1 \ldots x_n),\ p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(i = 1,\ 2 \ldots n) \tag{a}$$

den Differentialausdruck

$$\Omega = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n$$

zum Verschwinden und genügen der gegebenen Gleichung

$$F(x_1 \ldots x_n,\ z,\ p_1 \ldots p_n) = 0. \tag{1'}$$

Umgekehrt, wenn $m+1$ Gleichungen $z = f(x_1 \ldots x_n)$, $p_i = f(x_1 \ldots x_n)$ den Differentialausdruck Ω annullieren und der endlichen Differentialgleichung (1′) genügen, so ist offenbar $z = f\,(x_1 \ldots x_n)$ das Integral der gegebenen Differentialgleichung (1).

Man kann die Aufgabe, die Differentialgleichung (1) zu integrieren, in folgender etwas allgemeineren Form darstellen: Man soll die Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

mit Hilfe der kleinsten Anzahl $n+1$ endlichen Gleichungen integrieren, deren eine die gegebene Form $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ hat.

Wir werden diese Aufgabe in möglichst allgemeiner Form lösen.

Es kann bei der allgemeinsten Behandlung dieses Problems auch vorkommen, dass die gegebene Gleichung (1′) von den p frei ist. In diesem Falle löst man dieses Problem nach der Methode des § I, 2, indem man unter den Gleichungen (α) die gegebene Gleichung

$$F(x_1 \ldots x_2 z) = 0 \tag{1'}$$

nimmt. Wir werden im folgenden voraussetzen, dass die gegebene Gleichung (1′) die p enthält, so dass z. B. $\frac{\partial F}{\partial p_1} \not\equiv 0$ ist.

Wir können unser Problem in der folgenden, noch bequemeren Form darstellen: wir sollen die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1\,dx - \ldots - p_n\,dx_n = 0,$$

wo die Veränderlichen x, p, z durch die gegebene Relation

$$F(x_1 \ldots x_n z,\ p_1 \ldots p_n) = 0$$

schon verbunden sind, durch die kleinste Anzahl n der endlichen Gleichungen integrieren.

2. Wir setzen zuerst voraus, dass die gegebene Gleichung (1′) in Bezug auf eine der Veränderlichen p z. B. p_1 aufgelöst ist, und also

$$p_1 = \Theta(x_1 \ldots x_n z\, p_2 \ldots p_n)$$

ist. Die Differentialgleichung Ω' hat jetzt die Form

$$\Omega' = dz - \Theta\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n = 0.$$

Wir werden uns später von dieser Voraussetzung frei machen. Wir wollen nun auf die Differentialgleichung $\Omega' = 0$ die Pfaffsche Transformation anwenden. Das System der Differentialgleichungen (A) ist:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} - \Theta\frac{\partial x_1}{\partial y_1} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \ldots - p_n\frac{\partial x_n}{\partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial \Theta}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_1} +$$

$$+ \frac{\partial \Theta}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial \Theta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y_1} - \lambda\,\Theta = 0,$$

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} - \frac{\partial p_i}{\partial y_1} - \lambda\,p_i = 0 \quad (i = 2, 3 \ldots n),$$

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \lambda = 0.$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial p_i}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} - \frac{\partial x_i}{\partial y_1} = 0, \quad (i = 2, 3 \ldots n)$$

oder:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left(\Theta - \sum_2^n j p_j \frac{\partial \Theta}{\partial p_j}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left(\Theta - \sum_2^n j p_j \frac{\partial \Theta}{\partial p_j}\right)\right] = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) = 0 \\ &\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial \Theta}{\partial p_i} = 0. \end{aligned}\right| \quad i = 2, \ldots n$$

$$\lambda - \frac{\partial \Theta}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 0.$$

Die zweite Gleichung ist die Folge der ersten, also hat das System (A) die Form:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left(\Theta - \sum_2^n j p_i \frac{\partial \Theta}{\partial p_i}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) = 0, \\ &\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial \Theta}{\partial p_i} = 0, \end{aligned}\right| \quad i = 2, 3 \ldots n \qquad \text{(A)}$$

$$\lambda - \frac{\partial \Theta}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 0.$$

Wenn $\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$ ist, so ist dann auch $\lambda = 0$ und das System (A) enthält dann nur $2n - 1$ Gleichungen mit $2n$ Unbekannten $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \frac{\partial p_i}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial y_1}$. Wir können dann $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$ ganz willkürlich, aber nicht gleich Null wählen. Die Veränderliche y_1 verschwindet in diesem Falle nach der Transformation.

Wenn dagegen $\frac{\partial \Theta}{\partial z} \neq 0$ ist, dann haben wir $2n$ Gleichungen mit $2n + 1$ Unbekannten $\frac{\partial x_i}{dy_1}, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \frac{\partial p_i}{\partial y_1}, \lambda$. In diesem Falle können wir λ willkürlich, aber nicht gleich Null wählen.

3. Diese Gleichungen haben die Unbequemlichkeit, dass wir ausdrücklich voraussetzen, dass die endliche Gleichung (1′) in Bezug

auf p_1 aufgelöst ist. Wir wollen uns jetzt von dieser Voraussetzung befreien. Vorausgesetzt, dass $p_1 = \Theta$ die einfache Wurzel der Gleichung (1′) ist, was offenbar immer möglich ist, so haben wir die Formeln:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}\right)_{p_1=0}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial p_i} = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial p_i}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}\right)_{p_1=0}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}\right)_{p_1=0}.$$

Das System (A) nimmt nach der Substitution die Form:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)\frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left[\left(p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1}\right) + \sum_2^n i\, p_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\right] = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)\frac{\partial p_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) + p_i\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] = 0 \\ &\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)\frac{\partial x_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \quad i = 2, \ldots n$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)\lambda + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 0.$$

an, wo () die Substitution $p_1 = \Theta$ bezeichnet. Wir sehen, dass die ursprünglichen Variablen $x_1 \ldots x_n z p_2 \ldots p_n$ zusammen mit p_1, wo $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ ist, durch die neuen $2n$ Variablen $y_1 \ldots y_{2n}$ ausgedrückt, den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\sum_1^n i\, p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0. \\ &\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0, \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2 \ldots n$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\lambda + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 0. \qquad F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$$

genügen.

Die letzte Gleichung kann man durch die folgende

$$\sum_1^n i \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_1} + \sum_1^n i \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial y_1} = 0$$

ersetzen, oder nach der Einsetzung der Werte von

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial p_2}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial y_1}$$

durch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\left[\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] = 0,$$

oder endlich, da $\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right) \neq 0$ ist, durch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left[\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0.$$

Die Variablen $x_1 \ldots y_n\, z p_1\, p_n$, wo $p_1 = \Theta\,(x_1 \ldots x_n\, z p_2 \ldots p_n) = 0$ ist, durch die neuen Variablen $y_1 \ldots y_{2n}$ ausgedrückt, sollen also dem Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\sum_i p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0.\\
&\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n\\
&\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0, \quad i = 2, 3 \ldots n\\
&\frac{\partial F}{\partial p_1}\lambda + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 0
\end{aligned} \tag{A$_1$}$$

genügen. Es folgt aus diesen Gleichungen, dass umgekehrt

$$dF = 0$$

ist und also $F(x_1 \ldots x_n\, z p_1\, p_n) = \text{const.}$ das Integral des Systems (A_1) ist. Wir sehen also, dass die Veränderlichen $x_1 \ldots x_n\, z p_1\, p_n$, wo $p_1 = \Theta\,(x_i \ldots x_n\, z p_2 \ldots p_n) = 0$ ist, durch $y_1\, y_2 \ldots y_{2n}$ ausgedrückt, ein spezielles Integralsystem der Gleichungen (A_1) bilden. Wenn $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ ist, so ist $\lambda = 0$ und wir haben nur $2n$ unabhängige Gleichungen mit $2n+1$ Unbekannten, deren eine $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$ ganz willkürlich, aber nicht gleich Null gewählt werden kann. Wenn dagegen $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ist, so haben wir $2n+1$ unabhängige Gleichungen mit $2n+2$ Unbekannten, deren eine $-\lambda$ ganz willkürlich, aber nicht gleich Null gewählt werden kann.

Wir können dieses System in der symmetrischen Form

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum_1^n i\, p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} =$$

$$\text{(B)} \quad -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \ldots\ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} dy_1$$

darstellen, wenn wir nur annehmen, dass, im Falle $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ und $\lambda = 0$, der Quotient $\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ eine willkürliche Funktion der Variabeln $x_1 \ldots p_n$ ist. Wir wissen, dass $F(x_1 \ldots x_n\, z p_1 \ldots p_n) = \text{const.}$ das Integral dieses Systems, und zwar des Systems der $2n$ ersten Gleichungen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum_1^n i\, p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} =$$

$$\text{(B}_1\text{)} \qquad = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \ldots\ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}}$$

ist.

4. Es sei das System der Hauptintegrale der Differentialgleichungen (B):

$$x_i = x_i(y_1,\ x_1{}^0 \ldots\ldots p_n{}^0), \quad z = z(y_1,\ x_1{}^0 \ldots\ldots p_n{}^0),$$

$$\text{(a)} \qquad p_i = p_i(y_1\, x_1{}^0 \ldots\ldots p_n{}^0), \qquad (i = 1,\ 2, \ldots n)$$

wo $x_1{}^0 \ldots p_n{}^0$ die Anfangswerte der Variablen $x_i\, z p_i$ bei $y_1 = y_1{}^0$ sind und als die Integrationskonstanten zu betrachten sind.

Die Formeln der Transformation

$$x_i = x_i(y_1\, y_2 \ldots y_{2n}), \quad z = z(y_1\, y_2 \ldots y_{2n}), \quad p_i = p_i(y_1\, y_2 \ldots y_{2n})$$
$$(i = 1,\ 2, \ldots n)$$

sollen solche Form haben, wo nur, $x_1{}^0 \ldots p_n{}^0$ Funktionen von $y_2 \ldots y_{2n}$ sind.

Es folgt daraus, dass zwischen $x_i{}^0\, z^0\, p_i{}^0$ zwei Relationen stattfinden müssen. Eine derselben muss die gegebene Form

$$F(x_1\, x_2 \,..\, x_n z\, p_1 \,..\, p_n) = F(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$$

haben; was die andere betrifft, so muss sie nur die Bedingung erfüllen, dass nämlich aus derselben keine Relation zwischen x_i, z, p_i folgt, d. h. sie muss kein Integral der Differentialgleichungen (B_1) und im übrigen ganz willkürlich sein. Es sei nämlich

$$\varphi\,(x_1{}^0 \ldots . p_n{}^0) = 0$$

eine solche Relation. Wenn wir eine der Grössen $x_i{}^0\, z^0\, p_i{}^0$ mit Hilfe dieser Gleichung aus den Gleichungen (a) eliminieren, so bekommen wir die Formel der Transformation:

$$x_i = x_i\,(y_1\, y_2 \,..\, y_{2n+1}), \quad z = z\,(y_1\, y_2 \,..\, y_{2n+1}) \cdot p_i = p_i\,(y_1\, y_2 \,..\, y_{2n+1}),$$
$$(i = 1,\ 2 \ldots n) \qquad \text{(C)}$$

wo $y_2 \ldots y_{2n+1}$ $2n$ Unabhängige von den Grössen $x_1{}^0 \ldots p_n{}^0$ sind.

Wollen wir mit diesen Formeln den Differentialausdruck Ω transformieren, so bekommen wir

$$\Omega = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = U_1\, dy_1 + U_2\, dy_2 + \ldots + U_{2n+1}\, dy_{2n+1},$$

wo $U_i = \dfrac{\partial z}{\partial y_i} - \sum\limits_1^n{}_\alpha\, p_\alpha \dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}$ $\quad (i = 1, 2 \,..\, 2n+1)$ ist.

Im besonderen ist

$$U_1 = \frac{\partial z}{\partial y_1} - \sum\limits_1{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1}$$

oder mit Hilfe der Gleichungen (B):

$$U_1 = -\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} \left(\sum\limits_1{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} - \sum\limits_1{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \right) = 0\,.$$

Was die übrigen Koeffizienten $U_i\,(i = 2, 3 \ldots 2n+1)$ betrifft, so kann man beweisen, dass

$$\sum\limits_2^{2n+1}{}_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial y_1} + \lambda\, U_i \right) dy_i = -\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}}\, dF$$

ist.

In der Tat ist

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^n{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial z}{\partial y_1} - \sum_1^n{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1}\right) +$$

$$+ \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1} - \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial y_1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i},$$

woraus mit Hilfe der Gleichungen (B) und der Relation

$$U_1 = \frac{\partial z}{\partial y_1} - \sum_1^n{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1} = 0$$

folgt

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_1} = -\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left[\sum_1^n{}_\alpha\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\sum_1^n{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\right].$$

oder endlich

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_1} = -\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^n{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}\right)\right].$$

Da aber $\frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^n{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_i} = U_i$ ist, so haben wir

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_1} - \lambda U_i = -\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}}\frac{\partial F}{\partial y_i} \quad (i = 2, \ldots 2n+1).$$

Hieraus folgt, dass

$$\text{(b)} \qquad \sum_2^{2n+1}{}_i\left(\frac{\partial U_i}{\partial y_1} - \lambda U_i\right) dy_i = -\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}}\, dF$$

ist.

Setzen wir jetzt

$$F(x_1 \ldots x_n z\, p_1 \ldots p_n) = F(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = \vartheta(y_2 \ldots y_{2n+1}) = 0.$$

Das System (C) wird dann nur $2n$ Formeln der Transformation der $2n$ alten Unabhängigen von den $x_i\, z p_i$ auf die $2n$ neuen Unabhängigen von den $y_1, y_2 \ldots y_{2n+1}$ Variablen enthalten und der Differentialausdruck Ω wird dann Ω' sein.

Wir erhalten also

$$\Omega' = V_2\, dy_2 + \ldots\ldots + V_{2n}\, dy_{2n},$$

wo

$$V_i = U_i + U_{2n+1} \frac{\partial y_{2n+1}}{\partial y_i} \quad (i = 2,\ 3 \ldots 2n)$$

ist, vorausgesetzt, dass wir nämlich y_{2n+1} als die Funktion der $y_2 \ldots y_{2n}$ aus der Gleichung

$$\Theta(y_2 \ldots y_{2n+1}) = 0$$

bestimmen.

Die Relation (b) gibt uns in diesem Falle, dass

$$\sum_{2}^{2n} V_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial y_1} - \lambda V_i \right) dy_i = 0$$

ist, da $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ ist.

Da aber $y_2 \ldots y_{2n}$ unabhängig sind, so folgt

$$\frac{\partial V_i}{\partial y_1} - \lambda V_i = 0 \quad (i = 2 \ldots\ldots 2n)$$

und durch Integration

$$V_i = e^{\int \lambda\, dy_1} Y_i \quad (i = 2 \ldots\ldots 2n)$$

wo Y_i von y_1 frei sind.

Wir haben also

$$\Omega' = dz - p_1\, dx \ldots\ldots - p_n\, dx_n = e^{\int \lambda\, dy_1} (Y_2\, dy_2 + \ldots\ldots + Y_{2n}\, dy_{2n}),$$

wo y_1 nur in dem gemeinschaftlichen Faktor figurieren kann.

Wir haben hiermit den folgenden Satz I bewiesen:

Satz I. Um die Formel der Pfaffschen Transformation des Ausdruckes

$$\Omega' = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n,$$

wo $F(x_1 \ldots x_n\ z\ p_1 \ldots p_n) = 0$ ist, zu erhalten, soll man die Differentialgleichungen (B) in der Form

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(y_1 x_1^0 \ldots\ldots p_n^0) \quad z = z(y_1 x_1^0 \ldots\ldots p_n^0) \\ p_i &= p_i(y_1 x_1^0 \ldots\ldots p_n^0) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n) \end{aligned} \qquad (a)$$

integrieren und dann die Anfangswerte $x_i^0\, z^0\, p_i^0$ der Veränderlichen $x_i\, z p_i$ durch zwei Relationen verbinden, deren eine

$$F(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n) = F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

gegeben ist und eines der Integrale des Systems (B_1) darstellt, und die andere

$$\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

nur die Bedingung erfüllen soll, dass sie dagegen kein Integral dieses Systems ist. Die neuen Veränderlichen sind y_1 und $2n-1$ der Grössen $x_1^0 \ldots p_n^0$.

Es ist klar, da $\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0$ ist, dass das System (a) auch in der Form

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1(y_1\, x_1^0 \ldots p_n^0), \\
x_i &= x_i(x_1\, x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2,\ 3 \ldots n) \\
z &= z(x_1\, x_1^0 \ldots p_n^0) \\
p_i &= p_i(x_1\, x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n),
\end{aligned}$$

dargestellt werden kann, wo die $2n$ letzte Gleichungen das System der $2n$ Hauptintegrale des Systems (B_1) in Bezug auf $x_1 = x_1^0$ bilden.

Es gibt unendlich viele Formeln der Pfaffschen Transformation, da die Relation

$$\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

unendlich viele Formen annehmen kann. Es seien die Formeln zweier solcher Transformationen

$$\begin{aligned}
1)\ x_1 &= x_1(y_1\, x_1^0 \ldots p_n^0) \\
x_i &= x_i(x_1\, x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n) \\
z &= z(x_1\, x_1^0 \ldots p_n^0) \\
p_i &= p_i(x_1\, x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n),
\end{aligned}$$

wo $F(x_1 \ldots p_n) = F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ und $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) =$ ist;

$$\begin{aligned}
2)\ \text{und}\ x_1 &= x_1(x_1\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \\
x_i &= x_i(x_1\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \quad (i = 2 \ldots n) \\
z &= z(x_1\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \\
p_i &= p_i(x_1\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n),
\end{aligned}$$

wo $F(x_1 \ldots x_n\, z p_1 \ldots p_n) = F(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ und $\Phi(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ ist.

Die neuen Veränderlichen sind in diesen Systemen $2n$ unabhängige Grössen von den $y_1\, x_1^0 \ldots p_n^0$, und $t_1\, x_1^{00} \ldots p_n^{00}$

z. B. $y_1 x_1^0 \ldots x_n^0 z^0 p_1^0 \ldots p_{n-2}^0$ und $t_1 x_2^{00} \ldots x_n^{00} z^{00} p_2^{00} \ldots p_n^{00}$.

Wir können beweisen, dass $x_1^0 \ldots x_n^0 z^0 p_1^0 p_{n-2}^0$ nur durch $x_2^{00} \ldots x_n^{00} z^{00} p_2^{00} \ldots p_n^{00}$ ausdrückbar sind.

In der Tat sind die Systeme der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
1)\quad & x_i = x_i(x_1 x_1^0 x_2^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n) \\
& z = z\,(x_1 x_1^0 \ldots\ldots p_n^0) \qquad\qquad \text{wo } \varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \\
& p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots\ldots p_n^0) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
2)\quad & x_i = x_i(x_1 x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \quad (i = 2 \ldots n) \\
& z = z\,(x_1 x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \qquad\qquad \text{wo } \Phi(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0 \\
& p_i = p_i(x_1 x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n)
\end{aligned}
$$

zwei Systeme der vollständigen Integrale des Systems (B_1). Da aber das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen nur ein System der vollständigen Integrale besitzt, so folgt, dass $2n$ Unabhängige von den Grössen $x_1^0 \ldots p_n^0$ gewisse Funktionen der $2n$ Unabhängigen von den Grössen $x_1^{00} \ldots p_n^{00}$ sind.

Diese Relationen bleiben auch dann, wenn wir noch die Relationen $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $F(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ hinzufügen, da aus der ersten die Relation $F(x_1 \ldots x_n z \ldots p_n) = 0$ und also die zweite folgt.

Wenn wir mit den Formeln

$$
\begin{aligned}
& x_1 = x_1(y_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \\
& x_i = x_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n) \\
& z = z\,(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \\
& p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n),
\end{aligned}
\tag{D}
$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ und $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist, den Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n,$$

wo $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ ist, transformieren, so bekommen wir

$$\Omega' = e^{\int \lambda\,dy_1} M.$$

wo M die Veränderliche y_1 nicht enthält. Es folgt daraus, dass

$$M = \left(\Omega' e^{-\int \lambda\,dy_1}\right)_{y_1 = y_1^0}$$

oder dass

$$M = (dz_0 - p_1^0\,dx_1^0 \ldots - p_n^0\,dx_n^0)\, e^{-(\int \lambda\,dy_1)_{y_1 = y_1^0}}$$

ist. Also folgt für Ω' die Form

$$\Omega' = e^{\int \lambda\, dy_1 - (\int \lambda\, dy_1)_0} (dz_0 - p_1{}^0\, dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0\, dx_n{}^0),$$

wo $F(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$, $\varphi(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ und λ für den Fall $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ gleich Null, im Falle $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ willkürlich, aber nicht gleich Null ist.

5. Wir wollen uns jetzt zur Integration der Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1\, p_n) = 0$ ist, wenden.

Man soll die transformierte Gleichung

$$\Omega' = (dz_0 - p_1{}^0\, dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0\, dx_n{}^0)\, e^{\int \lambda\, dy_1 - (\int \lambda\, dy_1)_0} = 0,$$

wo $F(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0\, z^0\, p_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$, $\varphi(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ ist, durch die kleinste Anzahl n der Integrale integrieren. Es folgt, dass entweder

$$\Omega'_0 = dz_0 - p_1{}^0\, dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0\, dx_n{}^0 = 0,$$

oder

$$e^{\int \lambda\, dy_1 - (\int \lambda\, dy_1)_0} = 0$$

ist. Die letzte Voraussetzung ist nur dann möglich, wenn $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ist. Setzen wir, dass

$$\Omega'_0 = dz_0 - p_1{}^0\, dx_1{}^0 - \ldots - p_n\, dx_n{}^0 = 0$$

ist, wo $F(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0\, z^0\, p_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$, $\varphi(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ ist.

Wir sollen diese Gleichung durch die kleinste Anzahl n der Integrale integrieren oder wir sollen die Gleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1{}^0\, dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0\, dx_n{}^0 = 0$$

durch $n + 2$ Integrale integrieren, deren zwei $F(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$, $\varphi(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ vorgeschrieben sind. Wenn ein solches System der $n + 2$ Integrale gefunden ist, so können wir daraus n Integrale der Gleichung $\Omega' = 0$ ermitteln: in der Tat, es sei dieses System der Integrale

$$\Theta_i(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0, \quad F(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0, \quad \varphi(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0.$$

Wenn wir jetzt die Gleichungen

$$\Theta_i(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0 \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist, mit Hilfe der Formeln

$$x_i = x_i(x_1 x_1^0 \ldots . p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n), \quad z = z(x_1 x_1^0 \ldots . p_n^0),$$
$$p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots . n) \qquad \text{(D)}$$
$$\text{wo } F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0), \quad \varphi(x_i^0 \ldots p_n^0) = 0 \text{ ist,}$$

auf die Variablen $x_i z p_i$ transformieren, so bekommen wir n Gleichungen

$$\vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n).$$

wo $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ ist, die n Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ ist, sind.

In der Tat sehen wir zuerst, dass die Form dieser Gleichungen von λ unabhängig ist, da die Form der Formel der Transformation

$$x_i = x_i(x_1 x_1^0 \ldots . p_n^0) \quad (i = 2, \ldots . n), \quad z = z(x_1 x_1^0 \ldots . p_n^0),$$
$$p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots . p_n^0) \quad (i = 1, 2, \ldots . n),$$
$$\text{wo } \varphi(x_1^0 \ldots . p_n^0) = 0 \text{ ist.}$$

die die Integrale des Systems (B_1) sind, von λ unabhängig ist.

Wenn $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ und also $\lambda = 0$ ist, so ist dann $e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} = 1$ und also nicht unendlich; wenn dagegen $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ und also λ willkürlich, aber nicht Null ist, so können wir $\lambda = 1$, und also

$$e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} = e^{y_1 - y_1^0}$$

setzen. Es ist klar, dass $e^{y_1 - y_{10}}$ nicht unendlich und ganz willkürlich für $\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $F(x_1^0 \ldots p_n^0)$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ bleibt, da y_1 von $x_1^0 \ldots p_n^0$ unabhängig ist.

Das System der $n + 1$ Gleichungen

$$\vartheta_i(x_1 \ldots . p_n) = 0, \quad F(x_1 \ldots . p_n) = 0$$

stellt das System der kleinsten Anzahl $n + 1$ der Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \ldots . - p_n dx_n = 0$$

dar. Wenn diese Integralgleichungen in Bezug auf $p_1 \ldots p_n$ auf-

lösbar sind, so bekommt man nach der Elimination derselben das Integral $f(z\, x_1 \ldots x_n) = 0$ der Differentialgleichung (1).

Wenn es dagegen nicht der Fall ist, so stellen diese $n+1$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega = 0$ das Integral der Differentialgleichung (1) im erweiterten Sinne von S. Lie dar.

Die in dieser Weise erhaltenen Integrale nennt man nichtsingulär.

Wenn wir nun beachten, dass die Relation $\varphi\,(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ nur kein Integral des Systems der Differentialgleichungen (B_1) sein soll und im übrigen ganz willkürlich bleibt, so können wir den folgenden Satz II aussprechen.

Satz II. Um die nichtsingulären Integrale der gegebenen Differentialgleichung zu erhalten, soll man die Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1{}^0\, dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0\, dx_n{}^0 = 0$$

mit Hilfe irgend eines Systems der $n+2$ Gleichungen integrieren, die nicht alle die Integrale des Systems der Differentialgleichungen (B_1) sind und deren eine die gegebene Gleichung $F(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0 z^0 p_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ ist. Es sei ein solches

$$\begin{aligned} &\Theta_i\,(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0 z^0 \ldots p_n{}^0) = 0, \quad \varphi\,(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0 z^0 p_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0 \\ \text{(E)} \qquad &F(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0, \end{aligned}$$

wo $\varphi\,(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0 z^0 p_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ kein Integral der Differentialgleichungen (B_1) ist. Man bekommt das Integral der Differentialgleichung (1), wenn man die Grösse $x_1{}^0 \ldots x_n{}^0 z^0 p_1{}^0 \ldots p_n{}^0$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{(E)} \qquad &\Theta_i\,(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0 z^0 p_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0, \quad (i = 1,\ 2 \ldots n) \\ &\varphi\,(x_1{}^0 \ldots x_n{}^0 z^0 p_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0, \quad F(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &x_i = x_i\,(x_1\, x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0 \ (i = 2 \ldots n), \quad z = z\,(x_1\, x_1{}^0 \ldots p_n{}^0), \\ (a) \qquad &p_i = p_i\,(x_1\, x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0 \ (i = 1 \ldots n), \end{aligned}$$

eliminiert, wo die letzten $2n$ Gleichungen (a) die Hauptintegrale des Systems (B_1) im Bezug auf $x_1 = x_1{}^0$ sind.

Was jetzt das System der $n+2$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ mit den vorgeschriebenen Eigenschaften betrifft, so kann man den folgenden Satz III beweisen:

Satz III. Um alle Systeme der $n+2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ zu finden, die nicht alle die Integrale des Systems (B_1) sind und deren eine die gegebene Form

$F(x_1^0 \ldots x_n^0 z^0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ besitzt, soll man in folgender Weise verfahren: Man bestimme nach der Methode § I, 2 $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$; wenn aus diesen Gleichungen die Gleichung $F = 0$ nicht folgt, so füge man noch diese Gleichung hinzu, vorausgesetzt, dass nicht alle $n+1$ bestimmten Integrale die Integrale des Systems (B_1) sind; wenn dagegen diese Gleichungen die gegebene Gleichung $F = 0$ zur Folge haben, so füge man noch die Gleichung

$$\varphi(x_1^0 \ldots . p_n^0) = 0$$

hinzu, die nur die eine Bedingung erfüllen muss, dass nicht alle diese $n+2$ Gleichungen die Integrale des Systems (B_1) sind.

Es sei in der Tat (E) ein System der $n+2$ unabhängigen Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ mit den vorgeschriebenen Eigenschaften.

Wir wissen, dass diese Gleichung immer durch $n+1$ Integrale integriert werden kann. Es folgt also aus den Gleichungen (E) ein System (F) der $n+1$ Integralgleichungen, die $n+1$ Gleichungen des Systems (E) ersetzen können. Wenn aus den Gleichungen (F) die Gleichung $F = 0$ nicht folgt, so braucht man nur diese letztere zu dem Systeme (F) hinzuzufügen und man bekommt das System (E). Wenn aber dies nicht der Fall ist, so braucht man nur noch die letzte $n+1^{te}$ von den Gleichungen (F) unabhängige Gleichung $\varphi(x_1^0 \ldots x_n) = 0$ des Systems (E) hinzuzufügen und bekommt dann das System (E).

Man kann beweisen, dass alle nichtsingulären Integrale der Differentialgleichung (1) nur aus diesen Systemen von $n+2$ Integralen der Differentialgleichung $\Omega_0 = dz_0 - p_1^0\, dx_1^0 \ldots p_n^0\, dx_n^0 = 0$ erhalten werden können, die immer dieselben zwei Integralgleichungen $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ enthalten, wo $\varphi = 0$ kein Integral der Differentialgleichungen (B_1) ist.

In der Tat es sei das System

$$\vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n), \quad F(x_1 \ldots p_n) = 0$$

der Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

aus dem Systeme

$$\Theta_i'(x_1^{00} \ldots . p_n^{00}) = 0 \quad (i = 1\ 2 \ldots n), \quad F(x_1^{00} \ldots . p_n^{00}) = 0,$$
$$\psi(x_1^{00} \ldots . p_n^{00}) = 0$$

der $n+2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung

$$\Omega_{00} = dz_{00} - p_1^{00} dx_1^{00} - \ldots - p_n^{00} dx^{00} = 0$$

erhalten, so dass man die Gleichungen

$$\vartheta_i (x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots n),$$

wo $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ ist, aus den Gleichungen

$$(\mathrm{c}') \qquad \Theta_i' (x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0 \quad (i = 1, \ldots n),$$

wo $F(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ ist, durch die Pfaffsche Transformation

$$x_i = x_i (x_1 x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \quad (i = 2 \ldots n), \quad z = z(x_1 x_1^{00} \ldots p_n^{00})$$
$$p_i = p_i (x_1 x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

wo $F(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ ist, bekommt.

Es seien die Formeln der anderen Pfaffschen Transformation

$$x_i = x_i (x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n), \quad z = z(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0),$$
$$p_i = p_i (x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, \ldots n),$$

wo $F(x_1 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1 \ldots p_n^0) = 0$ ist.

Wenn wir mit Hilfe dieser Formel die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 \ldots - p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ ist, und ihr Integralsystem $\vartheta_i (x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, wo $F x_1 \ldots p_n) = 0$ ist, transformieren, so bekommen wir

$$(\varepsilon) \qquad \Omega' = e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \ldots - p_n^0 dx_n^0) = 0,$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist,
und ihr Integralsystem

$$(\mathrm{c}) \qquad \Theta_i (x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist.

Wir wissen weiter, dass $2n-1$ Unabhängige der Veränderlichen $x_i z^0 p_i^0$ durch die $2n-1$ Unabhängigen der Veränderlichen $x_i^{00} z^{00} p_i^{00}$ sich ausdrücken lassen und wir die neuen Formeln der Transformation bekommen. Wir wollen jetzt die Differentialgleichung (ε) $\Omega' = 0$ und ihr Integralsystem (c) auf die Variablen $x_i^{00} z^{00} p_i^{00}$ transformieren. Das System (c) wird dann (c′) und die Gleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

wird dann

$$dz_{00} - p_1^{00} dx_1^{00} - \ldots - p_n^{00} dx_n^{00} = 0,$$

wo $F(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ ist.

Da aber das System (c′) das Integralsystem der letzten Gleichung ist, so ist das System (c) das Integralsystem der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n) = 0$ ist.

Wir können also das System

$$\vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1 \ldots n),$$

wo $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ ist, aus dem Integralsysteme

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist, der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist, erhalten, oder endlich, alle Systeme

$$\vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1 \ldots p_n) = 0$$

der $n+1$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega = 0$, die die nichtsingulären Integrale geben, können aus den Systemen der $n+2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

erhalten werden, die dieselben zwei Gleichungen

$$F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

enthalten.

Wir ersehen auch aus diesem Beweise, dass das Integral der gegebenen Differentialgleichung (1), das in Bezug auf eine Pfaffsche Transformation nichtsingulär ist, in Bezug auf jede Pfaffsche Transformation auch nichtsingulär ist, oder dass die Nichtsingularität der Integrale in Bezug auf alle Pfaffschen Transformationen eine invariante Eigenschaft ist.

6. Das Integral im gewöhnlichen Sinne hat die Eigenschaft, dass $p_1 \ldots p_n$ aus den $n+1$ Integralgleichungen der Differentialgleichungen $\Omega = 0$

$$\text{(a)} \qquad \vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1 \ldots p_n) = 0$$

sich bestimmen lassen.

Man kann alle Integrale im gewöhnlichen Sinne aus diesen Systemen der $n+2$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ erhalten, die in Bezug auf $p_1^0 \ldots p_n^0$ sich auflösen lassen. In der Tat es sei $\varphi(x_1 \ldots p_n) = 0$ die Gleichung, infolge deren die Gleichungen (a) nicht illusorisch werden, und solche, dass

$$\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

kein Integral der Differentialgleichungen (B_1) ist.

Wir können immer voraussetzen, dass die Gleichungen (a) aus $n+2$ Integralgleichungen

$$\begin{aligned} &\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \\ \text{(b)} \qquad &\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \end{aligned}$$

der Differentialgleichnng $\Omega_0 = 0$ erhalten werden, die die Gleichung $\varphi = 0$ enthalten.

Wenn wir also in den Gleichungen (a)

$$\vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots n), \quad \text{wo } F(x_1 \ldots p_n) = 0 \text{ ist,}$$

die Veränderlichen $x_i^0\, z^0\, p_i^0$ mit Hilfe der Formeln der Pfaffschen Transformation

$$\begin{gathered} x_i = x_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \ (i = 2 \ldots n) \ z_1 = z_1(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0), \\ p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \ (i = 1, \ldots n), \end{gathered}$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist, einführen, so bekommen wir

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist.

Da nach dieser Transformation x_1 verschwindet, so können wir vor der Ausführung der Transformation $x_1 = x_1^0$ setzen und bekommen nach der Transformation

$$\vartheta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots n),$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist.

Wir sehen also, dass das System (b) noch in der Form

$$\begin{aligned} &\vartheta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \ (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \\ \text{(b)} \qquad &\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \end{aligned}$$

dargestellt werden kann. Wenn also das System (a) in Bezug auf $p_1 \ldots p_n$ auflösbar sein soll, so soll auch das System (b) in Bezug auf $p_1^0 \ldots p_n^0$ auflösbar sein, und nur zwei von p_i^0 freien Gleichungen enthalten. Man erhält eine von diesen letzten, wenn man aus n von den Gleichungen

$$\vartheta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$

oder von den Gleichungen

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

$p^{10} \ldots p_n^0$ bestimmt und in die letzte Gleichung

$$\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

einführt. Man bekommt dann die Gleichung

$$\varphi(z^0 x_1^0 \ldots x_n^0) = 0,$$

die von p_i^0 frei und kein Integral des Systems (B_1) ist.

Wenn man umgekehrt das System der $n+2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$

$$\varphi(z_0 x_1^0 \ldots x_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$
$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{b'}$$

die nur zwei freie von p_i^0 enthalten, und deren eine z. B.

$$\varphi(z^0 x_1^0 \ldots x_n^0) = 0$$

kein Integral des Systems (B_1) ist, bestimmt hat, so kann man nach dem Satze II das Integral im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1) bekommen.

In der Tat wir sollen aus den Gleichungen (b') die Grössen $x_i^0\, z^0\, p_i^0$ mit Hilfe der Gleichungen

$$x_i = x_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0), \quad z = z(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0), \quad p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0)$$
$$i = 2 \ldots n), \qquad\qquad i = 1, 2 \ldots n)$$

eliminieren. Diese letzten sind in Bezug auf $x_2^0 \ldots p_n^0$ auflösbar und man bekommt nach der Elimination derselben

$$\varphi'(x_1^0 x_1 x_2 \ldots p_n) = 0, \quad \Theta'_i(x_1^0 x_1 \ldots p_n) = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$
$$F(x_1 \ldots p_n) = 0, \tag{c}$$

wo die erste Gleichung x_1^0 enthält, da die Gleichung $\varphi(x_1^0 \ldots z^0) = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist.

Man kann aus den letzten $n+1$ Gleichungen, wo $\varphi'(x_1^0 x_1 \ldots p_n)=0$ ist, $p_1 \ldots p_n$ bestimmen, da diese Gleichungen bei $x_1 = x_1^0$ die Form

$$\Theta_i(x_1^0 x_2 \ldots p_n) = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 x_2 \ldots p_n) = 0,$$

wo $\varphi(z x_1^0 x_2 \ldots p_n) = 0$, ist, annehmen.

Wenn wir also aus den Gleichungen (c) noch x_1^0 eliminieren, so bekommen wir $n+1$ Integralgleichungen

$$f(z x_1 \ldots x_n) = 0, \quad \vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n-1),$$
$$F(x_1 \ldots p_n) = 0,$$

die nur eine von p_i freie Gleichung

$$f(z x_1 \ldots x_n) = 0$$

enthalten, die ein Integral im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1) ist.

Um das Integralsystem (b′) von $n+2$ Gleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ mit den oben erwähnten Eigenschaften zu erhalten, sollen wir ein Integralsystem von $n+1$ Gleichungen dieser Differentialgleichung mit denselben Eigenschaften suchen und dann im Sinne des Satzes II und III verfahren.

In der Tat es sei

$$\begin{gathered} \varphi(z^0 x_1^0 \ldots x_n^0) = 0, \quad \psi(z^0 x_1^0 \ldots x_n^0) = 0, \\ \Theta_i(z^0 x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n-1), \\ F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \end{gathered} \tag{b′}$$

ein System der Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$, das nur zwei von p_i^0 freie Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ enthält, deren eine $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist.

Wir können zwei der Veränderlichen z^0, x_i^0, mit Hilfe der Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

aus der Gleichung $\Omega_0 = 0$ eliminieren. Die $n-1$ Koeffizienten bei den Differentialen der übrigen $n-1$ Veränderlichen $z_0 x_i^0$ sollen infolge der Gleichungen (b′) verschwinden. Wir können also diese letzten, gleich Null gesetzten, als $n-1$ unabhängige Gleichungen des Systems (b′) annehmen. Wenn wir noch die Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

hinzufügen, so sehen wir, dass das System (b′) in sich ein System der $n+1$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$

enthält, die nur zwei von p_i^0 freien enthalten, deren eine kein Integral des Systems (B_1) ist.

Dieses System der $n+1$ Integralgleichungen kann mit Hilfe der Multiplikatoren λ und μ in der Form dargestellt werden

$$1+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z^0}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z_0}=0,\quad \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i^0}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_i^0}-p_i^0=0\quad (i=1,2\ldots n)$$

$$\varphi(x_1^0\ldots x_n^0 z_0)=0,\quad \psi(x_1^0\ldots x_n^0 z^0)=0,$$

wo λ, μ eliminiert sein sollen.

Die Gleichungen

$$\varphi(x_1^0\ldots x_n^0 z^0)=0,\quad \psi(x_1^0\ldots x_n^0 z^0)=0,$$

deren eine kein Integral des Systems (B_1) sein soll, können im übrigen ganz willkürlich gewählt werden, sobald nur die Gleichung $F(x_1\ldots x_n z p_1\ldots p_n)=0$ von p_i nicht frei ist, was immer vorausgesetzt wird.

Man kann die folgende Eigenschaft des so erhaltenen Integrals der gegebenen Differentialgleichung (1)

$$f(z x_1\ldots x_n)=0$$

beweisen: dieses Integral genügt infolge der Relation

$$\varphi(x_1\ldots x_n z)=0$$

der anderen Relation

$$\psi(x_1\ldots x_n z)=0$$

In der Tat setzen wir voraus, dass die Gleichungen

$$f(x_1\ldots x_n z)=0,\quad \varphi(x_1\ldots x_n z)=0$$

verträglich sind. Da die letzte Gleichung kein Integral des Systems (B_1) ist, so können wir das System (b′) noch in der Form

$$f(z^0 x_1^0\ldots x_n^0)=0,\quad \vartheta_i(x_1^0\ldots p_n^0)=0\ (i=1,2\ldots n-1),$$
$$F(x_1^0\ldots p_n^0)=0,\quad \varphi(x_1^0\ldots x_n^0 z^0)=0 \qquad (b'')$$

darstellen, das nur zwei von p_i^0 freie Gleichungen

$$f(z^0 x_1^0\ldots x_n^0)=0,\quad \varphi(x_1^0\ldots x_n^0 z^0)=0$$

enthält. Da aber das System (b′) mit dem Systeme (b″) identisch ist, so folgt aus den Gleichungen

$$f(z^0 x_1^0\ldots x_n^0)=0,\quad \varphi(x_1^0\ldots x_n^0 z^0)=0$$

die Gleichung

$$\psi(x_1^0 \ldots x_n^0 z^0) = 0.$$

w. z. b. w.

Wir haben hiermit den Satz IV bewiesen:

Satz IV. Wenn man die Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n+2$ Integralgleichungen der Gestalt

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x_1^0 \ldots x_n^0 z^0) = 0, \quad \psi(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0,$$
$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \;\; i = 1, 2, \ldots n-1), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

integriert hat, die nur zwei von p_i^0 freien Gleichungen enthalten, deren eine $\varphi(x_1^0 \ldots x_n^0 z^0) = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist, und wenn man die Grössen $x_i^0 z^0 p_i^0 p_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ aus den Gleichungen (b) und den Gleichungen

$$(a) \qquad x_i = x_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n) \;\; (i = 1 \ldots n), \quad z = z(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0),$$
$$p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \;\; (i = 1, 2 \ldots n),$$

die die Hauptintegrale des Systems (B_1) in Bezug auf $x_1 = x_1^0$ sind, eliminiert hat, so erhält man das Integral $f(z x_1 \ldots x_n) = 0$ im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1). Dieses Integral hat die Eigenschaft, dass es infolge der Relation $\varphi = 0$ der anderen Relation $\psi = 0$ genügt. Alle Integrale im gewöhnlichen Sinne können in dieser Weise erhalten werden.

7. Man nennt das Integralsystem

$$\text{(a)} \qquad \vartheta_i(x_1 \ldots p_n), \; (i = 1, 2, \ldots n), \; F(x_1 \ldots p_n) = 0$$

der Differentialgleichung $\Omega = 0$ ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (1), wenn die Gleichungen

$$\vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0. \;\; (i = 1, 2, \ldots n),$$

n willkürliche Konstanten $C_1 \ldots C_n$ enthalten, von denen die gegebene Gleichung (1) frei ist und die aus diesen Gleichungen sich bestimmen lassen.

Wenn dabei die Gleichungen (a) nur eine von p_i freie Gleichung

$$f(z x_1 \ldots x_n C_1 \ldots C_n) = 0$$

enthalten, so ist diese letzte das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne.

Man kann alle vollständigen Integrale aus diesen Systemen von $n+2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$
$$\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

erhalten, wo nur die Gleichungen

$$\Theta_i = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$C_1 \ldots C_n$ enthalten und in Bezug auf dieselben auflösbar sind. In der Tat die Gleichung $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ soll von den willkürlichen Konstanten $C_1, C_2 \ldots C_n$ frei sein, da sie die Relation zwischen den Integrationskonstanten $x_i^0\, z^0\, p_i^0$ der $2n$ Integrale des Systems (B) bedeutet. Wir zeigen jetzt, dass wir immer voraussetzen können, dass die Gleichungen $\Theta_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ in Bezug auf $C_1 \ldots C_n$ auflösbar seien.

In der Tat es sei die Gleichung $\varphi = 0$, die kein Integral des Systems (B_1) ist und keine willkürliche Konstanten enthält, mit den Gleichungen (a) verträglich.

Wir wissen (Nr. 6), dass in diesem Falle das System der $n+2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$
$$\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \tag{b}$$

aus denen das Integral (a) erhalten werden kann, in der Form

$$\vartheta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$
$$\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \tag{b'}$$

dargestellt werden kann, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wir haben also den Satz V:

Satz V. Wenn man die Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0\, dx_1^0 \ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0$$

durch $n+2$ Integrale

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$
$$\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \tag{b}$$

von der Eigenschaft, dass nur die n ersten Gleichungen n willkürliche Konstanten $C_1 \ldots C_n$ enthalten, in Bezug auf welche sie auflösbar sind, und wo die Gleichung $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist, integriert hat, und wenn man die Grössen $x_i^0\, z_0\, p_i^0 (i = 1, 2 \ldots n)$ aus den Gleichungen (b) und den Gleichungen

$$x_i = x_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \ (i = 2 \ldots n), \quad z = z_0(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0),$$

$$(\alpha) \qquad p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \ (i = 1 \ldots n)$$

eliminiert hat, so bekommt man das vollständige Integral

$$\vartheta_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1 \ldots p_n) = 0$$

der gegebenen Differentialgleichung (1).

Alle vollständigen Integrale können in dieser Weise erhalten werden. Wenn dieses vollständige Integral auch das Integral im gewöhnlichen Sinne sein soll, so muss das System (b) nur zwei von p_i^0 freien Gleichungen enthalten.

Wir können also folgenden Satz VI aussprechen:

Satz VI. Wenn man die Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ durch $n + 2$ Integrale:

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots n),$$

$$(b) \qquad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$

von der Eigenschaft, dass nur die n ersten Gleichungen n willkürliche Konstanten $C_1 \ldots C_n$ enthalten, in Bezug auf welche sie auflösbar sind, und dass $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist, die nur zwei von p_i^0 freie Gleichungen enthalten, deren eine kein Integral des Systems (B_1) ist, integriert hat, und wenn man die Grössen $x_i^0 z^0 p_i^0 p_i \ (i = 1, 2 \ldots n)$ aus den Gleichungen (b) und (α) eliminiert hat, so erhält man das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne.

Alle solche Integrale können in dieser Weise erhalten werden. Man bekommt das vollständige Integral, wenn das System (b) z. B. die Form hat:

$$x_i^0 = C_i \ (i = 1, 2 \ldots n), \quad \varphi(z^0 x_1^0 \ldots x_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$

wo $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist.

Man bekommt das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne, wenn das System (b) z. B. die Form hat

$$z^0 = \sum_1^n {}_i x_i^0 p_i^0, \ p_i^0 = C_i \ (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$

wenn selbstverständlich die gegebene Differentialgleichung $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ die Form $z - x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} - \ldots - x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$ nicht besitzt.

Wir wissen, dass bei der Integration der Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 \ldots - p_n dx_n = 0,$$

wie im allgemeinen bei der Integration der Gleichung

$$df - F_1 df_1 - \ldots - F_n df_n = 0$$

eines der Integrale von der Form

$$\varphi(z x_1 \ldots x_n) = 0$$

ganz willkürlich gewählt werden kann.

Die ganze soeben entwickelte Theorie zeigt, dass bei der Integration der Differentialgleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

eines der Integrale ganz willkürlich in der Form

$$F(x_1 x_2 \ldots p_n) = 0$$

gewählt werden kann, was übrigens aus der Natanischen Theorie des Pfaffschen Ausdruckes $X_1 dx_1 + \ldots + X_p dx_p$ ungerader Klasse $2n+1$, wo $2n+1 = p$ ist, bekannt ist[1]).

8. Die entwickelte Theorie enthält in rein analytischer Form die Sätze, die S. Lie mit der gemischten analytisch-geometrischen Methode gefunden hat (Math. Ann., Bd. 9). Ich beschränke mich nur darauf, dass ich einige der oben bewiesenen Sätze in der Form von S. Lie wiederhole, wobei ich die Begriffe des Elements $(z x_i p_i)$ des $n+1$-dimensionalen Raumes, des Elementvereins M_k von ∞^k Elementen, des charakteristischen Streifens und der Integralmannigfaltigkeit der gegebenen Gleichung (1) $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ als bekannt voraussetze.

Der *Satz I* kann zweierlei geometrische Bedeutung haben:

a) Wenn $x_i^0 z^0 p_i^0$ als konstant betrachtet werden, so gilt der Satz: Alle benachbarten Elemente $(z x_i p_i)$ des charakteristischen Streifens der gegebenen Differentialgleichung $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ liegen vereinigt;

b) wenn zwei benachbarte Elemente $(z_0 x_i^0 p_i^0)$ und $(z_0 + dz_0 \; x_i^0 + dx_i^0, \; p_i^0 + dx_i^0)$ zweier charakteristischen Streifen vereinigt liegen, d. h. wenn

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0 \text{ ist,}$$

[1]) „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen" J. Crelle, Bd. 58.

so liegen alle benachbarten Elemente $(z x_i p_i)$ und $(z + dz,\ x_i + dx_i,\ p_i + dp_i)$ dieser Streifen auch vereinigt.

Satz II. Um alle Integralmannigfaltigkeiten M_n der gegebenen Differentialgleichung $F(x_1 \ldots p_n) = 0$, die von charakteristischen Streifen erzeugt sind, zu bekommen, soll man irgend eine Integralmannigfaltigkeit M_{n-1} derselben Gleichung nehmen, die von den charakteristischen Streifen nicht erzeugt ist[1]), und dann durch jedes Element derselben die charakteristischen Streifen führen.

Satz III. Um eine Integralmannigfaltigkeit M_{n-1} der Gleichung $F = 0$, die von den Charakteristiken nicht erzeugt ist, zu erhalten, soll man irgend einen Elementverein M_n nehmen. Ist dieser letzte keine Integralmannigfaltigkeit M_n, so soll man die Koordinaten der Elemente $(z x_i p_i)$ desselben noch der Bedingung $F = 0$ unterwerfen, vorausgesetzt, dass der Elementverein M_n nicht von den charakteristischen Streifen erzeugt ist; ist dagegen M_n die Integralmannigfaltigkeit M_n der Differentialgleichung $F = 0$, so soll man die Elemente derselben der ganz willkürlichen Relation $\varphi(x_1 \ldots p_n) = 0$ unterwerfen, die nur einer Bedingung genügen soll, dass die erhaltene Integral-M_{n-1} von den Charakteristiken nicht erzeugt ist.

Satz IV. Um die Integralmannigfaltigkeit M_n der Differentialgleichung $F = 0$, die von den charakteristischen Streifen erzeugt ist und als Punkt-Mannigfaltigkeit n-fach ausgedehnt ist zu erhalten, kann man irgend eine Integralmannigfaltigkeit M_{n-1} derselben Gleichung nehmen, die als Punkt-Mannigfaltigkeit nur $(n-1)$-fach ausgedehnt ist und mit derselben im Sinne des Satzes II verfahren. Dieses Integral ist nur dann möglich, wenn der charakteristische Streifen das Punktgebilde ist.

Einige im §. 7 erhaltenen analytischen Ergebnisse können geometrisch in folgender Weise interpretiert werden. Der Inbegriff ∞^n Integralmannigfaltigkeiten M_n der Gleichung $F = 0$ wird das vollständige Integral der gegebenen Gleichung genannt. Um das vollständige Integral zu bekommen, kann man z. B. die charakteristischen Streifen durch den Punkt $(z x_i)$ allgemeiner Lage der Mannigfaltigkeit

[1]) Das ist der geometrische Sinn dieses Umstandes, dass eine der Integralgleichungen der Differentialgleichung $dz_0 - p_1^0\, dx_1^0 - \ldots\ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0$, $\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $(i = 1, 2 \ldots n)$, $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ nämlich $\varphi = 0$, kein Integral des Systems (B_1) ist.

$$\varphi(x_1 \ldots x_n z) = 0$$

führen, vorausgesetzt, dass diese letzte von den charakteristischen Streifen nicht erzeugt sei.

9. Man sieht leicht aus der Darstellung der Theorie, dass sie ein willkürliches Element enthält, und zwar die Wahl der Relation $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ fast willkürlich ist. Wir haben auch bewiesen, dass die Beschränkung der Form dieser Funktion keinen Einfluss auf die Allgemeinheit der Ergebnisse ausübt, da die Nichtsingularität der Integrale bei allen Pfaffschen Transformationen invariant bleibt. Wir können daher dieser Gleichung eine möglichst einfache Form geben, wir können z. B. voraussetzen, dass $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0)$ nur eine der Veränderlichen enthält unter der selbstverständlichen Bedingung, dass $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist. Da wir vorausgesetzt haben, dass $\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0$ ist, so können wir $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = \varphi(x_1^0)$ setzen, oder dass $x_1^0 =$ num. konst. z. B. h ist.

Wir erhalten bei dieser Voraussetzung die Methode von Cauchy in ihrer allgemeinsten Form.

Der Satz II drückt sich so aus:

Um alle nichtsingulären Integrale der Differentialgleichung $F = 0$ zu erhalten, soll man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 2$ Integrale

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad x_1^0 = h, \tag{a}$$

integrieren und dann die Grössen

$$x_2^0 \ldots x_n^0 z^0 p_1^0 \ldots p_n^0$$

aus den Gleichungen

$$\Theta_i(h, x_2^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad F(h x_2^0 \ldots p_n^0) = 0$$

$$x_i = x_i(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0), \quad z = z(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0), \quad p_i = p_i(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0)$$

$$(i = 2 \ldots n) \qquad\qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

eliminieren, wo die $2n$ letzten Gleichungen $2n$ Hauptintegrale des Systems (B_1)

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}}$$

in Bezug auf $x_1 = h$ sind.

Der Satz III geht in folgenden Satz über:

Wenn man das System $n+2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ von der Form

$$\Theta_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$
$$x_1^0 = h\left(\frac{\partial F}{\partial p_1^0} \mid 0\right),$$

wo h den gegebenen Wert hat, erhalten will, so soll man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_2^0\, dx_2^0 - \ldots - p_n^0\, dz_n^0 = 0$$

durch irgend ein System der n Gleichungen integrieren und dann die Gleichungen

$$F(x_1^0 \ldots x_n^0\, z^0\, p_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad x_1^0 = h$$

hinzufügen. Also der Satz II nimmt schliesslich die Form an:

Um alle nichtsingulären Integrale der Differentialgleichung $F = 0$, wo $\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0$ ist, zu bekommen, soll man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_2^0\, dx_2^0 - \ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0$$

durch irgend ein System von n Integralen

$$\Theta_i(x_2^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

integrieren und dann die Grösse

$$x_2^0 \ldots x_n^0\, z^0\, p_1^0 \ldots p_n^0$$

aus den Gleichungen

$$\Theta_i(x_2^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad (i = 1 \ldots n), \quad F(h \ldots p_n^0) = 0,$$
$$x_i = x_i(x_1\, h\, x_2^0 \ldots p_n^0), \quad (i = 2 \ldots n)$$
$$z = z\,(x_1\, h\, x_2^0 \ldots p_n^0).$$
$$p_i = p_i(x_1\, h\, x_2^0 \ldots p_n^0), \quad (i = 1 \ldots n),$$

wo $2n$ letzte Gleichungen $2n$ Hauptintegrale des Systems (B_1) in Bezug auf $x_1 = h$ sind, eliminieren.

Satz IV. Wenn man die Differentialgleichung

$$dz^0 - p_2^0\, dx_2^0 - \ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0$$

durch n Integrale

$$\psi(x_2^0 \ldots x_n^0\, z^0) = 0, \quad \Theta_i(x_2^0 \ldots x_n^0\, z^0 \ldots p_n^0) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots n-1),$$

wo es nur eine von p_i^0 freie Gleichung $\psi = 0$ gibt, integriert hat, und wenn man die Grössen $x_2^0 \ldots p_1^0 \ldots p_n^0$, $p_1 \ldots p_n$ aus den Gleichungen

$$\psi(x_2^0 \ldots x_n^0 z^0) = 0, \quad \Theta_i(x_2^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n-1)$$
$$F(h, x_2^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad x_i = x_i(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0), \quad (i = 2 \ldots n),$$
$$z = z(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0), \quad p_i = p_i(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0), \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_1^0} \neq 0\right)$$

eliminiert hat, wo die $2n$ letzten die Hauptintegrale des Systems (B_1) in Bezug auf $x_1 = h$ sind, so bekommt man das Integral

$$f(z x_1 \ldots x_n) = 0$$

in gewöhnlichem Sinne. Das letzte hat die Eigenschaft, dass es bei $x_1 = h$ $\psi(x_2 \ldots x_n z) = 0$ wird.

Satz VI. Wenn man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_2^0 dx_2^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch n Integrale

$$\psi(x_2^0 \ldots x_n^0 z^0) = 0, \quad \Theta_i(x_2^0 \ldots z^0 p_2^0 \ldots p_n^0) = 0,$$

wo es nur eine von p_i^0 freie Gleichung $\psi = 0$ gibt, die in Bezug auf n willkürlichen Konstanten $C_1 \ldots C_n$ auflösbar sind, integriert hat, und wenn man die Grössen $x_i^0 z p_i^0 p_i$ aus den Gleichungen

$$\psi(x_2^0 \ldots x_n^0 z^0) = 0, \quad \Theta_i(x_2^0 \ldots z^0 p_2^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots n-1),$$
$$F(h x_2^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad x_i = x_i(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0), \quad (i = 2 \ldots n),$$
$$z = z(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0), \quad p_i = p_i(x_1 h x_2^0 \ldots p_n^0), \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_1^0} \neq 0\right)$$

eliminiert hat, so bekommt man das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1).

Dieses Integral hat die Eigenschaft, dass es bei $x_1 = h$ die Form

$$\psi(x_2 \ldots x_n z) = 0$$

annimmt.

10. Wir wollen jetzt einen besonderen Fall in Betracht ziehen, nämlich den Fall, wenn die gegebene Differentialgleichung die Form

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + H\left(x_1 \ldots x_n \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

hat. Wir werden sie nach der Methode von Cauchy integrieren.

Das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (B_1) hat in diesem Falle die Form

$$dx_1 = \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1 + \sum p \frac{\partial H}{\partial p}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}.$$

und sein System der Hauptintegrale in Bezug auf $x_1 = h$ die Form

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_2^0 \ldots x_n^0 p_2^0 \ldots p_n^0), \quad (i = 2 \ldots n), \\ z &= z_0 + z(x_1 x_2^0 \ldots x_n^0 p_1^0 \ldots p_n^0), \\ p_i &= p_i(x_1 x_2^0 \ldots x_n^0 p_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots n). \end{aligned}$$

Um die Gleichung (1) zu integrieren, müssen wir die Gleichung

$$dz_0 - p_2^0 dx_2^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch n Integrale

$$(\mathrm{L}) \qquad \Theta_i(x_2^0 \ldots z_0 p_2^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

integrieren (Satz II, III) und dann die Grössen $x_2^0 \ldots x_n^0 z^0 p_1^0 \ldots p_n^0$ aus den Gleichungen

$$\Theta_i = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad p_1^0 + H(x_1^0 h \ldots p_n^0) = 0$$

und den Gleichungen (α) eliminieren.

Man wird nach der Elimination p_1^0 das System

$$(\mathrm{M}) \quad \Theta_i(x_2^0 \ldots p_2^0) = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad p_1 + H(x_1 \ldots p_n) = 0$$

$$(\alpha') \quad \begin{cases} x_i = x_i(x_1 x_2^0 \ldots p_n^0), \; p_i = p_i(x_1 x_2^0 \ldots p_2^0 \ldots p_n^0), \; (i = 2, 3 \ldots n) \\ z = z_0 + z'(x_1 x_2^0 \ldots x_n^0 p_2^0 \ldots p_n^0) \end{cases}$$

wo die $2n - 1$ Gleichungen (α') die Hauptintegrale des Systems

$$(\mathrm{B}_2) \qquad \begin{aligned} dx_1 = \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H} = \\ = -\frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} \end{aligned}$$

und daher wo

$$z = z_0 + \int_h^{x_1} \left(\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H \right) dx_1 \text{ ist, erhalten.}$$

Wenn man aus den $n+1$ ersten Gleichungen (M) die Grössen $x_2^0 \ldots x_n^0 p_2^0 \ldots p_n^0 z^0$ mit Hilfe der Gleichungen (α) eliminiert, so bekommt man das Integral

$$\vartheta_i (x_1 x_2 \ldots z p_2 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad p_1 + H = 0 \qquad \text{(N)}$$

der Differentialgleichung (1).

Wenn diese letzten Gleichungen in Bezug auf $p_1 \ldots\ldots p_n$ und in Bezug auf $C_1 \ldots C_n$ auflösbar sind, dann bekommt man nach der Elimination der Grössen $p_1 \ldots p_n$ das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1).

Alle solche Integrale können erhalten werden, wenn wir die Gleichungen (L) so wählen, dass sie in Bezug auf $p_2^0 \ldots p_n^0$ und $C_1 \ldots C_n$ auflösbar sind, z. B. wenn man für das System (L) das System:

$$z_0 = C_2 x_2^0 + \ldots + C_n x_n^0 + C_1$$
$$p_2^0 = C_2 \ldots p_n^0 = C_n$$

nimmt.

Jacobi hat bei der Integration der Gleichung (1) für das System (L) das System

$$z_0 = C_1, x_2^0 = C_2 \ldots x_n^0 = C_n$$

genommen. Dieses System führt nur dann zum gewöhnlichen vollständigen Integrale, wenn aus den $2n-1$ Gleichungen

$$x_i = x_i (x_1 C_2 \ldots C_n p_2^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n),$$
$$z = C_1 + \int_h^{x_1} \left(\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H \right) dx_1 \qquad (\alpha'')$$
$$p_i = p_i (x_1 C_2 \ldots C_n p_2^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n)$$

nur eine von $p_2 \ldots p_n$ freie Relation folgt, d. h. wenn die $n-1$ ersten Gleichungen des Systems (α'') in Bezug auf $p_2^0 \ldots p_n^0$ auflösbar sind.

Da das nicht immer der Fall ist, so setzt A. Mayer für das System (L) das System

$$z_0 = C_2 x_2^0 + \ldots + C_n x_n^0 + C_1$$
$$p_i^0 = C_i \quad (i = 2 \ldots n),$$

so dass A. Mayer nach dem Satz IV verfährt, während Jacobi dieses Verfahren nicht benutzt.

G. Darboux[1]) hat die Methode von Jacobi vervollständigt und seine Gedanken bewahrt, indem er gezeigt hat, wie man verfahren soll, wenn aus den Gleichungen

$$(S) \qquad x_i = x_i(x_1 x_2^0 \ldots x_n^0 p_2^0 \ldots p_n^0)$$

die von p_i^0 freien Relationen folgen, um das vollständige gewöhnliche Integral zu erhalten, ohne den Satz IV zu benutzen. Er zeigt, dass, wenn aus den Gleichungen (S) die Relationen

$$x_2^0 - \varphi_2(x_1 \ldots x_n x_{r+1}^0 \ldots x_n^0) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_r^0 - \varphi_r(x_1 \ldots x_n x_{r+1}^0 \ldots x_n^0) = 0,$$

folgen, man die Gleichungen (S) in Bezug auf $x_2^0 \ldots x_r^0 p_{r+1}^0 \ldots p_n^0$ auflösen kann.

Wenn wir jetzt für das System (L) das folgende System

$$(L') \qquad \begin{array}{ll} z_0 = C_2 x_2^0 + \ldots + C_r x_r^0 + C_1, & x_{r+1}^0 = C_{r+1} \ldots x_n^0 = C_n, \\ p_2^0 = -C_2 \ldots, & p_r^0 = -C_r. \end{array}$$

nehmen, so bekommen wir dann das vollständige gewöhnliche Integral der Gleichung (1), da dann aus den Gleichungen (L′) und

$$x_i = x_i(x_1 x_2^0 \ldots x_n^0 p_2^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n),$$

$$z = z_0 + \int_{x_1^0}^{x_1} \left(\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H \right) dx_1,$$

$$p_i = p_i(x_1 x_2^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 2 \ldots n), \qquad p_1 + H = 0$$

nur eine Relation zwischen zx folgt.

Der innere Unterschied zwischen den Methoden von A. Mayer und G. Darboux besteht in der Benutzung oder Nichtbenutzung des Satzes IV.

Wenn $r = n$ ist, so stimmen beide Methoden überein.

Es ist klar, dass diese Methoden die einfachsten ihrer Art sind.

§ 3.

Wir wollen jetzt zur Ermittelung der singulären Integrale übergehen.

[1]) Bull. d. Sc. math., Bd. 8 (sér. I); Compt. Rend. 79, 80.

Wir haben gesehen, dass die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 \ldots - p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \ldots . p_n) = 0$ ist, durch die Transformation mit Hilfe der Formel

$$x_1 = x_1(y_1 x_1^0 \ldots p_n^0), \quad x_i = x_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \ (i = 2 \ldots n)$$
$$z = z(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0), \quad p_i = p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \ (i = 1, 2 \ldots n), \ (\alpha)$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist,
die Form

$$\Omega' = e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0) = 0$$

annimmt. Wenn $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ ist, so ist dann $\lambda = 0$. Wenn dagegen $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ist, so ist dann λ willkürlich, aber nicht gleich Null.

Das Integral der gegebenen Differentialgleichung (1) heisst singulär, wenn es durch Nullsetzung des Faktors

$$e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0}$$

erhalten werden kann, insofern es durch Nullsetzung des Faktors

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0$$

nicht erhalten werden kann.

Das singuläre Integral ist nun dann möglich, wenn $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ist.

Da in diesem Falle λ willkürlich ist, so können wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, $\lambda = 1$ setzen.

Wir müssen also, um das singuläre Integral zu erhalten,

$$e^{y_1 - y_1^0} = 0 \qquad (\beta)$$

setzen.

Wenn wir diese Gleichung auf die neuen Veränderlichen transformieren, so bekommen wir die Relation

$$\vartheta_1(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0.$$

Es ist klar, dass die Formeln der Transformation (α) infolge der Relation

$$e^{y_1 - y_1^0} = 0 \qquad (\beta)$$

noch $n-1$ Relationen zwischen z, x_i, p_i geben, da wir die Gleichung $\Omega' = 0$ nur mit Hilfe von mindestens n Gleichungen zum Verschwinden bringen können.

Diese n Gleichungen zwischen $x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n$ müssen aus den Formeln der Transformation (α) und der Gleichung (β) bei der willkürlichen Wahl der Funktion $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, die nur kein Integral des Systems (B_1) sein soll, folgen, da die Nichtsingularität, und folglich die Singularität des Integrals eine invariante Eigenschaft gegen alle Pfaffsche Transformationen ist.

Wenn wir zu diesen n Gleichungen

$$\vartheta_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n).$$

noch die Gleichung $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ hinzufügen, so bekommen wir das ganze System (γ) der $n+1$ Integralgleichungen der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 \ldots - - p_n dx_n = 0,$$

das uns das singuläre Integral der Differentialgleichung (1) gibt, insofern dieses System durch die Integration der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

wo $F(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist, nicht erhalten werden kann.

Wenn das System (γ) in Bezug auf p_i auflösbar ist, so bekommt man das singuläre Integral $z = f(x_1 \ldots x_n)$ im gewöhnlichen Sinne.

Wir werden zeigen, wie das singuläre Integral, wenn es existiert, aus dem vollständigen Integral erhalten werden kann.

Es sei unsere Gleichung (1) von der Form

$$F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$$

und es sei ihr vollständiges Integral von der Form

$$(\delta) \qquad F = 0, \quad F_1 = C_1, \quad F_n = C_n.$$

Wenn wir n von den Veränderlichen x_i z p_i auf die neuen $C_1 = F_1, \ldots C_n = F_n$ transformieren, so bekommen wir

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 \ldots - p_n dx_n = A_1 dC_1 + A_2 dC_2 + \ldots + A_n dC_n$$

oder

$$\Omega' = A_1 \left(dC_1 + \frac{A_2}{A_1} dC_2 + \ldots + \frac{A_n}{A_1} dC_n \right).$$

Wir können beweisen, dass $2n-1$ Funktionen

$$A_1 : A_2 : \ldots : A \quad \text{und} \quad F_1, F_2, \ldots F$$

unabhängig sind.

In der Tat es sei

$$\Theta\left(\frac{A_2}{A_1} \ldots \frac{A_n}{A_1} F_1 F_2 \ldots F_n\right) = 0.$$

Wir können den Differentialausdruck

$$dC_1 + \frac{A_2}{A_1} dC_2 + \ldots + \frac{A_n}{A_1} dC_n,$$

wo wir alle Veränderlichen für einen Augenblick als unabhängige betrachten, durch n Gleichungen, deren eine willkürlich ist, zum verschwinden bringen.

Wenn wir dieser letzten die Form

$$\Theta\left(\frac{A_2}{A_1}, \ldots \frac{A_n}{A_1} C_1 C_2, \ldots C_n\right) = 0$$

geben und $\frac{A_2}{A_1}, \ldots\ldots \frac{A_n}{A_1} C_1 C_2 \ldots\ldots C_n$ durch ihre Werte ersetzten, so folgt, dass die Differentialgleichung

$$dC_1 + \frac{A_2}{A_1} dC_2 + \ldots + \frac{A_n}{A_1} dC_n = 0$$

und also auch $\Omega' = 0$ nur durch $n-1$ Integrale sich integrieren lässt, was unmöglich ist. So bekommen wir

$$\Omega' = A_1\left(dC_1 + U_2\, dC_2 + \ldots + U_n\, dC_n\right),$$

wo $U_2 = \frac{A_2}{A_1}, \ldots U_n = \frac{A_n}{A_1}$, $C_1 \ldots C_n$ unabhängige Variable sind.

Wir sehen also, dass, wenn wir $2n$ von den Veränderlichen $x_i z p_i$, wo $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ ist, auf die neuen Variablen $y_1 U_2 \ldots U_n C_1 \ldots C_n$ mit Hilfe der Formeln

$$\varphi(x_1 \ldots p_n) = y_1, \quad U_i = \frac{A_i}{A_1} \quad (i = 2 \ldots n),$$

$$C_i = F_i(x_1 \ldots p_n) \quad (i = 1 \ldots n).$$

wo φ willkürlich gewählt ist, transformieren, der Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 \ldots - p_n dx_n,$$

wo $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ ist, eine der neuen Veränderlichen, nämlich y_1, nur im gemeinschaftlichen Faktor A_1 enthalten kann. Also ist diese Transformation die Pfaffsche Transformation. Da wir $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ voraussetzen, so enthält A_1 die Veränderliche y_1 und also $A_1, U_2, \ldots U_n C_1, \ldots C_n$ sind unabhängig. Um das singuläre Integral zu erhalten, müssen wir

$$A_1 = 0$$

setzen. Es folgen aus den Formeln der Transformation noch $n-1$ Gleichungen

$$A_2 = 0 \ldots A_n = 0, \text{ da } U_2 \ldots U_n \text{ von } A_1 \text{ unabhängig sind.}$$

Wir sehen also, dass das singuläre Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$$

die Gleichungen

$$A_1 = 0 \ldots A_n = 0$$

erfüllt. Die Gleichungen $A_i = 0$, $(i = 1, 2 \ldots n)$, $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ stellen das singuläre Integral dar, insofern es mit Hilfe der Integration der Differentialgleichung $dC_1 + U_2 dC_2 + \ldots + U_n dC_n = 0$ nicht erhalten werden kann.

Man kann diese Gleichungen in anderer Form darstellen:

Es folgt nämlich aus den Gleichungen (δ) das System der Gleichungen

$$z = f(x_{k+1} \ldots x_n), \quad x_i = f_i(x_{k+1} \ldots x_n) \quad (i = 1, 2 \ldots k), \quad (k \geqslant 0).$$

Wir können nach dem Satze § 1, Nr. 2 das System (δ) in der Form

$$H = f - f_1 p_1 - \ldots f_k p_k, \quad x_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \; (i = 1, 2 \ldots k), \qquad (\varepsilon)$$

$$p_{k+j} = \frac{\partial H}{\partial x_{k+j}} \; (j = 1, 2 \ldots n-k)$$

darstellen. Dieses System ist das System der Integralgleichungen der Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = dH + x_1 dp_1 + \ldots + x_k dp_k - \\ - p_{k+1} dx_{k+1} - \ldots - p_n dx_n = 0 .$$

Die Gleichungen (ε) enthalten $C_1 C_2 \ldots C_n$, die aus denselben sich bestimmen lassen. Führen wir die neuen Veränderlichen $C_1 C_2 \ldots C_n$ ein, so folgt, dass die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 \ldots p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$, die Form annimmt:

$$\Omega' = \frac{\partial H}{\partial C_1} dC_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial C_n} dC_n = 0 .$$

Es folgt aus dieser nach dem oben gesagten, dass das singuläre Integral den Gleichungen $\frac{\partial H}{\partial C_1} = 0, \ldots \frac{\partial H}{\partial C_n} = 0$ genügt. Wenn wir $C_1 \ldots C_n$ aus diesen letzten und aus den Gleichungen (δ) eliminieren, so bekommen wir $n + 1$ Gleichungen, die das singuläre Integral darstellen können.

Wenn dieses vollständiges Integral ein gewöhnliches ist, so hat es die Form

$$z = f(x_1 \ldots x_n C_1 \ldots C_n), \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots p_n = \frac{\partial f}{\partial x}$$

und das singuläre Integral erfüllt die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial C_1} = 0 \ldots \frac{\partial f}{\partial C_n} = 0 .$$

---

32. M. LADISLAS GORCZYŃSKI. **Badania nad przebiegiem rocznym insolacyi.** ***(Etudes sur la marche annuelle de l'insolation).*** Mémoire présenté par M. M. P. Rudzki m. c.

Introduction.

Les présentes recherches sur la marche annuelle de l'insolation s'appuient sur les matériaux actinométriques recueillis à Varsovie en 1901; les mesures de l'insolation ont été effectuées avec l'actinomètre système Ångström-Chwolson, placé sur le balcon du sud de l'Observatoire (situé entre le Jardin des Plantes et le parc de Łazienki); au commencement de l'année 1902 cet actinomètre a été transporté vers le centre de la ville et depuis lors les mesu-

res furent effectuées sur le balcon supérieur de la Station Centrale Météorologique de Varsovie (auprès du Musée). Les matériaux de l'année 1901 ont servi presque exclusivement à la déduction des valeurs de réduction et ils forment la base principale de nos recherches; les matériaux beaucoup moins nombreux de l'année 1902 ont été employés surtout à dresser des tableaux mensuels et annuels; en comparant les valeurs obtenues durant l'une et l'autre année, il faut tenir compte du changement du lieu d'observation.

Bien que les matériaux rassemblés à Varsovie aient fourni une base suffisante pour effectuer une grande partie des réductions fondamentales et indispensables pour les raisonnements ultérieurs, bien qu'ils aient pu servir à rendre compte du caractère général de la marche annuelle de l'insolation, cependant, pour compléter les recherches, on a utilisé des mesures effectuées au moyen d'un semblable actinomètre à Pavlovsk, à Pétersbourg et à Catherinenbourg. Ces données ont contribué dans une large mesure à élucider quelques détails de la question; elles embrassent une période de 18 ans et il est clair que l'étude en peut avoir une grande importance, ne fût-ce que pour vérifier les conséquences déduites ailleurs.

A quelques exceptions près (période de 1892/93 à Pavlovsk et celle de 1896—1898 à Catherinenbourg), ces matériaux n'ont pas été suffisamment traités; afin de pouvoir s'en servir pour le présent travail, on avait été obligé de les traiter d'après les mêmes règles qui avaient été appliquées aux résultats bruts des mesures faites à Varsovie, après les avoir préalablement transformés en valeurs absolues. Ce travail préparatoire consistait à déterminer la hauteur du soleil pour les jours et les heures d'observation, à trouver d'après les données des instruments enrégistreurs les valeurs horaires de l'humidité absolue, et enfin à former des moyennes. Ce n'est qu'après avoir subi ce travail préparatoire que ces données peuvent servir de base à l'opération de la réduction et aux études ultérieures.

Le but du présent travail est d'expliquer la marche annuelle de l'insolation, de déterminer le rapport qui existe entre la courbe annuelle de l'insolation et les autres facteurs météorologiques et de donner aux résultats des mesures actinométriques une forme systématique qu'ils ne possédaient pas jusqu'à présent et qui permettrait de s'en servir d'une manière plus exacte pour les comparaisons et

rapprochements ultérieurs. A côté de l'explication des causes théori ques et du caractère général de la courbe annuelle de l'insolation. c'est sur ce dernier point que nous avons surtout concentré notre attention.

I.

§ 1. La construction de l'actinomètre de M. Chwolson est basée sur l'application de la méthode connue sous le nom de méthode d'Ångström; le moment essentiel de celle-ci consiste dans l'observation des différences de température de deux corps dont l'un est exposé au soleil tandis que l'autre est plongé dans l'ombre. Cependant Ångström lui-même appliquait aux mesures de l'insolation la méthode des différences égales de température (au commencement et à la fin de chaque observation), tandis que la méthode des périodes égales de temps, élaborée par M. Chwolson, consiste à mesurer les différences variables de température de deux corps, observées à des intervalles égaux. Chaque mesure dure d'après M. Chwolson $2^1/_2$ minutes, à compter du moment où les écrans de l'actinomètre ont été changés de place, et fournit 5 valeurs de température pour chacun des deux corps, correspondant à cinq moments de temps distants de 30 sec. les uns des autres. 5 différences obtenues de cette façon fournissent deux valeurs numériques de l'insolation, indépendantes l'une de l'autre: l'une est obtenue de la première, troisième et cinquième différence de température, la seconde — de la deuxième, troisième et quatrième.

Pour déterminer la valeur de l'insolation, nous avons la formule [1])

$$q = k\,\Omega$$

dans laquelle k est la constante de l'actinomètre; quant à Ω, chaque mesure complète nous fournit deux valeurs, à savoir: celle qui résulte de trois Θ_i (de la première, de la troisième et de la cinquième différence de température) à intervalles de $t = 1$ min.:

[1]) La démonstration détaillée et la discussion de la formule sont données par M. Chwolson dans ses „Actinometrische Untersuchungen zur Construction eines Actinometers und eines Pyrheliometers" (1893). En dehors de cet ouvrage on peut citer le traité classique du même physicien, intitulé „Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie" (1892), qui possède une valeur fondamentale pour la critique des différentes méthodes appliquées dans l'actinométrie.

$$\Omega_1 = \frac{\Theta_1 \Theta_3 + \Theta_2^2}{\Theta_1 + \Theta_3}$$

et celle obtenue de trois ϑ_i (de la deuxième, de la troisième et de la quatrième différence de température) à intervalles de $t = 0{\cdot}5$ min.

$$\Omega_2 = 2 \frac{\vartheta_1 \vartheta_3 + \vartheta_2^2}{\vartheta_1 + \vartheta_3} \qquad (\vartheta_2 = \Theta_2).$$

Ainsi, chaque mesure effectuée à l'aide de l'actinomètre et qui se compose de 10 lectures thermométriques, fournit 5 différences au moyen desquelles nous obtenons Ω_1 et Ω_2. En prenant ensuite la moyenne de Ω_1 et Ω_2, nous obtiendrons la valeur Ω, définitive pour la mesure donnée:

$$\Omega = {}^1/_2 (\Omega_1 + \Omega_2).$$

§ 2. Dans l'ouvrage cité ci-dessus, M. Chwolson donne la discussion détaillée des corrections et de la manière de déterminer les valeurs définitives de l'insolation; c'est pourquoi nous ne nous en occuperons plus ici. Nous ferons seulement observer qu'il est indispensable de former également la moyenne de deux valeurs Ω (Ω_I et Ω_{II}), pour lesquelles les déterminations avaient été effectuées dans deux directions opposées, c'est-à-dire une fois pendant que le premier des deux thermomètres actinométriques était abrité par l'écran, et la seconde pendant qu'on avait couvert le second. De cette façon nous obtenons comme valeur de Ω l'expression

$$\Omega = {}^1/_2 (\Omega_I + \Omega_{II})$$

où Ω_I et Ω_{II} sont de leur côté des moyennes obtenues à l'aide de leurs Ω_1 et Ω_2 respectifs. En formant les moyennes d'après cette méthode, on élimine l'influence des sources secondaires de chaleur ainsi que celle de la non-complète identité des corps thermométriques.

Indépendamment de tout ceci, grâce à de longues séries de mesures successives faites à des intervalles égaux, effectuées à Varsovie pendant un grand nombre de jours, on formait, à l'aide de plusieurs valeurs trouvées immédiatement l'une après l'autre, des valeurs nouvelles „rectifiées“ au moyen de la formule

$$(\Omega_i) = \frac{1}{4} \left[\frac{\Omega_{i-2} + \Omega_{i+2}}{2} + \Omega_{i-1} + \Omega_i + \Omega_{i+1} \right]$$

et réduites aussi au temps correspondant (τ_i); ce dernier se confond pourtant avec le temps vrai, à cause des intervalles égaux de temps.

D'ordinaire on délimitait, dans le nombre de mesures successives, des séries de six valeurs Ω à l'aide desquelles on obtenait une valeur (Ω) „rectifiée" et libre de fluctuations accidentelles. Bien que non-indispensable, cette méthode offre de grands avantages pratiques, elle rend surtout de grands services dans les cas où l'insolation subit des fluctuations plus considérables à cause du passage des nuages etc.

Les valeurs de l'insolation utilisées dans les chapitres suivants pour les réductions et pour les tableaux sont presque toutes „rectifiées" d'après cette méthode; chacune de ces valeurs constitue donc le resultat de 6 mesures successives, c'est-à-dire qu'elle se compose de 60 lectures thermométriques.

§ 3. Pour transformer les valeurs relatives (Ω) en unités absolues (gr. cal., cm^2, min.) on avait recours à Varsovie aux comparaisons avec le pyrhéliomètre compensateur, construit par M. Ångström. Pour l'actinomètre (composé de deux thermomètres N. 56 et 57) à l'aide duquel on faisait à Varsovie des observations durant toute l'année 1901, on a trouvé, d'après environ une centaine de comparaisons, la valeur de la constante k dans la formule $q = k\,\Omega$ égale à 0·85; c'est par ce coefficient de transition qu'on avait multiplié toutes les valeurs Ω obtenues durant cette période, afin de les réduire aux unités absolues. L'actinomètre (Nr. 44 et 29) employé durant l'année 1902 avait le coefficient de transition égal à 0·93.

Pour chaque valeur définitive de l'insolation ainsi trouvée, on déterminait la hauteur correspondante du soleil d'après la „Connaissance des Temps" et aussi la valeur de l'humidité absolue en mm.; cette dernière était obtenue ou bien directement au moyen du psychromètre aspirateur d'Assmann, ou bien au moyen de valeurs horaires corrigées de l'hygrographe.

Les matériaux actinométriques rassemblés à Varsovie depuis le mois de décembre 1900 jusqu'au mois de décembre 1902 se composent de 4638 valeurs de l'insolation obtenues durant 180 jours; d'après ce qui précède, chaque observation dure $2^1/_2$ minutes et se compose de 10 lectures particulières. Les valeurs „définitives" dont on s'est servi pour les rapprochements ont été calculées, au moyen

de la formule de réduction décrite ci-dessus, de 6 mesures consécutives exécutées dans les deux directions, c'est-à-dire qu'elles constituent le résultat de 60 lectures. De cette façon, ainsi que cela a été exposé au § 2, on a tâché d'obtenir des nombres dégagés, autant qu'il est possible, de toute influence désavantageuse et de toute faute d'observation et exprimant le plus exactement possible les valeurs de l'insolation pour un intervalle donné.

Disposés d'après les mois, les nombres des mesures actinométriques et des jours où les observations ont été faites, se répartissent comme il suit:

	jours	Nombre de mesures		jours	Nombre de mesures
janvier	10	74	juillet	22	721
février	14	193	août	19	324
mars	12	235	sept.	15	541
avril	16	417	octobre	11	319
mai	24	1054	novemb.	10	115
juin	17	567	décemb.	10	78

La majorité des mesures a été faite pendant le mois de mai; quant aux années particulières, on a fait le plus d'observations en 1901 (3845 valeurs durant 109 jours); les résultats en ont servi non seulement à déterminer la marche annuelle de l'insolation mais aussi et surtout à déterminer les données de réduction.

§ 4. A côté des observations faites à Varsovie, on a traité d'après la même méthode les matériaux recueillis à Pavlovsk et à Pétersbourg et publiés dans les „Annales de l'Observatoire Physique" depuis 1893 (pour Pétersbourg depuis 1895). Ces matériaux ne comprennent que le temps moyen local et les valeurs de l'insolation accompagnées de quelques courtes annotations relatives à l'état du ciel au moment de l'observation; les hauteurs du soleil dont on avait besoin furent déterminées d'une façon supplémentaire et les données horaires de l'humidité absolue ont été puisées dans les lectures horaires correspondantes de l'hygrographe enrégistreur publiées dans la 1-re partie des tomes successifs des mêmes Annales [1]). Cette publication ne contient pas de données horaires pour

[1]) Il serait fort à désirer que les résultats des déterminations de l'insolation (comme p. ex. les mesures de Pavlovsk et de Pétersbourg) fussent publiés avec les hauteurs correspondantes du soleil et les valeurs de l'humidité absolue (ainsi

Pétersbourg; pour suppléer à ce manque de données, on a pris les valeurs de l'humidité a 1^h_p; l'erreur, causée par ceci, ne doit pas être trop grande, car la plupart des mesures se groupent justement autour de cette heure.

A Pavlovsk, les mesures ont été effectuées tout le temps au moyen du même actinomètre (composé de thermomètres N. 55 et 56); le coefficient de transition y était déterminé tous les ans, mais à l'aide d'un petit nombre de comparaisons. La valeur de ce coefficient oscillait dans les différentes années entre 1·07 et 1·12; en 1894 on appliquait presque chaque mois un autre coefficient (entre de larges limites de variation de 1·04 à 1·10) ce qui nuit jusqu'à un certain point à l'homogénéité des résultats et à l'établissement de comparaisons.

A Pétersbourg, l'actinomètre a été changé trois fois et les valeurs des coefficients k admis pour chaque actinomètre ne paraissent pas exactes, comme cela sera démontré dans la III partie.

Les mesures faites à Catherinenbourg, ainsi que les hauteurs du soleil et les données météorologiques correspondantes ont été publiées dans le „Bulletin de l'Académie de St. Pétersbourg" (V^e série, t. XI. N. 2, 1899) sous le titre „Aktinometer-Beobachtungen im Observatorium zu Katharinenburg — von P. Müller"; ces mesures, bien qu'avec de considérables interruptions, ont été faites durant les trois années 1896—1898.

Bien que les inexactitudes dans la constante k n'influent pas sur le caractère et sur la marche de la courbe de l'insolation pour des années distinctes, elles rendent cependant difficile la comparaison entre les résultats des périodes annuelles distinctes; cette circonstance a été prise en considération, surtout en ce qui concerne Pétersbourg.

Il est encore à remarquer que les matériaux recueillis à Pétersbourg, à Pavlovsk et à Catherinenbourg renferment des moyennes formées seulement à l'aide de deux mesures consécutives, faites dans les directions opposées. Comme en général on n'y faisait durant un jour donné qu'un petit nombre de mesures, il nous a été impossible de calculer une valeur à l'aide de six mesures consécutives.

qu'avec d'autres éléments météorologiques). Autrement la mise en ordre des matériaux accumulés pendant un certain nombre d'années, absorbe nécessairement beaucoup de temps et de travail préparatoire.

En dehors de Varsovie, Pétersbourg, Pavlovsk et Catherinenbourg sont, à ce que nous savons, les seuls endroits où l'on ait fait durant une plus longue période des observations systématiques à l'aide de l'actinomètre de M. Chwolson. Des séries considérables d'observations ont été encore effectuées à Montpellier et à Kiev, où l'on s'était pourtant servi de l'ancien actinomètre de M. Crova[1]). Les résultats de ces mesures ne sont pas entrés dans la sphère des recherches du présent travail.

II.

§ 1. La tâche qui s'impose tout d'abord en présence des matériaux rassemblés à Varsovie, c'est d'étudier les variations de l'insolation sous l'influence de la hauteur variable du soleil au-dessus de l'horizon. Dans ce but on a compulsé les matériaux obtenus les jours où les observations avaient été faites à des hauteurs différentes du soleil, on en a tiré les valeurs de l'insolation déduites directement à des hauteurs de 9°, 12°, 15°, 18°, 24°, 30°, 40°, 45° et 55° et on en a formé le tableau ci-joint des variations dans les valeurs de l'insolation; le tableau indique en même temps le jour où on avait noté ces différences d'insolation correspondant aux variations dans la hauteur du soleil. Les signes a. et p. précédant ΔJ signifient que les variations en question ont été déduites des observations faites avant midi, resp. après midi.

[1]) Le système de M. Crova a été soumis à une analyse détaillée dans le traité de M. Chwolson „Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie" (Repertorium für Meteorologie, herausgegeben von Heinrich Wild. B. XV. 1892). Ce savant y démontre que cette construction possède des défauts exerçant une influence très désavantageuse sur l'exactitude de la méthode. Certains observateurs donnent jusqu'à présent la préférence à ce système, tandis qu'il existe des appareils nouveaux bien meilleurs et bien plus exacts (comme par exemple le pyrhéliomètre de compensation — un excellent instrument absolu — de M. Ångström et l'actinomètre relatif de M. Chwolson.

Nous citerons comme un fait curieux le cas de M. Pantschenko, observateur à Odessa, qui, dans son ouvrage publié en 1896 par la Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie (2 partie. 253 + 141 + XVII. Odessa), rapporte les résultats de ses mesures faites avec l'actinomètre de M. Crova avec cinq décimales, c'est-à-dire jusqu'à $^1/_{100\cdot000}$ gr. cal. en cm² et min.

Table 1.

Tableau des variations de l'insolation (ΔJ) correspondant à des valeurs différentes de la hauteur (h) du soleil.
(D'après les observations de Varsovie en 1901).

	9° — 12° Δh = 3°		12° — 15° Δh = 3°		15° — 18° Δh = 3°		18° — 24° Δh = 6°		24° — 30° Δh = 6°		30° — 40° Δh = 10°		40° — 45° Δh = 5°		45° — 55° Δh = 10°	
	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ
	11 V	0·09 p.	31 I	0·13 p.	10 II	0·04 p.	14 II	0·08 p	12 V	0·08 p.	24 IV	0·13 p.	24 IV	0·05 p.	3 V	0·05 a.
	2 VI	0·17 p.	11 V	0·08 p	11 V	0·05 p	11 V	0·12 p.	11 VIII	0·09 a	12 V	0·10 p.	3 V	0·04 a	9 V	0·06 a.
	21 VII	0·17 p	2 VI	0·10 p	2 VI	0·08 p	2 VI	0·14 p.	21 IX	0·10 a	2 VI	0·11 p.	5 V	0·04 p.	10 V	0·05 a.
	25 IX	0·13 p.	25 IX	0·12 p	21 VII	0·10 p.	14 VII	0·15 p.	23 IX	0·09 p	21 VII	0·07 p.	7 V	0·02 a.	6 VII	0·05 a
					21/IX	0·11 a.	21/VII	0·10 p.	25/IX	0·07 p.	22/IX	0·10 a	9/V	0·05 a.	20/VII	0·10 a.
					25 IX	0·08 p.	26 VIII	0·12 p	16 X	0·09 a	23 IX	0·11 p	10 V	0·03 a.	21 VII	0·05 p.
							21/IX	0·14 a.			25/IX	0·07 a.	12/V	0·04 p.		
							23/IX	0·12 p.			27/IX	0·09 a.	18/V	0·07 a.		
							22/X	0·09 a.					2/VI	0·03 p.		
													6/VI	0·04 a.		
													7/VII	0·07 a.		
													11/VII	0·03 a.		
													14/VII	0·04 p.		
													21/VII	0·03 p.		
Somme	0·56		0·43		0·46		1·06		0·52		0·78		0·58		0·36	
Moyenne	0·140		0·107$_5$		0·077		0·118		0·087		0·097		0·041		0·060	

Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus à Varsovie avec ceux qui avaient été obtenus ailleurs, on a dressé un tableau analogue pour Pavlovsk, en utilisant dans ce but les matériaux actinométriques de Pavlovsk recueillis en 1892/93 et traités par M. Schukewitsch ainsi que les matériaux bruts rassemblés les années suivantes et publiés dans les „Annales de l'Observatoire Physique" à Pétersbourg. Tout ceci, ainsi que les matériaux analogues recueillis à Pétersbourg et à Catherinenbourg, fut traité suivant la methode appliquée aux observations de Varsovie.

M. Schukewitsch avait déjà dressé un tableau analogue pour Pavlovsk et l'avait publié dans „Wild's Repertorium für Meteorologie" (Vol. 17. 1894. p. 24); le tableau présenté ci-dessous a été dressé d'une façon indépendante et en partie avec d'autres observations. Faute de séries plus complètes de mesures effectuées le même jour et à cause de l'incertitude des observations particulières, il a été impossible d'en dresser d'autres dans ce genre pour Pétersbourg et pour Catherinenbourg.

Voir table 2., page 475.

Ainsi que nous pouvons le voir, les variations de l'insolation par rapport aux variations dans la hauteur du soleil observées à Varsovie se rapprochent de celles qui ont été trouvées à Pavlovsk. Comme valeurs definitives, appliquées ensuite dans toute leur étendue dans le but de la réduction, à Varsovie aussi bien qu'à Pétersbourg, à Pavlovsk où à Catherinenbourg, on a adopté les variations suivantes de l'insolation (ΔJ) par rapport aux variations dans la hauteur (h) du soleil:

$\Delta J = 0{\cdot}140 \quad 0{\cdot}106 \quad 0{\cdot}076 \quad 0{\cdot}117 \quad 0{\cdot}085 \quad 0{\cdot}100 \quad 0{\cdot}042$[1] $0{\cdot}035$[2] $0{\cdot}028$[3]

ce qui rapporté à $\Delta h = 1^0$, fait:

$\Delta J = 0{\cdot}047 \quad 0{\cdot}035 \quad 0{\cdot}025 \quad 0{\cdot}019 \quad 0{\cdot}014 \quad 0{\cdot}010 \quad 0{\cdot}008 \quad 0{\cdot}007 \quad 0{\cdot}006.$

Ces dernières valeurs ont été ensuite adoptées pour la réduction directe dans les intervalles de 10^0 à 11^0, de 13^0 à 14^0, de 16^0 à 17^0, de 21^0 à 22^0, de 27^0 à 28^0, de 34^0 à 35^0, de 42^0 à 43^0, de 47^0 à 48^0 et de 52^0 à 53^0; pour les autres intervalles, elles ont été trouvées par la voie de l'interpolation. De cette manière, on a pu former un grand tableau servant à réduire à la hauteur voulue, dans les limites de 6^0 à 62^0, les données de l'insolation no-

[1]) 40^0—45^0 [2]) 45^0—50^0 [3]) 50^0—55^0

Table 2.

Tableau des variations de l'insolation (ΔJ) par rapport aux variations dans la hauteur (h) du soleil.
(D'après les observations de Pavlovsk).

	9° — 12° Δh = 3°		12° — 15° Δh = 3°		15° — 18° Δh = 3°		18° — 24° Δh = 6°		24° — 30° Δh = 6°		30° — 40° Δh = 10°		40° — 50° Δh = 10°	
	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ
	92 3 XI	0 15 p.	92 31 VIII	0 08 a	92 30 VIII	0 06 p	92 9 IX	0 12 p	92 9 IX	0·08 p	93 21 IV	0 08 a	93 21 V	0 07 a
	93 16 VI	0 13 p	93 22 II	0 10 p	92 31 VIII	0 09 p	92 9 IX	0·09 p	92 10 IX	0·10 p.	93 8 VI	0·10 a.	93 8 VI	0 08 a
	93 20 VI	0 15 p	93 16 VI	0 10 p	92 9 IX	0 07 p	92 24 IX	0 12 a	92 10 IX	0 06 a	93 16 VII	0 11 a	93 12 VI	0 08 p
	93 24 VI	0 13 p	93 24 VI	0 13 p	92 10 IX	0 07 p	92 24 IX	0 14 p	92 15 IX	0 09 a	93 1 VIII	0 11 a	93 24 VI	0 07 p
	93 29 VI	0 14 p	93 29 VI	0 10 p	93 8 III	0·07 p	93 7 III	0·11 p	92 24 IX	0 06 a	93 11 VIII	0 12 a	93 17 VII	0·09 a
	95 1 II	0 14 p	93 17 VII	0 12 p	93 16 VI	0 08 p	93 8 III	0·11 p	92 24 IX	0 07 p.	95 1 V	0·11 p.	93 21 VII	0 09 p
			94 21/X	0 11 p	93 24/VI	0·09 p.	93 9/III	0·11 p.	93 23/III	0·09 p.			93 1/VIII	0·09 a.
					94 21/X	0·07 p.	93 24/VI	0·12 p.	93 21/IV	0·11 a				
							93 20/IX	0·12 p.	93 15/VII	0·09 a.				
							94 22/IX	0·13 p.	93 17/VII	0 08 p.				
							1900 24/III	0 09 p.	93 20/IX	0·09 p.				
Total	0·84		0·74		0 60		1·26		0·92		0·63		0·57	
Moyenne	0·140		0·106		0·075		0·115		0·084		0·105		0·081	

tées à une certaine hauteur du soleil. Cette table (qui faute de place n'a pu être reproduite ici) présente une importance de premier ordre pour les buts exposés ci-dessus et sert régulièrement à opérer une des réductions les plus essentielles.

§ 2. A côté de la réduction à la hauteur il y a la réduction de l'insolation à la distance moyenne entre la terre et le soleil; on opère cette réduction très importante afin d'éliminer l'influence des variations que cette distance subit au cours de l'année. Au lieu de la distance, il est plus commode d'employer à cette fin le diamètre apparent du soleil indiqué dans les Annuaires astronomiques (ou plutôt la moitié de ce diamètre ϱ); en désignant par a la valeur moyenne du rayon apparent du soleil, nous obtenons comme facteur de la réduction de l'insolation à la distance moyenne

$$\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2.$$

Dans le périhélie ce facteur est égal à 0·967 et dans l'aphélie à 1·034. Conformément à ceci il faut dans le premier cas diminuer la valeur de l'insolation de 3·3% et dans le second l'augmenter de 3·4%. On avait calculé ce facteur pour Varsovie dans les intervalles de cinq jours; il a été facile d'opérer ensuite la réduction pour chaque jour en particulier. Conformément à ce qui précède, la plus grande réduction tombe vers la fin du mois de décembre (avec le signe —) et vers le commencement du mois de juillet (avec le signe +), et les valeurs de l'insolation à la fin du mois de mars et au commencement du mois d'octobre restent invariables.

§ 3. Les deux réductions précédentes n'épuisent nullement toutes les causes de variations subies par l'insolation. Si, en nous servant de matériaux recueillis par l'observation, nous comparons les données de l'insolation notées durant différents mois à de différentes hauteurs du soleil, nous nous apercevrons tout de suite que les valeurs obtenues de cette manière diffèrent considérablement entre elles. Il est donc nécessaire d'étudier l'origine de ces différences, d'examiner d'où elles viennent, si la hauteur du soleil est la même et si les valeurs de l'insolation ont été réduites à la distance moyenne.

La raison en est la suivante: à côté de la hauteur du soleil et de la distance variable de la terre, l'insolation subit l'influence: 1) de la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère,

quantité qui varie entre des limites assez larges, c'est-à-dire de l'humidité absolue que l'on peut chaque fois déterminer pour le lieu d'observation et 2) celle de toute une série de facteurs dont la plupart sont accidentels et variables comme p. ex. la plus ou moins grande limpidité de l'atmosphère, la quantité de poussière etc.

Afin d'éliminer aussi complètement que possible l'action des facteurs cités sub 2) et afin de déterminer la dépendance de l'insolation d'un facteur aussi essentiel que la vapeur d'eau, on a procédé de la manière suivante. On a extrait des observations effectuées en 1901 la série des valeurs de l'insolation réduites à la distance moyenne de la terre au soleil notées à des hauteurs différentes du soleil au-dessus de l'horizon dans les limites comprises entre 7° et 61°, à des intervalles d'un degré.

Le tableau suivant, contenant les données relatives seulement au segment entre 48° et 52°, présente l'exemple d'une telle série.

Voir table 3., page 478

Comme point de départ des raisonnements ultérieurs, on a adopté pour principe que tous les facteurs cités sub 2) tendent à diminuer les valeurs de l'insolation et que, par conséquent, après avoir opéré la réduction à la hauteur et à la distance, parmi toutes les valeurs obtenues, caeteris paribus, il faut choisir les plus grandes; en second lieu, on admet, comme il est évident, que la valeur de l'insolation varie en raison inverse de la quantité de vapeur d'eau.

Conformément à ceci, en présence de deux valeurs de l'insolation réduites à la distance moyenne et à la même hauteur du soleil et obtenues à la même humidité absolue, on tiendra compte seulement de la plus grande des deux, considérant que l'autre avait été diminuée par une plus forte influence de la poussière, des nuages et d'autres facteurs du même ordre. De cette manière, en rejetant du tableau précédent les valeurs non-concordantes et en refaisant la même opération pour chaque degré, nous obtiendrons le tableau suivant:

Voir table 4., page 479.

De là, en réduisant chaque valeur à la hauteur de 50° au moyen de la „table des réductions à la hauteur“ (cf. § 1) et en leur appliquant le principe énoncé ci-dessus, c'est-à dire en rejetant toutes les valeurs moindres obtenues caeteris paribus à la même humidité

Table 3.

Extrait du tableau des valeurs de l'insolation réduites à la distance moyenne.
(D'après les mesures effectuées à Varsovie en 1901).

48°			49°			50°			51°			52°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
22/IV	1·30	4·6	22/IV	1·30	4·6	22/IV	1·31	4·6	28/IV	1·37	7·5	28/IV	1·40	7·3
4/V	1·36	5·6	3/V	1·41	5·4	24/IV	1·30	5·7	29/IV	1·40	8·8	5/V	1·47	3·8
14/V	1.28	8·5	4/V	1·37	5·6	28/IV	1·34	7·6	10/V	1·29	9·4	2/VI	1·32	13·1
7/VII	1·24	10·6	14/V	1·28	8·5	3/V	1·41	5·4	2/VI	1·31	13·1	3/VI	1·37	16·4
20/VII	1·28	14·8	2/VI	1·31	13·3	5/V	1·42	3·8	3/VI	1·37	16·4	25/VI	1·25	17·6
21/VII	1·31	11·5	13/VII	1·2[illegible]	13·2	9/V	1·34	10·2	11/VII	1·37	11·0	4/VII	1·45	8·2
			14/VII	1·39	12·6	10/V	1·43	9·6	10/VIII	1·37	10·2	20/VII	1.32	14·6
			20/VII	1·29	14·9	3/VI	1·35	16·4				5/VIII	1·25	10·5
			21/VII	1·31	11·4	25/VI	1·25	17·2				10/VIII	1·39	10·2
						11/VII	1·35	11·0						
						13/VII	1·28	13·2						
						20/VII	1·31	14·9						
						22/VII	1·35	12·9						

Table 1

48°			49°			50°			51°			52°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
4/V	1·36	5·6	3/V	1·41	5·4	10/V	1·43	9·6	29/IV	1·40	8·8	5/V	1·47	3·8
21/VII	1·31	11·5	14/VII	1·39	12·6	3/VI	1·35	16·4	3/VI	1·37	16·4	4/VII	1·45	8·2
20/VII	1·28	14·8	2/VI	1·31	13·3							10/VIII	1·39	10·2
			20/VII	1·29	14·9							3/VI	1·37	16·4

absolue ou à une humidité moindre, nous obtiendrons les cinq valeurs suivantes correspondant à 50°:

Table 5.

50°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
5/V	1.458	3·8
4/VII	1·438	8.2
10/V	1·43	9·6
14/VII	1·397	12·6
3/VI	1·364	16·4

En répétant le même calcul pour les autres hauteurs, en réduisant les valeurs obtenues pour les hauteurs de 7°, 8°, 9°, 10°, 11° et 12° à la hauteur de 10°, pour celles de 13°—17° à celle de 15° etc., c'est-à-dire en formant d'une façon analogue au moyen de séries de cinq degrés, des valeurs définitives pour les degrés 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55° et 60° (cette dernière au moyen de la réduction des degrés 58°, 59°, 60° et 61°), après avoir rejeté les valeurs non-concordantes et gardé seulement celles qui sont relativement les plus grandes, nous obtiendrons enfin les résultats suivants:

Voir table 6., page 481.

Enfin, en réduisant toutes les valeurs de l'insolation à la hauteur commune de 30° nous obtiendrons — après avoir rejeté les valeurs non-concordantes — les données définitives suivantes:

Voir table 7., page 482.

De là, en divisant les variations particulières des valeurs de l'insolation par les variations correspondantes de l'humidité absolue, nous obtenons comme „valeur moyenne du coefficient de la réduction à l'humidité“

pour Varsovie $\Delta = 0{\cdot}018$

ce qui signifie que, quand l'humidité absolue augmente d'un millimètre, l'insolation diminue en moyenne de 0·018 (gr. cal., cm², min.).

Table 6.

10°			15°			20°			25°			30°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
10/IV	0·960	2·1	6/XII	1·13	3·1	10/II	1·190	5·0	12/II	1·383	1·8	16/X	1·312	8·1
30/XII	0·920	4·1	24/XII	1·031	6·4	14/VII	1·111	12·9	22/X	1·289	4·9	11/VIII	1·28	12·2
			21/VII	0·966	11·6				11/VIII	1·204	12·2			

35°			40°			45°			55°			60°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
18/V	1·381	5·2	18/V	1·428	5·0	8/IV	1·478	4·6	5/V	1·520	3·8	14/V	1·50	7·1
25/IX	1·340	8·2	12/V	1·36	6·9	14/VII	1·383	12·4	10/VIII	1·430	10·2	22/VII	1·420	11·9
14/VII	1·291	12·9	11/VIII	1·332	12·3	2/VI	1·33	14·7	3/VI	1·410	16·4	25/VI	1·295	18·5
						25/VI	1·25	16·7				24/VI	1·285	19·0

Table 7.

Date	30° Valeur de l'insolation	30° Humidité absolue
12/II	1·453	1·8
30/XII	1·393	4·1
16/X	1·312	8·1
11/VIII	1·28	12·2
3/VI	1·205	16·4

Afin de pouvoir établir une comparaison, des calculs absolument identiques tendant à déterminer le même coefficient ont été faits pour Pavlovsk (pour la période de 1892 à 1900) et pour Pétersbourg (1895—1900).

Pour Pavlovsk, au moyen des séries de 5° et après avoir rejeté des valeurs non-concordantes, on a obtenu les chiffres suivants:

Voir table 8., page 483.

En réduisant tout ceci à la hauteur du soleil de 30° nous obtenons, après le rejet dont il a été question plus haut, les données définitives suivantes:

Table 9.

30° Insol.	30° Hum. abs.
1·473	1·6
1·450	2·3
1·429	3·2
1·409	4·9
1·357	8·2
1·178	17·7

De là il résulte que la valeur moyenne du coefficient de la réduction à l'humidité est égale pour Pavlovsk à

$$\Delta = 0{\cdot}021.$$

Table 8.

10°		15°		20°		25°		30°		35°		40°		45°		50°	
Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs	Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum abs.	Insol.	Hum abs.
1·00	1·6	1·181	0·9	1·290	2·3	1·393	0·9	1·40	1·2	1·43	6·9	1·458	2·5	1·428	2·6	1·417	7·7
0·90	5·3	1·166	1·5	1·210	3·8	1·30	6·6	1·38	2·0	1·32	10·3	1·442	4·7	1·418	3·2	1·378	9·3
0·853	6·6	1·152	3·2	1·181	7·8	1·26	8·4	1·36	7·0	1·30	11·2	1·348	10·3	1·403	10·4	1·374	9·4
0·819	11·1	1·132	4·9	1·080	9·5	1·233	9·4	1·338	8·8	1·291	11·8	1·278	17·7	1·296	17·9	1·364	10·6
0·77	12·0	1·09	6·6	0·98	18·1	1·069	12·1	1·162	14·3	1·211	16·9					1·334	17·6
		1·08	8·2			1·009	15·9										

Pour Pétersbourg (1895—1900), on a obtenu d'une façon analogue:

Voir table 10., page 485.

En réduisant à la hauteur de 30°, on obtient les chiffres suivants:

Table 11.

30°	
Insol.	Hum. abs.
1·419	2·5
1·393	3·3
1·293	6·5
1·242	10·5
1·218	11·7

ce qui fournit, comme valeur moyenne du coefficient de la réduction à l'humidité.

$$\Delta = 0{\cdot}024.$$

On n'a pas fait de calculs analogues pour Catherinenbourg à cause du nombre relativement trop petit d'observations et aussi à cause des différences considérables dans les mesures particulières.

Comme valeur moyenne définitive du coefficient de la réduction à l'humidité, on a adopté

$$\Delta = 0{\cdot}02.$$

III.

§ 1. Avant de reproduire les moyennes mensuelles de l'insolation qui peuvent se déduire des mesures directes faites à Varsovie, voyons si les valeurs réduites à la hauteur, à la distance et à l'humidité, obtenues dans le chapitre II, ne nous permettront pas de nous rendre compte théoriquement du caractère général de la marche annuelle de l'insolation. Trois facteurs, avons-nous dit, exercent une influence capitale sur la valeur de l'insolation; ce sont: la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, la quantité de la vapeur d'eau dans l'atmosphère et la distance de la terre au soleil. Outre ces trois facteurs, l'insolation subit encore l'action des gaz qui se trouvent dans l'atmosphère et surtout celle de l'acide carbo-

Table 10

10°		15°		20		25°		30°		35°		40°		45°		50°	
Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs	Insol.	Hum abs.	Insol.	Hum abs	Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs.	Insol.	Hum. abs	Insol.	Hum. abs.
0·93	1·9	1·067	4·1	1·24	1·6	1·349	2·5	1·313	1·7	1·31	4·4	1·468	1·8	1·468	2·5	1·497	3·0
0·92	3·3			1·111	6·4	1·159	8·1	1·293	6·5	1·161	7·3	1·422	3·2	1·446	4·1	1·368	10.9
0·903	4·3					1·113	9·9			1·111	11·2	1·342	10·5	1·36	11·7		
												1·182	13·4				

nique; cependant les recherches récentes tendent à prouver que l'absorption causée par la présence de ce gaz dans l'atmosphère, s'accomplit à une hauteur considérable; les variations dans la quantité de ce gaz dans les couches inférieures de l'atmosphère ont, d'après K. Ångström[1]), une influence négligeable sur la marche annuelle de l'insolation, obtenue dans nos conditions. Les autres facteurs, comme la poussière, les nuages etc. n'ont qu'un caractère accidentel et tendent toujours à diminuer l'insolation. Pour former théoriquement un schème de la marche annuelle de l'insolation, prenons Varsovie comme point de départ. Soit la valeur initiale de l'insolation $J = 1{\cdot}23$ à la hauteur du soleil $= 30^0$, à l'humidité absolue $= 5$ mm. et à la distance moyenne de la terre au soleil. De là nous pouvons former le tableau suivant:

Table 12.

Varsovie	Hauteur du soleil	Humidité moyenne mensuelle absolue	a	b	J
15. I	17°	3·4	1·006	1·038	1·07
„ II	25°	3·5	1·160	1·190	1·22
„ III	35°	4·3	1·284	1·298	1·31
„ IV	47°	5·0	1·386	1·386	1·38
„ V	56°	7·4	1·440	1·392	1·36
„ VI	61°	8·5	1·465	1·395	1·35
„ VII	59°	10·7	1·455	1·341	1·30
„ VIII	52°	11·4	1·419	1·291	1·26
„ IX	42°	8·5	1·348	1·278	1·27
„ X	30°	7·4	1·230	1·182	1·19
„ XI	20°	4·5	1·070	1·080	1·10
„ XII	15°	3·2	0·953*	0·989*	1·02*

La première colonne indique les dates (les 15 de tous les mois) auxquelles se rapportent toutes les données suivantes de l'insolation; la seconde renferme, exprimées en degrés entiers, les hau-

[1]) K. Ångström. Ueber die Bedeutung des Wasserdampfes und der Kohlensäure bei der Absorption der Erdatmosphäre. Annalen der Physik 1900. p. 720—732.

teurs correspondantes du soleil à midi; dans la troisième nous retrouvons les moyennes mensuelles de l'humidité absolue en mm., déduites des observations faites à Varsovie à la Station Centrale Météorologique (auprès du Musée) par les jours clairs et effectuées au moyen du psychromètre aspirateur d'Assmann. Les trois colonnes suivantes renferment les données de l'insolation, à savoir: dans la quatrième (a) se trouvent indiquées (au moyen de la table mentionnée au § 1.—II) les valeurs qu'on aurait obtenues pour le jour donné, si la hauteur du soleil au dessus de l'horizon était l'unique facteur exerçant une influence sur l'insolation; nous voyons que dans ce cas le maximum tomberait au mois de juin et le minimum au mois de décembre et que la marche de l'insolation entre le maximum et le minimum serait tout-à-fait régulière. Pour former la cinquième colonne (b) on a pris en considération les valeurs de l'humidité absolue, et les données de cette colonne sont réduites (§ 3—II) chacune à la moyenne mensuelle correspondante; ainsi qu'il est facile de l'observer, cette réduction a pour effet le déplacement du maximum de l'insolation vers le printemps. Dans la dernière colonne (J), nous trouvons les valeurs de l'insolation (limitées au second signe décimal) réduites de la distance moyenne de la terre au soleil à la distance vraie au milieu de chaque mois. D'après ces valeurs définitives, le maximum de l'insolation dans la marche annuelle devrait tomber entre le mois d'avril et celui de mai et le minimum en décembre, tandis qu'un maximum secondaire se dessinerait en septembre.

Pareille esquisse du caractère de la marche annuelle de l'insolation pourrait être fournie non-seulement pour Varsovie, mais aussi pour tous les autres endroits pour lesquels on connaît la marche de l'humidité absolue. Mais auparavant, il faut constater jusqu'à quel point les données expérimentales donnent raison à ce schème théorique.

§ 2. Pour obtenir les moyennes mensuelles de l'insolation à l'aide de mesures effectuées durant un mois, on a choisi la méthode suivante. Des matériaux obtenus par l'observation, on tira pour les jours distincts de chaque mois les valeurs de l'insolation (obtenues à l'aide de mesures directes à la plus grande hauteur diurne du soleil ou en général pendant les heures de midi) qu'on réduisit à l'hauteur correspondante du soleil au milieu du mois donné et qu'on rapporta à l'humidité absolue du moment d'observation. De

cette manière, on dressa pour Varsovie le tableau suivant pour la période de décembre 1900 à décembre 1901.

Voir table 13., page 489.

Les valeurs de l'insolation n'avaient pas été réduites à la distance moyenne de la terre au soleil. Les degrés indiqués auprès de chaque mois désignent la hauteur du soleil au milieu du mois donné, à laquelle on avait réduit toutes les valeurs distinctes de l'insolation.

En formant d'après ces données les moyennes de l'humidité absolue et des valeurs de l'insolation pour les mois distincts (moyennes mensuelles de l'insolation), nous obtenons le tableau suivant de la marche annuelle en 1901:

Table 14.

Résumé annuel. Varsovie. 1901.

Mois 1901	Hauteur du soleil	Valeurs moyennes mens. de l'hum. abs.	Moyennes mensuelles de l'insolation	Moy. mens. de l'insol. réduites à la distance moy.	Moy. mens. de l'insol. réduites à la dist. moy. et à la hauteur 30°	Nombre de jours d'observations	Max. abs. de l'insolation (date)
I	17°	3·7	1·04*	1·01*	1·23	2	1·06* (27)
II	25°	2·3*	1·29	1·27	**1·34**	6	1·41 (12)
III	36°	5·3	1·25	1·24	1·18	4	1·28 (31)
IV	48°	5·7	**1·40**	**1·41**	1·25	7	1·50 (8)
V	57°	7·8	1·38	1·40	1·19	15	**1·51** (18)
VI	61°	**13·2**	1·36	1·40	1·17*	7	1·46 (14)
VII	59°	11·3	1·36	1·40	1·18	12	1·45 (4)
VIII	52°	12·4	1·28	1·31	1·12	8	1·38 (11)
IX	41°	9·5	**1·32**	**1·33**	1·22	9	1·37 (26)
X	29°	8·6	1·23	1·22	1·23	6	1·36 (22)
XI	19°	3·7	1·13	1·11	1·29	2	1·18 (10)
XII	15°	5·6	1·09	1·06	1·34	3	1·13 (6)
Anné		8·5			1·29	81	1·51 (18/V)

Afin d'obtenir la moyenne annuelle pour Varsovie en 1901, on a admis comme point de départ les moyennes mensuelles réduites à la distance moyenne et à la hauteur du soleil de 30° (cf. la 6-me

Table 13.

Varsovie.

Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.
1900.															
20. XII	15°	5·0	1·06	24. IV	48°	4·9	1·40	19. VI	61°	8·9	1·33	10. VIII	52°	10·2	1·38
31. XII	„	1·2	0·98	28. „	„	7·0	1·35	24. „	„	19·0	1·25	11. „	„	12·4	1·38
				29. „	„	8·5	1·36	25. „	„	18·2	1·28	26. „	„	11·2	1·38
1901.								30. „	„	8·6	1·40				
27. I	17°	3·8	1·06	1. V	57°	7·1	1·35					4. IX	41°	6·8	1·30
31. I	„	3·5	1·02	3. „	„	5·5	1·46	2. VII	59°	8·7	1·41	11. „	„	7·2	1·34
				4. „	„	5·7	1·38	4. „	„	8·2	1·45	21. „	„	11·3	1·30
1. II	25°	3·6	1·25	5. „	„	3·7	1·50	6. „	„	10·0	1·36	22. „	„	12·0	1·25
10. „	„	2·9	1·30	7. „	„	7·1	1·36	7. „	„	10·8	1·26	23. „	„	10·7	1·31
12. „	„	1·8	1·41	9. „	„	10·5	1·39	10. „	„	9·3	1·34	24. „	„	10·7	1·32
13. „	„	2·0	1·35	10. „	„	10·0	1·44	11. „	„	11·0	1·37	25. „	„	7·8	1·37
14. „	„	1·6	1.18	11. „	„	7·0	1·37	13. „	„	12·6	1·32	26. „	„	8·4	1·37
17. „	„	1·6	1.26	12. „	„	6·9	1·44	14. „	„	12·6	1·40	27. „	„	10·7	1·30
				13. „	„	8·2	1·28	16. „	„	13·6	1·38				
2. III	36°	5·3	1·27	14. „	„	8·5	1·31	20. „	„	14·7	1·32	1. X	29°	12·7	1·13
15. „	„	8.1	1·18	18. „	„	7·5	1·51	21. „	„	11·8	1·30	4. „	„	11·0	1·14
25. „	„	4·1	1·25	24. „	„	8·0	1·37	22. „	„	11·9	1·38	16. „	„	8·1	1·30
31. „	„	3·7	1·28	25. „	„	11·7	1·27					21. „	„	8·3	1·25
				27. „	„	12·0	1·30	1. VIII	52°	13·6	1·21	22. „	„	5·0	1·36
1. IV	48°	5·1	1·39					2. „	„	14·3	1·16	29. „	„	6·3	1·19
3. „	„	4·9	1·44	2. VI	61°	14·7	1·38	4. „	„	15·2	1·27	10. XI	19°	4·1	1·18
8. „	„	4·7	1·50	3. „	„	16·2	1·40	5. „	„	10·4	1·21	23. XI	„	3·3	1·07
22. „	„	4·5	1·37	14. „	„	7·1	1·46	9. „	„	12·0	1·21	6. XII	15°	3·0	1·13
												21. XII	„	6·4	1·03
												30. XII	„	7·4	1·12

colonne); le nombre de journées d'observation est considéré comme le poids de la valeur correspondante. De cette façon on a obtenu pour Varsovie

$I_{(1901)} = 1{\cdot}29$ ($h = 30^0$; distance moyenne et hum. moyenne absolue $= 8{\cdot}5$ mm.)

Remarquons que l'humidité moyenne absolue annuelle avait été obtenue à l'aide des valeurs mensuelles distinctes et aussi en prenant en considération les poids.

En observant la marche annuelle de l'insolation à Varsovie dans l'année individuelle 1901 (cf. la 4-me colonne) nous voyons que c'est le mois d'avril qui fournit la moyenne la plus grande tandis que la plus petite tombe au mois de janvier; au mois de mars en comparaison avec février, la valeur moyenne est plus petite ce qui, dans ce cas, est un phénomène accidentel, en rapport avec le nombre moindre de jours clairs au mois de mars 1901 comparativement aux jours très froids mais clairs du mois de février. La plus haute valeur a été observée le 18 mai 1901; elle était de 1·51; le mois de septembre présente dans sa moyenne mensuelle un maximum secondaire.

Des valeurs diurnes de l'insolation réduites, comme précédemment, à la hauteur du soleil du milieu de mois à Varsovie, nous obtenons d'une façon analogue pour la période de janvier 1902 — décembre 1902, les valeurs suivantes:

Voir table 15., page 491.

De là résulte le tableau annuel suivant, dressé pour la période indiquée ci dessus:

Voir table 16., page 492.

d'où il résulte que la moyenne annuelle à Varsovie en 1902 est égale à

$I_{(1902)} = 1{\cdot}16$ ($h = 30^0$, dist. moy. et hum. moy. abs. 5·6 mm.)

Remarquons que le nombre de jours d'observation durant toute une année constitue le poids de la moyenne annuelle comparativement aux moyennes des autres années.

Pour l'année 1902, aussi bien que pour la précédente, le mois d'avril fournit la plus grande valeur mensuelle, le maximum secon-

Table 15.

Varsovie 1902.

Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.
22. I	17°	3·9	0·94	21. IV	48°	3·4	1·47	4. VII	59°	5·8	1·25	20. IX	41°	4·0	1·39
25. „	„	5·0	0·99	25. IV	„	4·1	1·25	7. „	„	8·5	1·14	22. „	„	3·2	1·36
28. „	„	3·3	0·93					15. „	„	6·7	1·31	26. „	„	5·3	1·21
				13. V	57°	7·0	1·30	16. „	„	5·6	1·26	27. „	„	6·3	1·27
6. II	25°	2·7	1·16	16. „	„	4·9	1·17	25. „	„	7·8	1·18				
11. „	„	4·4	1·12	20. „	„	5·5	1·30	26. „	„	10·7	1·18	1. X	29°	4·2	1·19
21. „	„	2·4	1·19	24. „	„	4·3	1·32	27. „	„	12·6	1·22	5. „	„	2·9	1·18
22. „	„	2·6	1·30	29. „	„	7·1	1·19	29. „	„	6·2	1·37	24. „	„	4·5	1·00
24. „	„	4·4	1·05	31. „	„	8·4	1·26					25. „	„	5·0	1·00
								1. VIII	52°	7·2	1·17				
13. III	36°	1·7	1·50	2. VI	61°	8·4	1·.0	6. „	„	9·4	1·25	5. XI	19°	3·4	1·00
14. „	„	1·4	1·42	4. „	„	7·9	1·34	8. „	„	11·3	1·18	7. „	„	3·4	0·99
20. „	„	8·5	1·14	17. „	„	7·1	1·23	21. „	„	7·6	1·20	9. „	„	6·1	0·83
22. „	„	5·7	1·24	26. „	„	5·3	1·21	23. „	„	6·5	1·28	14. „	„	3·9	0·89
				28. „	„	7·0	1·14	27. „	„	14·5	1·08	17. „	„	1·5	1·00
10. IV	48°	3·0	1·36	29. „	„	7·5	1·21	29. „	„	8·2	1·24	18. „	„	1·7	0·98
14. „	„	6·1	1·36	30. „	„	6·7	1·22	30. „	„	7·2	1·14	19. „	„	·7	1·03
20. „	„	4·8	1·35									22. „	„	2·2	0·97
								4. IX	41°	12·8	1·11				
								5. „	„	12·3	1·11	5. XII	15°	1·1	0·82
												8. „	„	2·6	0·83
												12. „	„	1·8	0·78
												13. „	„	1·9	0·74
												14. „	„	2·0	0·80

Table 16.

Résumé annuel. Varsovie 1902.

Mois	Hauteur du soleil	Valeurs moy. mens. de l'hum. abs.	Moyennes mensuelles de l'insolation	Moy. mens. de l'insol. red à la dist. moy.	Moy. mens. de l'insol. red à la dist. moy. et à la hauteur 30°	Nombre de jours d'observation	Max. abs. de l'insolation (date)
I	17°	4·1	0·95	0·92	1·14	3	0·99 (25)
II	25°	3·3	1·16	1·14	1·21	5	1·30 (22)
III	36°	4·3	1·33	1·32	**1·26**	4	**1·50** (13)
IV	48°	4·3	**1·36**	**1·37**	1·21	5	1·47 (21)
V	57°	6·2	1·26	1·29	1·08	6	1·32 (24)
VI	61°	7·1	1·22	1·26	1·03	7	1·34 (4)
VII	59°	8·0	1·24	1·28	1·06	8	1·37 (29)
VIII	52°	**9·0**	1·19	1·21	1·02*	8	1·28 (23)
IX	41°	7·3	**1·24**	**1·25**	**1·14**	6	**1·39** (20)
X	29°	4·2	1·09	1·09	1·10	4	1·19 (1)
XI	19°	3·0	0·96	0·94	1·12	8	1·03 (19)
XII	15°	1·9*	0·79*	0·76*	1·04	5	0·83* (8)
Anné		5·6			1·16	69	1·50 (13/III

daire apparaît en septembre; au mois de mars, la marche est régulière, décembre fournit le minimum. La plus grande valeur a été observée le 13 mars; elle était 1·50.

En rapprochant les données pour Varsovie obtenues en 1901 avec celles de 1902, nous apercevons tout de suite que les données de l'insolation se rapportant à l'année 1902 [1]) sont en général plus basses.

En rapprochant les déterminations citées ci-dessus du schème théorique que nous avons formé pour Varsovie, nous voyons qu'en ce qui concerne le caractère de la marche annuelle de l'insolation, l'accord entre la théorie et les résultats des mesures directes est assez satisfaisant. Il va sans dire qu'en rapprochant les tableaux correspondants, il faut prendre en considération le fait que les valeurs théoriques ont été formées pour les 15 de chaque mois, tandis que dans le tableau de la marche vraie figurent les moyennes mensuelles.

§ 3. Après avoir déduit les moyennes mensuelles de Varsovie,

[1]) Surtout depuis le mois de mai 1902.

nous tâcherons à présent de déduire d'une façon analogue celles de Pavlovsk (1893 — 1900), de Pétersbourg (1895 — 1900) et de Catherinenbourg (1896 — 1898). Faute de place, nous ne citons ici que les moyennes mensuelles de l'insolation non réduites et le tableau annuel pour la période de cinq ans (1896 — 1900) à Pavlovsk et à Pétersbourg.

Voir table 17., page 494.

NB. Les places vides dans les mois correspondants signifient qu'il n'y avait pas eu de jours d'observation dans le temps désigné.

En dressant le tableau plein pour Pavlovsk pour la période de cinq ans, nous obtenons ce qui suit:

Table 18.

Résumé de cinq ans Pavlosk (1896—1900).

Mois	Hauteur du soleil	Valeurs moy. mens. de l'hum. abs.	Valeurs mens. de l'insolation	Moy. mens. de l'insol. réd. à la dist. moy.	Moy. mens de l'insol. red. à la dist. moy. et à la haut. 30°	Nombre de jours d'observ.	Max. abs. de l'insol.
I	9°	1·9	0·94	0·91	1·43	10	1·09
II	18°	1·6	1·13	1·11	1·31	22	1·28
III	28°	1·9	1·29	1·28	1·31	46	1·44
IV	40°	3·0	**1·36**	**1·37**	1·27	40	**1·47**
V	49°	5·1	1·30	1·33	1·16	34	1·46
VI	54°	7·7	1·28	1·32	1·12	37	1·46
VII	52°	8·7	1.25	1·29	1·10*	27	1·42
VIII	44°	**11·1**	1·22	1·24	1·10*	24	1·32
IX	33°	6·2	**1·28**	**1·29**	1·26	15	**1·36**
X	22°	5·6	1·14	1·13	1·25	17	1·35
XI	12°	2·6	1·02	0·99	1·37	13	1·12
XII	7°	1·2*	0·85*	0·82*	**1·45**	5	0·97*

Il est intéressant de comparer la marche des données de la 6-me colonne (les moyennes mensuelles de l'insolation réduites à la hauteur commune du soleil de 30° et à la distance moyenne) avec celle des moyennes de l'humidité abs.; la marche est complètement opposée: le maximum de l'insolation correspond au minimum de

Table 17.

Pavlovsk (1893—1900).

Mois Hauteur du soleil	I 9°	II 18°	III 28°	IV 40°	V 49°	VI 54°	VII 52°	VIII 44°	IX 33°	X 22°	XI 12°	XII 7°
Moy. mens.												
pour 1893	0·88*	1·07	1·34	1·38	**1·40**	1·35	1·32	1·28	**1·28**	1·07	0·98	—
„ 1894	0·74*	1·05	1·23	1·25	**1·31**	1·25	1·24	1·23	1·22	**1·27**	1·09	0·82
„ 1895	—	1·18	1·26	**1·31**	1·28	1·30	1·16	1·20	**1·29**	1·00	0·89	0·83*
„ 1896	0·87*	1·14	1·31	1·33	**1·36**	1·26	1·23	—	**1·23**	1·10	0·92	0·95
„ 1897	—	1·11	1·19	**1·36**	1·20	1·29	1·30	1·14	**1·35**	1·03	0·97	0·89*
„ 1898	1·00	1·11	1·18	**1·40**	1·34	1·28	1·20	**1·27**	·	1·20	1·04	0·77*
„ 1899	0·97*	1·11	1·35	1·34	1·33	**1·37**	1·24	**1·28**	1·26	1·19	1·10	—
„ 1900	1·00	1·16	1·27	**1·34**	1·32	1·24	1·26	1·19	**1·28**	1·12	0·95	0·73*

l'humidité et vice versa. Il n'est pas moins intéressant de comparer les données de la marche annuelle à Pavlovsk, déduites théoriquement, avec la marche des moyennes mensuelles exposée ci-dessus. Dans le tableau suivant, nous présentons cette marche théorique, en prenant les humidités absolues d'après le tableau précédent (c.-à.-d. celles qui avaient été notées les jours d'observation durant la période 1896—1900) et en admettant la valeur initiale I égale à

$$I = 1{\cdot}23 \ (h = 30^0, \text{ dist. moy., hum. abs.} = 5 \text{ mm.}):$$

Voir table 19., page 496.

Comme nous le voyons, le caractère général de la marche annuelle avec son maximum entre le mois d'avril et celui de mai, son maximum secondaire tombant en septembre et son minimum au mois de décembre, montre un accord assez satisfaisant avec la marche vraie, bien que les valeurs absolues de l'insolation présentent des différences assez considérables. Les valeurs théoriques des mois d'hiver sont plus basses, celles des mois d'été un peu plus hautes que les valeurs observées directement.

Enfin nous citons pour Pavlovsk les moyennes annuelles de l'insolation, obtenues d'après la même règle que celles de Varsovie:

Table 20.

Pavlovsk.

	Moy. ann. de l'insol.	Nombre de jours d'observ.	Moy. ann. de l'hum. abs.	Constante de l'actinomètre adoptée
1893	1·25	66	5·9	k = 1·10
1894	1.19	79	5·7	[1])
1895	1·17	81	5·7	k = 1·08
1896	1·23	62	4·7	k = 1·08
1897	1·21	48	5·4	k = 1·08
1898	1·26	57	5·0	k = 1·09
1899	1·26	61	4·7	k = 1·09
1900	1·20	62	5·7	k = 1·07

[1]) Les différentes constantes de l'actinomètre pour les différents mois (entre 1·04 et 1·10).

Table 19.

Marche annuelle théorique pour Pavlovsk.

Date	15/I	15/II	15/III	15/IV	15/V	15/VI	15/VII	15/VIII	15/IX	15/X	15/XI	15/XII
Hauteur du soleil	9°	18°	28°	40°	49°	54°	52°	44°	33°	22°	12°	7°
Moy. mens. de l'hum. abs.	1·9	1·6	1·9	3·0	5·1	7·7	8·7	11·1	6·2	5·6	2·6	1·2
Insol., réd. à la hauteur du soleil	0·707	1·029	1·205	1·330	1·400	**1·430**	1·419	1·369	1·264	1·109	0·847	0·598*
Insol., réd. à la hauteur et à l'hum. abs.	0·769	1·097	1·267	1·370	**1·398**	1·376	1·345	1·247	1·240	1·097	0·895	0·674*
Insol., réd. à la hauteur, à l'hum. abs. et à la distance relative du mois	0·80	1·12	1·28	1·36	**1·37**	1·34	1·31	1·22	**1·23**	1·11	0·92	0·71*

La moyenne annuelle pour la periode de cinq ans (1896 — 1900) est de 1·22 (h = 30°, dist. moy., l'humidité moy. abs. 5·1 mm.).

En rapprochant les moyennes annuelles des années distinctes, il faut probablement prendre en considération la variabilité de la constante de l'actinomètre à l'aide de laquelle on réduisait les observations. On l'établissait en la déduisant comme moyenne d'un petit nombre d'observations assez différentes les unes des autres et en 1894 on avait même appliqué un coëfficient variable pour les différents mois.

Les moyennes mensuelles de l'insolation à Pétersbourg se présentent comme il suit:

Voir table 21, page 498.

Le tableau annuel pour la période de cinq ans fournit les données suivantes:

Table 22.

Moyennes de cinq ans. Pétersbourg (1896—1900).

Mois	Hauteur du soleil	Valeurs moy. mens. de l'hum. abs.	Valeurs mens. de l'insolation	Moy. mens. de l'insol. réduites à la dist. moy	Moy. mens. de l'insol. réduites à la dist. moy. et à la hauteur 30°	Nombre de jours d'observ.	Max. abs. de l'insol.
I	9°	2·3	0·79	0·76	1·28	10	0·95
II	18°	1·6	1·08	1·06	1·26	15	1·23
III	28°	2·0	1·20	1·19	1·22	30	1·41
IV	40°	3·2	**1·30**	**1·31**	1·21	32	1·47
V	49°	5·2	1·25	1·27	1·10	44	**1·48**
VI	54°	7·5	1·22	1·26	1·06	45	1·42
VII	52°	9·6	1·21	1·25	1·06	33	1·38
VIII	44°	**9·7**	1·17	1·19	1·05*	28	1·35
IX	33°	5·9	1·13	1·14	1·11	11	1·23
X	22°	6·0	1·11	1·10	1·22	10	**1·36**
XI	12°	3·5	0·83	0·81	1·19	13	1·04
XII	7°	1·6*	0·68*	0·65*	**1·28**	5	0·79

Table 21.

Pétersbourg (1895—1900).

Mois Hauteur du soleil	I 9°	II 18°	III 28°	IV 40°	V 49°	VI 54°	VII 52°	VIII 44°	IX 33°	X 22°	XI 12°	XII 7°
1895	—	0·82*	1·13	1·17	1·23	1·24	1·14	1·26	**1·28**	1·14	0·91	--
1896	0·82	1·14	1·16	**1·37**	1·33	1·18	1·19	1·17	1·10	1·01	0·72	0·65*
1897	—	1·08	1·20	**1·31**	1·19	1·25	1·19	1·20	1·16	1·14	0·83	0·70
1898	0·80*	0·92	1·18	**1·33**	1·26	1·28	1·32	1·21		—	0·87	—
1899	0·88*	—	**1·27**	1·22	1·24	1·27	1·21	**1·27**	—	1·24	—	—
1900	0·65*	1·01	1·15	**1·19**	1·19	1·13	1·16	1·04	**1·12**	—	—	—

Les moyennes annuelles sont les suivantes:

Table 23.

Pétersbourg.

	Moy. ann. de l'insol.	Nombre de jours d'observ.	Moy. ann. de l'hum. abs.	Constante de l'actinomètre adoptée
1895	1·14	48	5·6	Act. (NN. 3,4), k = 1·24; Act. (NN. 15,16), k = 1·39
1896	1·14	65	6·0	Act. (NN. 15,16), k = 1·39
1897	1·15	63	5·4	Act. (NN. 15,16), k = 1·39
1898	1·17	58	5·6	Act. (NN. 15,16), k = 1·39; Act. (NN. 48,83), k = 1·14
1899	1·15	44	5·0	Act. (NN. 48,83), k = 1·14
1900	1·06	47	5·4	Act. (NN. 48,83), k = 1·07

La moyenne de cinq ans (1896 — 1900) est égale à 1·13 (30°, dist. moy., hum. abs. 5·5 mm.) c.-à.-d. beaucoup moindre qu'à Pavlovsk ce dont on doit chercher la cause en partie dans l'influence de la ville. En ce qui concerne la marche des moyennes annuelles, nous ferons observer qu'elles ne sont pas probablement exactement comparables les unes aux autres; la cause en est dans le fait que les constantes de l'actinomètre n'ont pas été déterminées avec assez d'exactitude. Ainsi, durant les années 1898 et 1899 on avait appliqué à l'actinomètre (composé des deux thermomètres N. 48 et 83) la constante K = 1·14, trouvée à l'aide d'un très petit nombre de comparaisons avec un autre actinomètre relatif; en 1900 on compara le même actinomètre avec un pyrhéliomètre, on trouva la constante K = 1·07 qui diffère considérablement de la première, et on l'adopta pour l'année en question. La constante précédente (K = 1·14) fut reconnue comme incertaine et d'après les „Annales" de 1900 (1-me partie, p. X) les valeurs de l'insolation déjà publiées en 1898 et 1899 „doivent être corrigées de 6%".

Nous donnons enfin le tableau des moyennes mensuelles (réduites à la hauteur moyenne du mois) à Catherinenbourg, ainsi que les moyennes de trois ans. Nous ne donnons pas les tableaux annuels détaillés; ce qui nous a empêchés de le faire, ce sont les fréquentes lacunes dans la continuité des observations et le petit nombre de ces dernières.

Table 24.

Catharinenbourg (1896—1898).

Mois	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Hauteur du sol.	12°	21°	31°	43°	52°	57°	55°	47°	36°	25°	15°	10°
1896	—	—	1·37	**1·45**	1·36	1·33	1·31	1·28	1·33	**1·34**	—	1.01*
1897	—	1·41	1·44	**1·45**	1·33	—	—	—	**1·32**	—	1·24	—
1898	—	1·18	1·43	**1·45**	1·40	1·33	1·30	**1·32**	1·26	—	—	—
Moyennes	—	1·30	1·41	**1·45**	1·36	1·33	1·31	1·30	1·30	**1·34**	1·24	1·01*

Ce tableau nous fait voir d'une manière générale que le caractère de la marche annuelle y est semblable aux précédents, bien qu'il soit difficile d'en tirer des conclusions détaillées. On peut seulement observer que les valeurs de l'insolation y sont beaucoup plus hautes qu'à Pavlovsk et surtout qu'à Pétersbourg.

* * *

Les données actinométriques que nous avons présentées nous ont permis de déterminer les variations subies par l'insolation sous l'influence des variations dans la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon et, ce qui est encore plus important, celles qui sont en rapport avec les variations de l'humidité absolue de l'atmosphère. Les réductions à la hauteur du soleil et à l'humidité absolue, ainsi que celles à la distance moyenne de la terre au soleil, nous ont fourni la possibilité de prévoir théoriquement le caractère de la marche annuelle de l'insolation et les mesures directes, faites sous nos latitudes, confirment ces prévisions théoriques. Ces résultats très intéressants nous permettent de constater d'une manière exacte l'influence prépondérante de la vapeur d'eau sur les phénomènes en question et nous font voir en même temps que la manière dont se répartissent les valeurs mensuelles de l'insolation, ne peuvent être expliquées que par la distribution annuelle des humidités absolues.

En nous basant d'une part sur la concordance que les valeurs mensuelles de l'insolation obtenues théoriquement présentent, en ce qui concerne le caractère de la marche elle-même, avec celles qui ont été déterminées directement, et d'autre part, en connaissant la distribution géographique de la marche annuelle de l'humidité absolue sur le globe terrestre, nous pourrions chercher à répondre à la question suivante: quelle devrait être, théoriquement, la marche annuelle de l'insolation dans différents endroits? En reproduisant, avec des données différentes, le calcul que nous avons fait pour Varsovie p. ex., nous trouverions sans difficulté que, dans la direction nord, au-delà du 70° de latitude, la marche de l'insolation, grâce à la diminution de l'amplitude de l'humidité absolue, devrait correspondre à la marche de la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon (c.-à.-d. qu'elle devrait arriver à son maximum au mois de juin, sans accroissements secondaires). Et au contraire, dans un endroit comme Péking ou l'humidité absolue oscille entre 2 mm. (janvier) et 18·2 mm. (juillet), le maximum devrait se déplacer vers

le mois de mars et le maximum secondaire vers celui d'octobre; quant au minimum, il faudrait théoriquement s'attendre à le voir apparaître non plus en décembre, mais au mois de juillet, et cela à cause de la présence d'une énorme quantité de vapeur d'eau dans l'atmosphère, compensant dans le sens négatif et avec un excédent considérable l'action favorable du soleil qui atteint alors sa plus grande hauteur.

Des conclusions de cette sorte ont été déjà confirmées par des mesures faites sous nos latitudes, elles sont donc jusqu'à un certain degré fondées et probables; elles n'en exigent pas moins une confirmation immédiate, obtenue au moyen de mesures faites sous d'autres latitudes; c'est ici le premier objet important des futures recherches actinométriques. Le second, non moins important, consisterait dans l'étude plus approfondie et détaillée de l'action de la vapeur d'eau sur l'insolation, à la manière de celle qui a été faite par M. Very (Atmospheric Radiation 1900). Il faudrait aussi étudier l'influence de l'humidité et de l'insolation dans la direction verticale; pour cela il faudrait faire entrer en considération dans une plus large mesure les couches supérieures de l'atmosphère, au-delà de celles qui entourent immédiatement l'endroit d'observation. Enfin, une des conquêtes météorologiques de la plus grande importance serait d'éclaircir la question difficile de la marche diurne de l'insolation, dans laquelle la vapeur d'eau joue sans aucun doute un rôle prépondérant.

Varsovie. Station Centrale Météorologique (Musée de l'Industrie et de l'Agriculture) Mai 1903.

---

33. MM. CHARLES REUTT et BRONISLAS PAWLEWSKI. **O kondensacyi oksimów z hydrazynami i o własnościach hydrazonów.** ***(De la condensation des oximes avec les hydrazines et des propriétés des hydrazones).*** Note présentée par M. L. Marchlewski m. t.

M. F. Just[1]) en faisant réagir quelques kétoximes sur les hydrazines a obtenu des kétohydrazones. Dans le présent travail, on a cherché à obtenir des corps de la forme

$$R.CH:N.NH.NH.R'$$

[1]) Berichte 19. 1205.

en faisant condenser des aldoximes avec les hydrazines. Or, par la condensation de ces corps, on n'obtient pas des produits de la forme ci-dessus. En revanche, on obtient des aldohydrazones, semblablement à ce qu'a obtenu M. F. Just: les kétohydrazones.

La réaction des hydrazines sur les oximes varie beaucoup selon le cas: parfois le rendement en hydrazones est très bon, d'autres fois très mauvais, d'autres fois encore, la réaction indiquée ne se produit guère. C'est ainsi qu'à la suite de la réaction de l'acétaldoxime, on n'a pu isoler aucun corps cristallin; pareillement le camphreoxime ne réagit point sur la phénylhydrazine.

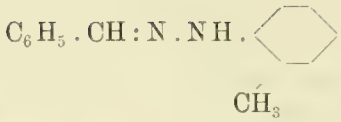
Par la réaction du benzaldoxime sur les hydrazines nous avons obtenu et avons pu examiner les hydrazones suivants:

1. Benzalphenylohydrazone, $C_6H_5 . CH : N . NH . C_6H_5$ Ce composé a été déjà obtenu avant nous, par d'autres procédés. Il se présente sous forme d'aiguilles et de prismes monosymétriques incolores qui fondent à une température de 158 à 160°. Le point de fusion de ce corps indiqué dans des travaux antérieurs, 152 à 156°, n'est pas exact; pareillement la mention, qu'on trouve dans ces travaux antérieurs, que le dit corps est jaune ou rouge, n'a pu être observée sur ce corps chimiquement pur, car à cet état il est toujours incolore.

Le benzalphénylohydrazone exposé à la lumière se colore rapidement en rouge et cette modification possède le même point de fusion et la même composition chimique que l'incolore. La couleur rouge de cet hydrazone disparaît peu à peu quand on le replace dans l'obscurité. Lorsque l'on l'expose de nouveau à la lumière, la couleur réapparaît. Cette couleur rouge disparaît aussi quand on chauffe rapidement ce corps à une température de 115 à 120°. Il est à remarquer que l'hydrazone incolore se décompose déjà à 100°, 105° et 110°. Il se produit une réaction que nous n'avons pu examiner de plus près, mais la proportion de carbone dans ce corps ainsi modifié se trouve notablement abaissée.

Le rendement de benzalphénylohydrazone est très bon, de manière que pour le préparer on peut avec avantage employer notre méthode.

2. Benzalortolylohydrazone, $C_{14}H_{14}N_2$, dont la structure est la suivante:



se présente sous la forme d'aiguilles jaune-dorées qui fondent à 100—102°. A la lumière il rougit fortement. L'hydrazone rouge fond déjà à 80—83°, tandis que le benzalphenylohydrazone possède le même point de fusion, qu'il soit incolore ou qu'il soit rouge. Le rendement en cet hydrazone est faible. Nous pensons avoir les premiers préparé ce corps.

3. Le benzalparatolylohydrazone, $C_{14}H_{14}N_2$, dont la structure peut être représentée par la formule

a été obtenu sous forme de grains et de courtes aiguilles d'une couleur de sable et qui seulement après trois cristallisations successives au moyen d'alcool dilué fondent à une température fixe de 114°. Exposé à la lumière, ce corps se colore en rouge clair et en même temps la température de fusion s'abaisse, selon la durée de l'exposition, à 108°, 104° et même, jusqu'à 101°.

Le rendement de cet hydrazone est faible. Ce corps, de même que le précédent, ne se trouve encore mentionné, à ce que nous croyons, dans aucune publication. Il est isomère avec le corps précédement décrit. Notons aussi que l'on connaît encore d'autres isomères de cet hydrazone.

---

34. M. GUILLAUME FRIEDBERG. **Zagłębie mioceńskie Rzeszowa.** ***(Das miocäne Becken von Rzeszów.)*** *(Sur le bassin miocénique de Rzeszów).* Mémoire présenté par M. J. Niedźwiedzki m. t.

Aus der Umgebung von Rzeszów waren bisher die Lithothamienkalke von Niechobrz, Siedliska, (Tietze, Hilber, Uhlig) und die Tone und Tonschiefer von Pobitno (Niedźwiedzki) bekannt. Der Verfasser konnte sich aber von einer weit grösseren Ausdehnung der Miocänablagerungen in hiesiger Gegend überzeugen und dartun, dass diese hier ein ellipsoidales Becken bilden, dessen

Grenze durch eine Linie gebildet wäre, welche sich durch die Ortschaften: Olchowa, Będziemyśl, Dąbrowa, Trzciana, Świlcza, Pobitno, Tyczyn, Przylasek, Siedliska, Babica, Lutorysz, Niechobrz, Wola Zgłobieńska, Olimpów und Nockowa hinzieht. In den genannten Ortschaften deuten die Aufschlüsse überall auf eine ufernahe Bildung, bloss in Zgłobień auf einen etwas entfernten Meeresstrand. In petrographischer Hinsicht finden wir überall längs des Randes des Miocänbeckes blaue Tone, Tonschiefer und Sande, dann Sandsteine und Konglomerate, die beiden letzt genannten Felsarten sind im allgemeinen seltener und sind in grösserer Menge in Trzciana, Dąbrowa und Będziemyśl zu finden. Ausserdem sind für die hiesigen Randbildungen zahlreiche in Tone und Sande eingepresste exotische Gesteine sehr bezeichnend, welche in Pobitno hauptsächlich aus Inoceramensandsteinen bestehen und überall dem angrenzenden älteren karpatischen Gesteinsmateriale entsprechen (siehe die geologische Karte). Einige Konglomerate (Dąbrowa, Będziemyśl) sind im ganzen aus zertrümmerten karpatischen Gesteinen gebildet, was die in ihnen gefundenen Inoceramenschalenfragmente beweisen. In manchen Orten sind auch sehr dünne Einschaltungen von Braunkohle vorhanden, welche jedoch keinen praktischen Wert hat.

In den Lithothamienkalksteinen muss man zwei Arten unterscheiden. In Świlcza und Lutorysz sind mächtige Bänke eines kleinkörnigen Lithothamienkalksteines in Tone und Sande eingelagert, bei welchen der Durchmesser der Lithothamienknollen kaum 1—2 mm beträgt; der Verfasser nennt sie „untere Lithothamienkalksteine“ und ihre Fauna entspricht grösstenteils der Fauna der Sande und Tone. Die eigentlichen „oberen Lithothamienkalksteine“ bilden ein höheres Niveau und sind in Przylasek, Siedliska, Niechóbrz, Wola Zgłobieńska und Olimpów zu finden. Am besten in Niechóbrz aufgeschlossen, zeigen sie hier einen auf etwa 20 m starken Komplex, welcher aus 1 m mächtigen Kalksteinbänken besteht, die durch dünne Zwischenlagen eines braulichen Tones getrennt sind. Oben überdeckt sie eine Amphisteginenschicht, welche zahlreiche Lithothamienknollen besitzt. Im besonderen muss man auch bemerken, dass die Knollen dieses Kalksteines grösser sind (einige cm im Durchmesser) und dass die Mächtigkeit der Kalksteine weniger als 20 m beträgt, was man am besten in Niechobrz sieht, woselbst in angegebener Tiefe der Kalkstein in ein kalkiges Austernkonglomerat übergeht. In etwas grösserer Tiefe müssen sich Tone und

Sande befinden, welche in kleiner Entfernung von den Steinbrüchen am Grunde des Bachthales zum Vorschein kommen.

Alle diese Kalksteine sind am Ufer eines sehr seichten Meeres gebildet, was übrigens die gefundenen Foraminiferen beweisen. Die Kalksteine im Orte Przylasek unterscheiden sich durch eine grössere tonige Beimengung, weshalb sie teilweise in einen kalkigen Mergel übergehen. Die Gipse in Siedliska bilden eine ganz andere Facies, obwohl sie, was das Alter anbelangt, gleichzeitig sind. Sie liegen nämlich hypsometrich ebenso hoch wie die Kalksteine und in ihrer Nähe dazu in derselbsn Richtung, indem sie ihre Verlängerung bilden. Die Ursache ihrer Entstehung möchte der Verfasser darin erblicken, dass hier ein tiefer Meerbusen war, welcher durch eine aus Menilitschiefern bestehende Barre vom Meere getrennt war. Obwohl der gänzliche Mangel an Versteinerungen keinen bestimmten Schluss zulässt, so scheinen doch die lokalen Verhältnisse zu dieser Annahme zu berechtigen (beiderseits des Gypsaufschlusses befinden sich steil einfallende Menilitschiefer). Der Gips ist feinblätterig (Selenit), die flachen Gipskristale sind in Ton eingebettet, ausserdem befinden sich dünne Zwieschenlagen einer faseriger Abart. Von oben sind die gipsführenden Tone durch etwas schieferigen blauen Ton bedeckt.

In einiger Entfernung von den Rändern der Einsenkung kommen die Miocänschichten in Zgłobień zum Vorschein, woselbst sie aus blauen Tonen bestehen. Die ziemlich zahlreich vorkommenden Foraminiferen, dann ein loser verkohlter Baumstaum (eine unscheinbare Braunkohlenschicht befindet sich im Tone) bekunden, dass das Meer hier nicht tief und die Entfernung vom Meeresufer gering war.

Die in allen Miocänschichten vorkommenden Fossilien sind schlecht erhalten, grösstenteils zerbrochen oder blos als Steinkerne und Abdrücke erhalten, deshalb konnte der Verfasser nur wenige der tatsächlich vorkommenden Arten bestimmen. In den Tonen und Sanden waren:[1])

**Cerithium nodoso-plicatum* M. Hörn	*Cerithium deforme* Eichw.
* „ *Schaueri* Hilb.	**Turritella Rabae* Niedz.
„ *bronniforme* Hilb.	„ *subangulata* Broc.
„ *lignitarum* Eichw.	„ *bicarinata* Eichw.

[1]) Mit einem Stern sind häufige Gattungen bezeichnet, bei Lithothamien-Kalksteinen mit *o* oberer Kalkstein, mit *u* unterer.

Turritella Archimedis M. Hörn.
**Trochus patulus* Brocchi
„ *quadristriatus* Dub.
Natica helicina Br.
Buccinium (Nassa) laevissimum Br.
Valvata piscinalis Müll
Rissoa Lachesis Bast
Bulla Lajonkajreana Bast
Dentalium entalis L.
„ *incurvum* Ren.
**Pannopaea Menardi* Desh.
**Pectunculus pilosus* L.
Lucina borealis L.
**Corbula gibba* Olivi
Ervilia pusilla Phill.
Pecten elegans Andrz.
„ *Rollei* Hörn (?).
**Ostrea digitalina* Dub.
„ *cochlear* Poli.

In den Lithothamienkalksteinen aber:

Cerithium deforme Eichw. u.
**Turritella Rabae* Niedz. u.
**Trochus patulus* Br. u.
* „ *Celinae* Andr. u.
Monodonta angulata Eichw. u.
* „ *Araonis* Bast u.
Columbella scripta Bell. u.
**Fissurella graeca* L. u.
Dentalium incurvum Ren u.
**Vermetus arenarius* L. u.
Pannopaea Menardi Desh. o.
Lima squamosa L. u. o.
**Lucina borealis* L. o u.
„ *leonina* Bast. u.
Venus multilamella Lam. u.
„ *cf. fasciculata* Reuss u.
**Corbula gibba* Olivi u.
**Ervilia pusilla* Phill. u.
Arca lactea L. u.
„ clathrata Def. u.
Cardita Partschi Gold. o.
„ *scalaris* Sov. o.
**Pecten latisimus* Br. o.
„ *an substriatus* d'Orb. u.
* „ *Lenzi* Hilb. u.
**Ostrea digitalina* Dub. u. o. (?)
* „ *cochlear* Poli o.
„ *plicatula* Gm. o.
„ *crassicosta* Sov. o.
Spondylus crassicosta Lam. o.
Echinolampus hemisphaericus Lk. o.

Die gefundenen Foraminiferenfauna ist im allgemeinen zahlreich. Aus den Sanden und Tonen wurden bestimmt [1]):

†*Cornuspira incerta* d'Orb.
†*Reophax difflugiformis* Br.
† „ *ovulum* Grzyb.
†*Trochammina proteus* Karrer
**Virgulina Schreibersiana* Cziż.
Bulimina elegans d'Orb.
„ *pupoides* d'Orb.
„ *Bucheana* d'Orb.

[1]) Mit † bezeichneten Arten sind wahrscheinlich auf sekundärer Lagerstätte und stammen aus den angrenzenden Inoceramenschichten:

Bulimina elegantisima d'Orb
„ „ *var seminuda* Terq.
Bolivina punctata d'Orb.
Textularia sagittula Defr.
„ *agglutinans* d'Orb.
„ *globifera* Reuss
Uvigerina pygmaea d'Orb.
„ *tenuistriata* Reuss
„ *asperula* Cziż.
Nodosaria Adolphina d'Orb.
„ *soluta* Reuss.
„ *obliqua* L.
„ *calomorpha* Reuss
„ (*Glandulina*) *cylindracea* Reus
„ „ *laevigata* d'Orb.
**Cristellaria cultrata* Mont
„ *mammilligera* Karrer
Cristellaria echinata d'Orb.
Polymorphina communis d'Orb.
„ *gibba* d'Orb.
„ *problema* d'Orb.
Pullenia sphaeroides d'Orb.
Sphaeroidina bulloides d'Orb.
Globigerina bulloides d'Orb.
„ „ *var triloba* Reuss
Orbulina universa d'Orb.
**Discorbina orbicularis* Terq.
„ *patelliformis* Brad.
Discorbina pusilla Uhlig
Truncatulina praecincta Karr.
„ *lobatula* Valk i Jac.
„ *akneriana* d'Orb.
„ *Ungeriana* d'Orb.
„ *viariabilis* d'Orb.
„ *Dutemplei* d'Orb.
„ *tenella* Reuss
„ *stella* Karrer
„ *reticulata* Cziż.
Anomialina badensis d'Orb.
„ *austriaca* d'Orb.
„ *grosserugosa* Gümb
„ *ammonoides* Reuss.
Pulvinulina Ficht i Moll.
„ *umbonata* Reuss
„ *Schreibersii* d'Orb.
**Rotalia Beccari* L.
„ *Soldanii* d'Orb.
„ *Römeri* Reuss
„ *orbicularis* d'Orb.
Nonionina umbilicatula Hant.
„ *Boueana* d'Orb.
**Polystommella crispa* L.
* „ *macella* Ficht. i Moll.
„ *aculeata* d'Orb.
„ *imperatrix* Brady
„ *striato-punctata* Ficht. i Moll.
Amphistegina Lessonii d'Orb.

Aus den Lithothamienkalksteinen und den sie begleitenden Tonen stammen:

Miliolina seminulum L. u.
Textularia carinata d'Orb. o.
„ *sagittula* Defr. o.
„ *agglutinans* d'Orb. o.
Textularia gramen d'Orb. o.
Nodosaria consobrina var. emaciata Reuss o.
Cristellaria cultrata Mont. o.

Polymorphina communis d'Orb. o.
**Globigerina bulloides* d'Orb. var. *triloba* Reuss o.
Orbulina universa d'Orb. o.
Discorbina orbicularis Terq o. u.
„ *patelliformis* Brady o.
„ *rosacea* d'Orb. o.
„ *platyomphyla* Reuss o.
„ *disca* Hantk. o.
„ *pusilla* Uhlig o.
„ *eximia* Hantk.
„ *semiorbis* Karrer o.
**Truncatulina lobatula* Walk. i Jac. o. u.
„ *communis* Röm. o.
„ *akneriana* d'Orb. o.
„ *subakneriana* Grzyb. o.
„ *Ungeriana* d'Orb. o.
„ *variabilis* d'Orb. o. u.
„ *tenella* Reuss o.
„ *Hantkeni* Rzeh o.
Truncatulina Haidingeri d'Orb. o. u..
„ *lucilla* Rzeh. o.
„ *capitata* Gümb o.
„ *osnabrugensis* Reuss. o.
Anomalina austriaca d'Orb. o.
„ *ammonoides* Reuss o.
**Pulvinulina repanda* Ficht i Moll o. u.
„ *oblonga* Will. o.
„ *Karreri* Rzeh. o.
„ *subcandidula* Grzyb. o.
„ *elegans* d'Orb. o.
**Rotalia* Beccari o. u.
„ *Soldanii* d'Orb. o.
Nonionina Boueana d'Orb. o.
**Polystomella crispa* L. o. u.
* „ *macella* Fich. i Moll. o. u.
**Amphistegina Lessonii* d'Orb. o.
**Heterostegina costata* d'Orb. o.

Diese Fauna beweist, dass das hiesige Miocän dem höheren Niveau der sogen. II. Mediterranstufe angehört, und zw. d. Tortonien. Es ist also zeitlich gleich mit anderen schon bekannten subkarpatischen Vorkommnissen wie Rajsko, Bogucice, Zgłobice, Niskowa, Grudna Dolna, Podmichale und Myszyn. Eine genaue Parallelisierung ist deshalb unmöglich, denn erstens ist die dortige fossile Fauna nicht genau bekannt, zweitens gelang es dem Verfasser auch nicht alle vorhandenen Gattungen zu sammeln, was in Anbetracht einer schlechten Erhaltung der Schalen in allen diesen Aufschlüssen natürlich erscheinen muss. In fast allen Lokalitäten finden sich einige sehr charakteristische Formen, wie: *Cerithium nodoso-plicatum* M. Hörn., *Cer. lignitarum* Eichw., *Turritella Rabae* Niedz., *Pecten elegans* Andr., *Ostrea digitalina* Dub. Manche Formen, welche in Niskowa, Myszyn sich vorfinden (Neritina u. a.), bei Rzeszów aber fehlen, bezeugen einige Verschiedenheiten, was die Facies anbelangt (brackisches Wasser).

Im Miocänbecken von Rzeszów sind alle Bildungen fast gleich-

zeitig, etwas jünger sind die oberen Lithothamienkalksteine, welche in Niechóbrz den Sanden und Tonen aufgelagert sind. Sie weisen darauf hin, dass das Meer einigen Schwankungen ausgesetzt war, der Meerbusen musste anfangs kleiner sein (untere Lithothamienkalke), erst später gewann er eine grössere Oberfläche und damals bildeten sich am ganz seichten Strande die oberen Lithothamienbänke.

An manchen Orten grenzen die Miocänbildungen an ältere karpatische und überall discordant. Die Lithothamienkalke von Olimpów sind den Inoceramenschichten aufgelagert, ebenso auch die Sande und Tone von Babica, in anderen Lokalitäten im Süden des Beckens den Menilitschiefern (Przylasek, Siedliska, Niechobrz).

Das Miocän habe ich ein Miocänbecken genannt, weil man überall ein Einfallen gegen die Mitte findet. In Będziemyśl, Dąbrowa, Trzciana und Świlcza ist es gegen S., in Pobitno gegen E., in Przylasek, Siedliska, Babica und Niedobrz gegen N., in Nockowa endlich gegen NO. Die ganze Einsenkung entstand nach der Ausbildung des karpathischen Bogens, was die discordante Lagerung des Miocäns auf den älteren Schichten beweist.

Die hiesige Gegend bildete zur Zeit des oberen Miocäns einen Meerbusen des grossen Meeres und war wahrscheinlich vermittels einer Meerenge im Zusammenhange mit der Umgebung von Grudna Dolna, was die Aufschlüsse des Miocäns bei Broniszów und Mała in der Mitte des Weges von Rzeszów nach Grudna beweisen. In der Nähe von Pobitno musste eine Verbindung gegen Osten sein, worauf kleine Entblössungen eines Miocäntegels bei Strażów (leider ohne makro- und mikroskopische Versteinerungen) hinweisen.

Was für ein Zusammenhang zwischen dem Miocänbecken von Rzeszów und den „krakowiecer Tonen“ ist, welche das Liegende der Glacialbildungen der Tiefebene zwischen der Weichsel und dem San bilden, konnte ich leider nicht feststellen. In Anbetracht der stratigraphischen Verhältnisse könnte man zwar annehmen, dass die genannten Tone unter die Miocänschichten von Rzeszów einfallen (die krakowiecer Tone ebenso wie die Miocänschichten im Norden des Beckens haben gleiches Einfallen gegen S.), aber auch infolge der grossen Entfernung zwischen beiden Aufschlüssen (20 km.), dass dieses scheinbare Einfallen wirklich nicht stattfindet, sondern dass die „krakowiecer Tone“ in grösserer Entfernung vom Meeresrande entstanden, also eine Ablagerung eines etwas tieferen Meeres bilden. In diesem Falle würde der Unterschied zwischen dem Mio-

cän von Rzeszów und den „krakowiecer Tonen“ nur, was Facies, nicht was Alter anbelangt, bestehen. Da bisher gar keine Fossilien in den krakowiecer Tonen gefunden wurden, kann der Verfasser diese Annahme nur als möglich erklären.

Es ist sonderbar, dass wir längs des Karpatenrandes die Lithothamienkalke nur bei Rzeszów finden, während sich an anderen Orten diese Facies nicht gebildet hat. Jenseits der Weichsel in Polen, treten aber bei Pińczów, Busk und Stopnica ganz analoge Kalksteine auf, welche von Kontkiewicz untersucht wurden. Ihre Fauna stimmt vollkommen mit derjenigen von Rzeszów überein, was folgende Fossilien beweisen, welche bei Pińczów gefunden wurden:

Heterostegina costata
Amphistegina Hauerina (= *Lessonii*)
Pecten latissimus
Cardium hians
Pannopaea Menardi
Pecten sp.
Lithothamium ramosissimum.

Diese fast vollkommene Übereinstimmung weist darauf hin, dass es zeitlich und faciell dieselben Bildungen sind. Das ziemlich breite, aber nicht tiefe miocäne Meer hatte sowohl an dem nördlichen wie auch an den südlichen Ufern zahlreiche Nulliporen-Bänke gebildet, welche an sehr seichten Stellen wuchsen und das Material der Nulliporen (Lithothamien)-Kalksteine bildeten.

Eine gründliche und sichere Beantwortung der Frage, ob alle dem jüngeren Miocän angehörigen Schichten zwischen den Karpaten und den Gebirgen von Kielce und Sandomierz den Sedimenten desselben Meeres entsprechen, wird erst dann gegeben sein, wenn wir alle diesbezüglichen Aufschlüsse und ihre Fossilien kennen werden, was bis jetzt nicht der Fall ist.

35. M. F. TONDERA. **Przyczynek do znajomości pochwy skrobiowej.** ***(Beitrag zur Kenntnis des funktionellen Wertes der Stärkescheide).*** *(Contribution à la connaissance de la gaine d'amidon).* Mémoire présenté par M. E. Godlewski m. t.

(Planche X).

In den jungen krautartigen Trieben vieler dikotylen Pflanzen erscheint an der inneren Grenze der primären Rinde eine gewöhnlich nur eine Zellage starke Schicht, deren parenchymatische Zellen mit groben Stärkekörnern gefüllt sind und sich wegen ihres Inhaltes von dem umgebenden Parenchym auffallend abheben. Diese Schicht wird die Stärkescheide genannt. Sie findet sich auch in der Umgebung der geschlossenen Bündel der monokotylen Arten vor. Der funktionelle Wert der Stärkescheide wurde ursprünglich (Sachs) so gedeutet, dass dieselbe als Wanderbahn zur Fernleitung der in den Blättern erzeugten Stärkekörner in die unteren Teile des Triebes dienen soll. Nachdem aber H. Heine seine eingehenden Untersuchungen über die physiologische Bedeutung der Stärkescheide veröffentlicht hatte und an einer Reihe von gut gewählten und überzeugenden Beispielen den Nachweis erbrachte, dass die Stärkescheide nicht zur Fernleitung von plastischen Stoffen, wohl aber zur Aufspeicherung derselben an der Stelle dient, wo sie verbraucht werden sollen, ist diese neue Auffassung des funktionellen Wertes der Stärkescheide in allen Werken, die über Pflanzenphysiologie handeln, allgemein angenommen worden.

In den letzten Jahren tauchte aber noch eine neue Auffassung der Funktion der Stärkescheide auf, welche durch die Untersuchungen von Němec und Haberlandt eingeleitet und im laufenden Jahre von Haberlandt als Statolithentheorie des Geotropismus veröffentlicht worden ist. Nach dieser Theorie sollen die Zellen der Stärkescheide Statocysten bilden, in welchen die Reizperzeption der Schwerkraft der orthotropen Organe stattfindet. Bekanntlich lagern sich die groben Stärkekörner älterer Partien der Stärkescheide, da sie spezifisch schwerer sind als das sie umgebende Protoplasma auf der untersten Zellwand ab und üben einen Druck auf die Plasmahäute der Zellwände aus. Haberlandt nimmt bei der Ausgestaltung seiner Statolithentheorie des Geotropismus an, dass dieser Druck von den Plasmahäuten der Querwände sowie der radialen Längswände nicht empfunden wird; die Plasmahäute der Tangentialwände werden aber durch den Druck gereizt, und zwar werden

die den äusseren Tangentialwänden anliegenden Plasmahäute durch den Druck der Stärkekörner zur Wachstumsförderung angeregt, an den inneren Tangentialwänden dagegen wird dadurch eine Wachstumshemmung ausgelöst.

Befindet sich daher ein orthotropes Organ längere Zeit in horizontaler Lage, dann sinken von den Quer- und Radialwänden die Stärkekörner auf die Tangentialwände hinab, bewirken auf den äusseren (unteren) Tangentialwänden die Wachstumsförderung, an den inneren (oberen) die Wachstumshemmung, sie veranlassen folglich die geotropische Krümmung des Triebes. Der Geotropismus soll daher durch die Reizwirkung der Stärkekörner auf die Plasmahäute der Stärkescheide hervorgerufen werden.

Wollte man die Richtigkeit dieser recht anziehenden Statolithentheorie auf Grund der Beobachtungen im Bereiche der Cucurbitaceen-Familie prüfen, so kommt man zum Schlusse, dass dieselbe als nicht beweiskräftig hingestellt werden muss.

Zu diesem Zwecke habe ich eine grössere Anzahl von Arten vorwiegend im frischen Zustande untersucht; die Stärkescheide wurde auf die Beschaffenheit und Lage der Stärkekörner durch zahlreiche sich nachfolgende Stengelglieder einer eingehenden Untersuchung unterzogen, auch die Grösse der Stärkekörner wurde in Betracht gezogen. Als erstes Internodium wurde bei meiner Beobachtung das unterste Stengelglied angenommen, welches noch mit der Sprossspitze die Nutationsbewegungen ausführt und ungefähr 2 cm lang ist.

Von diesem Stengelgliede beginnt nämlich die Bildung des Festigungsringes, welcher die Steifheit des Triebes bedingt, so dass die stärksten geotropischen Krümmungen des Stengels an der Basis dieses ersten Stengelgliedes zum Vorschein kommen, den folgenden Internodien aber infolge der Zunahme der Steifheit des Festigungsringes völlig abgehen.

Beobachtet man nun die Beschaffenheit der Zellen der Stärkescheide in den jungen Stengeln, so findet man, dass in dem ersten und in den zwei nachfolgenden Stengelgliedern aller untersuchten Cucurbitaceen-Arten die Stärkekörner feinkörnig und gleichmässig im Plasma der Zelle verteilt sind. Als Beispiele führe ich an: *Cyclanthera pedata* Schrad., *Lagenaria vulgaris* Ser., *Momordica Charantia* L., *Sicyos angulata* L., *Thladiantha dubia* Bunge u. v. a. Gewisse Arten besitzen Zellen mit gleichmässig verteilten Stärke-

körnern noch im sechsten Stengelgliede, z. B. die Stengel von *Cucurbita Pepo* L., *Cucumis salivus* L.; in einzelnen Arten, in welchen die Stärkescheide sehr lange tätig ist, wie z. B. in *Coccinia indica* W. & A., reichen diese Zellen noch in das zwölfte, in *Bryonia alba* L. sogar in das achtzehnte Stengelglied hinab.

Erst in den weiter unten gelegenen Stengelgliedern lagern sich die jetzt grobkörnigen Stärkekörner an der unteren Zellwand ab. Dies geschieht aber erst in den Partien der Stärkescheide, welche schon ausser Tätigkeit gesetzt sind, weil der Festigungsring an diesen Stellen völlig herausgebildet ist.

Das Sinken der Stärkekörner auf die untere Zellwand ist somit mit dem Übergange der Stärkescheide in den Ruhestand gleichwertig.

Aus den Untersuchungen, welche ich an den Cucurbitaceen-Arten angestellt habe, erweist sich somit, dass die Annahme, welche den Grund der Statolithentheorie des Geotropismus bildet, als ob in allen Zellen der Stärkescheide nur an der unteren Zellwand die Stärkekörner abgelagert wären, für die Cucurbitaceen sich nicht aufrecht erhalten lässt, da diese Erscheinung nur in den unteren Teilen der Stärkescheide beobachtet wird; in diesem Teile der Stengel kommen aber die geotropischen Krümmungen wegen zu grosser Widerstandsfähigkeit des Festigungsringes nicht zum Vorschein. Ein auffallendes Beispiel der Unhaltbarkeit der Statolithentheorie im Bereiche der Familie der Cucurbitaceen liefert der Stengel von *Cucurbita Pepo* L.; in dem kriechenden Sprosse dieser Art finden sich die Stärkekörner an der unteren und oberen Hälfte zahlreicher älterer Stengelglieder nur an den Tangentialwänden der Stärkescheide vor, dennoch lässt sich in diesen Sprossen keine Spur der Aufwärtskrümmung entdecken.

Man gelangt dagegen zu positiven Ergebnissen, wenn man die Erscheinungen, die an der Stärkescheide der Cucurbitaceen beobachtet werden, nach der Anschauung von Heine beurteilt. Während meiner Untersuchungen habe ich vielfach Gelegenheit gefunden, mich von der Richtigkeit dieser Auffassung des physiologischen Wertes der Stärkescheide zu überzeugen. An eine Reihe von Längs- und Querschnitten, die von ganz jungen, älteren und ganz alten Stengelgliedern hergestellt wurden, habe ich die Beobachtung gemacht, dass die Stärkescheide nur durch eine bestimmte Zeit in der Rinde aufzufinden ist, und zwar hängt das Vorkommen derselben

von dem Entwickelungszustande des Festigungsringes der sekundären Rinde ab. Beobachtet man einen Querschnitt des zweiten, noch ganz jungen Stengelgliedes von *Cyclanthera explodens* Naud. (Fig. 1 und 6), so findet man unter der einschichtigen Epidermis ein zwei Zellagen starkes Chlorophyllparenchym, welches dem chlorophyllfreien Grundparenchym anliegt. In den weiteren Stengelgliedern erscheint die Stärkescheide vor dem Auftreten der ersten Elemente des Festigungsringes an der inneren Grenze der primären Rinde, d. h. in der innersten Schicht des Chlorophyllparenchyms und ist anfänglich mit kleinen, in den nächstfolgenden Internodien aber mit grobkörnigen Stärkekörnern erfüllt. Bald darauf bilden sich die Zellen des von innen an die Stärkescheide angrenzenden Parenchyms in Bastfasern um (Fig. 2 und 7); in den noch älteren Stengelgliedern erstreckt sich diese Umbildung auf die tieferen Zellschichten des Grundparenchyms, bis schliesslich drei oder vier Zellagen desselben in einen starken Festigungsring sich umgestaltet haben.

Zur Zeit der Bildung des Festigungsringes kann man immer in den Zellen der Stärkescheide grobe Stärkekörner beobachten; sobald aber der Festigungsring völlig ausgebildet ist, verschwindet die Stärke in den Zellen der Stärkescheide, in welchen wieder Chlorophyllkörner erscheinen (Fig. 3 und 9).

Dieses Verhalten der Stärkescheide ist in der Familie der Cucurbitaceen als normal zu bezeichnen, ich habe es an den Arten: *Cyclanthera pedata* Schrad., *Sicyos angulata* L., *Cucumis sativus* L., *Momordica Charantia* L., *Thladiantha dubia* Bunge., *Trichosanthes palmata* Roxb., *Cucumis Melo* L. und *Cucurbita Pepo* L. beobachtet.

In gewissen Arten findet man jedoch eine Abweichung von der angegebenen Art des Verhaltens der Stärkescheide. Die Stärkescheide vermittelt auch in diesen Fällen das Wachstum des Festigungsringes, sie wird aber noch in solchen Stengelgliedern angetroffen, wo die Entwickelung derselben schon lange abgeschlossen ist. Diese Erscheinung beobachtet man z. B. in der Art *Bryonia alba* L. Eine nähere Einsicht in den Rindenbau dieser Stengelglieder, deren Festigungsring kein Wachstum mehr aufweist, erklärt den Zweck der weiteren Fortdauer der Stärkescheide. Die Stärkekörner werden in diesem Falle zur Erzeugung der sich noch vermehrenden Kollenchymfasern verwendet, welche in den in der äusseren Rinde sich ausbreitenden Kollenchymplatten durch die Umbildung der Parenchymzellen er-

zeugt werden (Fig. 5 und 12). Mit dem Aufhören des Wachstums dieser mechanischen Elemente verschwindet auch die Stärke in den Zellen der Stärkescheide.

Eine ähnliche Erscheinung beobachtet man in der Art *Coccinia indica* W. & A. Das längere Bestehen der Stärkekörner in den Zellen der Stärkescheide nach dem Aufhören des Wachtums des Festigungsringes wird in dieser Art in der Notwendigkeit der Ernährung des Phellogens seine Begründung finden (Fig. 10). Dies ist nämlich die einzige Art der Cucurbitaceen, in welcher ich die Korkbildung beobachtet habe.

Aus dem Verhalten der Stärkescheide ersieht man, dass die Stärkekörner derselben gar nicht weiter wandern, sondern an Ort und Stelle verbraucht werden, um die Cellulosewände des Bastfaserringes zu erzeugen. Die Stärkescheide ist demnach keine Leitungsbahn für plastische Stoffe, sondern sie ist ein Aufspeicherungsort des in der nächsten Nähe zu verwenden Nährmaterials.

Das längere Bestehen der Stärke in den Zellen der Stärkescheide der zwei zuletzt angeführten Arten beweist ebenfalls, dass die Stärkekörner nicht fortgeleitet, sondern dicht daneben verbraucht werden.

Endlich muss ich die Arten erwähnen, welche in der Familie der Cucurbitaceen keine Stärkescheide aufweisen, dies sind; *Luffa acutangula* Roxb., *Trichosanthes colubrina* Jacq., *Bryonia dioica* Jacq. Diese Arten besitzen sehr umfangreiche Gefässbündel, besonders die des inneren Kreises (Fig. 8), so dass die äusseren Siebröhrenbündel sowohl des äusseren als auch des inneren Bündelkreises sehr nahe am Festigungsring liegen. In solchen Stengeln erfolgt die Versorgung des wachsenden Festigungsringes mit den plastischen Stoffen direkt von den naheliegenden Siebröhrenbündeln, ohne vorherige Aufspeicherung der Stärkekörner in den Zellen der Stärkescheide.

---

36. M. M. KOWALEWSKI. **Studya helmintologiczne, część VII.** (***Helminthological studies, Part VII, with 3 plates***). (*Études helmintologiques, VII-me partie*). Mémoire présenté par M. Lad. Kulczyński m. c.

(Planche XI — XIII).

The author describes in this paper a new species of Metorchis Looss, two new ones of Trichosoma Rud. and a curious species of Diploposthe Jacobi; he also gives a new description of Trichosoma resectum Duj. and mentions an interesting case in the anatomy of Bilharziella polonica M. Kow.

1. Metorchis tener sp. n. (fig 1.). Found in the liver of Mergus merganser R. Very similar to M. xanthosomus (Crepl.) Braun (1902), differing by a more delicate and slender body, by the position of the posterior sucker almost in the middle of its length, and much (twice to three times) smaller testes and ovary.

2. In one (amongst 58) male specimen of Bilharziella polonica M. Kow. (1895) from an Anas querquedula L. the author encountered the two intestinal branches quite separated up to the posterior end of the body, as shewn by fig. 2.

3. Trichosoma resectum Duj. (1843) (fig. 3, 4, 5, 6). — Although the desriptions of this worm, given by Dujardin (3), Eberth (4) and v. Linstow (8), are sufficient to recognize the species, they contain however some incorrections. It may be mentioned here that the lateral bands in the female are 20 — 24 μ broad, i. e. about $^1/_4$ of the breadth of the body, the ventral band — 10 — 12 μ broad, i. e. $^1/_8$ of the same breadth; in male, the former bands are 12 — 14 μ broad i. e. $^1/_6$ of the breadth of the body and ventral band — 6 — 7 μ broad, i. e. $^1/_{10}$ — $^1/_{12}$ of the same breadth. Eggs 60 μ long by 28 μ broad, with little longitudinal ribs upon the ends. Spiculum 1·26 mm. long. The form of the bursa can be understood only by means of the adjoined drawings (fig. 3, 4).

4. Trichosoma parile sp. n. (fig. 7, 8, 9). Found in the intestine of Bubo maximus Siebb. Female: length 20 mm.; length of neck 7·8 mm. Lateral and ventral bands equal, 20 μ broad, i. e. $^1/_4$ of the breadth of the body. Genital opening about 0·1 mm. distant from the posterior end of the oesophagus. Eggs 64 μ long and 32 μ broad, with a superficial net of very delicate, chiefly longitudinal ribs. Male: Body 16·1 mm. long; neck 7·5 mm. long. Lateral and ventral bands are equal, 10 μ broad, i. e. $^1/_6$ of the breadth

of the body. Spiculum 935 μ in length. Its pouch covered with little spines. The form of the bursa is shewn by figs. 8 and 9.

5. Trichosoma simile sp. n. (figs. 10, 11), from the intestine of Turdus pilaris L. Female: 12·8 mm. long; neck 5·8 mm. long. Lateral bands about 23 μ broad, i. e. $^1/_3$ of the breadth of the body; ventral band 14 μ broad, i. e. $^1/_5$ of the same breadth. Genital opening near the end of the oesophagus. Eggs 66 — 68 μ long and 30 — 32 μ broad, with a delicate superficial net. Male: Body about 7 (?) mm. long; the posterior part of the body (behind the neck) 2·6 mm. long. Lateral bands 14 μ broad, i. e. $^1/_4$ of the breadth of the body; ventral band 7·5 μ broad, i. e. $^1/_7$ of the same breadth. Spiculum 0·5 mm. in length. The form of the bursa is shown by fig. 11.

6. Diploposthe sui-generis sp. n. (?) (fig. 12 — 20). One specimen only of this tape-worm, found by the author in the intestinum of a Fuligula leucophthalmos Bechs., could not be determined with certainty because the head with hooks and the older proglottides with oncospheres were missing in it. The structure of the internal organs however, especially of the reproductive male organs, offers many details so different from those in D. laevis Dies. (the anatomy of D. lata Fuhrm. is up to the present unknown) as described by Jacobi (6) and Cohn (2), that the worm in question may be considered: either as an interesting atavistic specimen of D. laevis (or. D. lata?), or (and this seems more probable) as a new species.

We cite here some more important details:

Musculature. Besides the five systems of the muscle fibers described by Jacobi and Cohn in D. laevis, here still occur three new ones: 1) a layer of the subepithelial longitudinal thin muscle fibers (fig. 16, m. l. sep.) under the profound epithelial cells, 2) a layer of few very thin diagonal fibers crossing one another (fig. 16, m. d.), lying between the last mentioned muscles and the external longitudinal ones, 3) a thick ring of circular or transversal muscle fibers (fig. 19, m. t. ex.) near the posterior margin of each proglottis. In the arrangement of the other muscles also some differences occur, as shown by fig. 16 and 19. It will suffice to mention that the inner longitudinal muscle bundles extend in D. sui-generis more sideward. than in D. laevis (Jacobi): there are more over 2 to 3 bundles outside the vasa excretoria belonging to the same layer (fig. 19. m. l. in.).

Nervous trunks. All the ten longitudinal nerves and three transversal nervous rings, described by Cohn in D. laevis are also found in the worm in question. In addition to them one sees here still: 1) an inner thin nerve ring, lying on the boundary of the proglottides (fig. 19, n. n. t. in.), towards the inner transversal muscles, arising from the internal or principal lateral nerve; 2) shorter similar transversal nerves (fig. 16, n. gen.), which lie in the same horizontal plane, but in the middle of each proglottis, near the reproductive glands, and start from the middle external nervous ring, near the median longitudinal nerves extending towards the interior.

Reproductive organs. The most important difference between D. laevis and D. sui-generis consists in the number of the testes, vasa efferentia and vasa deferentia. Whilst in the former species there are only three testes, in D. sui-generis their number varies from 3 to 7. The common number is 5 to 6 (fig. 12, 13, tes.). A more important detail is that from each testis proceed several vasa efferentia, in various numbers, 2 to 5 (fig. 14, v. ef.). Winding many times and joining one another, they form a very much complicated net of canals, which opens into the proximal ends of both vasa deferentia (fig. 14, v. def). It is interesting to note that those proglottides which do not possess the middle testis (fig. 14) contain nevertheless a similar net (fig. 20, r. ef.), a fact which can only be explained by the supposition that the testis disappeared, leaving however its vasa efferentia.

The author considers the cells surrounding the seminal vesicle (fig. 14, c. p.) as glandular, producing an albuminoide fluid, in which the spermatozoons swim and which fills the vesicle, also the second little vesicle near the circus-pouch and, in the older proglottides, both vaginae and the vagina communis (fig. 17). The hooks upon the cirrus (fig. 15) resemble those in D. laevis according to the description of Jacobi (and contra Cohn). In the structure of the female reproductive organs there is no great difference between D. laevis and D. sui-generis. The vagina communis is here however not „eine kleine Erweiterung", as Cohn says (2) in D. laevis, but a large long canal, as shewn by fig. 17 (vg. e.).

All the other details in the anatomy of the tapeworm in question are evident from the adjoined drawings (fig. 12—20) and require no further explanation.

37. M. STANISLAS MAZIARSKI. **O stosunku mięśni do naskórka u skorupiaków.** ***(Sur les rapports des muscles et de la cuticule chez les Crustacés).*** Note présentée par M. Nap. Cybulski m. t.

(Planche XIV).

A l'occasion de nos recherches sur les organes segmentaires des Vers de terre, nous avons examiné des coupes de la peau de ces animaux et nous avons observé de minces fibrilles musculaires qui proviennent de faisceaux musculaires sous-cutanés, passent dans la couche épithéliale et se terminent librement entre les cellules cylindriques qui la forment. Cette observation nous a conduit à étudier de près le mode d'insertion des muscles à la cuticule de la peau. Nous avons choisi les Arthropodes comme objet d'études pour avoir affaire à des muscles striés et pour pouvoir déterminer d'une façon plus précise leur terminaison sur la cuticule, n'ayant eu sous les yeux, dans nos premières recherches, que les muscles des Annélides qui n'ont pas de striation transversale.

Comme objet de recherches, nous nous sommes servi des Crustacés que nous avons recueillis pendant notre séjour au laboratoire russe de Zoologie à Villefranche s/Mer. Nous avons utilisé les petits Crustacés, comme *Crevettes*, *Copépodes*, *Phronima sedentaria;* les objets les plus favorables pour nos recherches ont été les *Mysis*, sp. *Mysis Telson*, *Mysis elongata,* dont quelques exemplaires nous ont été fournis par nos amis, M. Prenant de Nancy et M. Godlewski de Cracovie; nous leur en exprimons ici notre reconnaissance.

Les matériaux en question ont été fixés dans divers liquides: liquide de Mann, de Flemming, de Vom Rath, sublimé acétique et d'autres; comme coloration nous nous sommes servi surtout de l'hématoxyline ferrique (méthode d'Heidenhain), qui nous a donné les meilleurs résultats et les images les plus démonstratives.

La question que nous voulons traiter dans notre court exposé, n'est pas tout à fait nouvelle; elle a déjà servi de thème aux travaux de quelques auteurs.

Nicolas[1]) a fait des recherches sur les rapports des muscles et de l'épithélium dans le pharynx du Péripate; il a vu des petits

[1]) Nicolas A. Sur les rapports des muscles et des éléments épithéliaux dans le pharynx du Péripate (Peripatus capensis). Revue biolog. d. Nord de la France. T. II. 1889—1890.

faisceaux musculaires s'approcher de la base des cellules épithéliales, se diviser ensuite en branches minces et délicates et pénétrer dans la couche épithéliale, où elles s'insinuent entre ses cellules constitutives; ces minces fibrilles musculaires entourent les cellules et semblent former une sorte de réticulum à leur surface. Il n'existe pas de continuité entre les fibrilles musculaires et les fibrilles protoplasmiques qui se trouvent dans les cellules épithéliales. L'auteur n'a pas observé non plus la réunion de ces fibrilles avec la cuticule qui recouvre la surface libre des cellules épithéliales.

Nous trouvons dans les travaux de Frenzel[1]) et de Ide[2]) des observations presque analogues. Le premier a fait des recherches sur le canal digestif des Crustacés et a observé la pénétration des fibres musculaires striées dans l'épithélium, où elles se terminent par de minces fibrilles lisses *„faserige Muskelsehnen“*, qui s'attachent à la cuticule. Ces fibrilles tendineuses se logent entre les cellules et ne possèdent pas de striation transversale, — quoique, dans la figure 8., Frenzel dessine une fibre musculaire striée qui se continue entre les cellules épithéliales jusqu'à la cuticule, où elle s'attache.

Ide conclut dans le même sens; les fibres musculaires viennent s'attacher à la cuticule, elles se placent entre les cellules épithéliales et montrent une striation (v. l. c. la fig. 64), ou bien cette striation disparaît, quand la fibre musculaire parvient à la base de la cellule épithéliale.

La méthode de recherche de ces deux auteurs est assez grossière et ne donne pas de renseignements plus précis au sujet de l'insertion des muscles sur la cuticule.

Les résultats des auteurs que nous venons de citer représentent une première manière de voir sur la question qui nous intéresse; — l'autre manière de voir est représentée par List, Leydig et Duboscq.

List[3]) dans ses recherches sur les Crustacés Décapodes, re-

[1]) Frenzel J. Ueber den Darmcanal der Crustaceen nebst Bemerkungen zur Epithelregeneration. Arch. f. mikr. Anat. Bd. XXV.

[2]) Ide M. Le tube digestif des Edriophthalmes. Etude anatomique et histologique. La Cellule, T. 8. 1892.

[3]) List, Th. Morphologisch-biologische Studien über den Bewegungsapparat der Arthropoden. 2 Theil. Die Decapoden. Mittheil. d. Zoolog. Station zu Neapel. Bd. XII.

cherches plutôt physiologiques, croit que les fibres musculaires s'attachent directement aux cellules épithéliales qui produisent la cuticule („*Hypodermiszellen*").

Leydig[1]) affirme que les fibrilles musculaires striées s'unissent avec des fibrilles protoplasmiques, différenciées dans les cellules épithéliales, et que la réunion des fibres musculaires à la cuticule se fait par l'intermédiaire de ces fibrilles protoplasmiques intracellulaires.

Duboscq[2]) a constaté que, dans les endroits où les muscles viennent s'insérer sur la cuticule, la membrane basilaire fait défaut et que les fibrilles musculaires se continuent directement avec celles des cellules épithéliales; elles perdent avant cette réunion leur striation ordinaire.

D'après les recherches de ces auteurs, les fibrilles musculaires finissent à la base des cellules épithéliales; à ce niveau elles s'attachent aux fibrilles protoplasmiques qui s'insèrent elles-mêmes à la cuticule chitineuse.

Dernièrement un court travail de Nils Holmgren[3]) traite la question de l'insertion des fibres musculaires sur la chitine chez les Diptères, comme *Musca vomitoria*, *Sarcophaga carnaria*, larves de *Chironomus* et d'autres; trois modes variés d'insertion s'y trouvent décrits.

1° La cellule musculaire repousse les cellules-mères qui produisent la chitine, perd sa striation caractéristique, se divise en un nombre considérable de minces fibrilles qui s'enfoncent dans la partie superficielle de la chitine.

2° Les cellules musculaires parviennent jusqu'à la couche épithéliale, perdent à cet endroit leur striation et se divisent en un grand nombre de minces fibrilles primitives qui pénètrent entre les cellules épithéliales et s'enfoncent quelque peu dans la chitine.

Le troisième mode d'insertion des fibrilles musculaires est le suivant: Les fibrilles musculaires parviennent jusqu'à la couche épithéliale, perdent comme ailleurs leur striation et se divisent en un certain nombre de fibrilles plus minces, qui pénètrent dans les cellules épithéliales-mêmes et s'attachent à la couche chitineuse.

[1]) Leydig, Fr. Zelle und Gewebe. Bonn, 1885.

[2]) Duboscq, O. Recherches sur les Chilopodes. Arch. de Zoologie expériment. T. VI. 1898.

[3]) Holmgren Nils. Ueber das Verhalten des Chitins und Epithels zu den unterliegenden Gewebearten bei Insecten. Anatom. Anzeig. Jg. XX.

La structure des cellules-mères de la chitine est fibrillaire; des fibrilles plus ou moins distinctes parcourent le corps cellulaire suivant son axe, mais elles ne se continuent pas avec les fibrilles musculaires; ces dernières sont des éléments tout à fait étrangers dans le corps cellulaire. Dans ces trois cas les fibrilles musculaires concourent à former la cuticule chitineuse.

Les recherches que nous avons entreprises chez les Crustacés nous ont persuadé que l'insertion des muscles sur la cuticule se fait, chez ces animaux, d'une façon tout à fait autre; les images que nous offrent nos préparations ressemblent beaucoup à celles que donnent Leydig, Duboscq ou Nils Holmgren, mais il nous semble qu'il faut déduire des faits observés une autre interprétation que celle de Holmgren.

Nous voulons tout d'abord décrire les particularités observées sur nos préparations, puis, après avoir présenté nos résultats, nous ferons quelques déductions théoriques.

L'objet de nos recherches ont été les muscles sous-cutanés qui s'attachent à la cuticule dans certains points du corps de l'animal. Pour se faire une idée grossière de cette insertion, il suffit de regarder attentivement la figure 1. sur la planche XIV. Le premier coup d'oeil jeté sur cette figure nous enseigne que nous avons affaire à des cellules musculaires bien délimitées l'une de l'autre par des lignes un peu obliques; celles-ci courent le long de ces cellules et s'attachent par des épaississements triangulaires à la peau, c'est-à-dire à la couche épithéliale, dans laquelle nous trouvons semés assez regulièrement les noyaux des cellules épithéliales, cellules-mères de la cuticule.

Les lignes obliques, limitant les cellules musculaires, fortement colorées, ne représentent rien autre que les coupes longitudinales du sarcolemme, gaîne sans structure spéciale, qui constitue un cylindre dans lequel se trouvent le sarcoplasme et les fibrilles musculaires différenciées. Le sarcoplasme possède sur nos préparations une structure grossièrement granuleuse ou fibrillaire; des fibrilles épaisses, très peu colorables, parcourent la cellule surtout dans le sens transversal et s'attachent d'un côté au sarcolemme, de l'autre aux fibrilles musculaires, à l'endroit de la ligne Z. Les cellules musculaires (au nombre de six dans notre figure) possèdent des noyaux ovales, vésiculeux, qui se placent à côté des fibrilles musculaires ou entre elles; un sarcoplasme plus granuleux les entoure.

La fig. 2. nous présente une cellule musculaire qui s'attache par ses deux extrémités à la cuticule. Le sarcolemme entoure le sarcoplasme qui offre un aspect granuleux; celui-ci renferme des noyaux semés ça et là dans sa masse et des fibrilles musculaires, régulièrement striées. Sur l'une des faces de la cellule musculaire, le sarcolemme s'attache à la membrane basilaire de la couche épithéliale.

Les fibrilles musculaires montrent une striation très nette, très régulière et possèdent la structure bien connue de la substance musculaire; elles s'attachent à la couche épithéliale de la manière suivante: Entre l'épithélium et le tissu musculaire, qui se compose d'un certain nombre de cellules, existe une limite distincte, un peu onduleuse, comme nous la voyons sur la figure 1.

Cette ligne est dans certains endroits tout à fait homogène, dans les endroits, au contraire, qui correspondent aux insertions des fibrilles musculaires, elle se compose d'une grande quantité de petits points (corpuscules), plus colorables que le reste de la ligne. De ces points partent de minces fibrilles qui traversent les cellules épithéliales et atteignent la face interne de la cuticule; d'où l'impression que les fibrilles intraépithéliales sont des prolongements directs des fibrilles musculaires ou que les cellules musculaires se réunissent directement avec les cellules épithéliales et que les fibrilles musculaires se continuent avec les fibrilles cytoplasmiques des éléments épithéliaux. C'est ce que doivent élucider nos recherches.

Il faut d'abord appeler l'attention sur la structure de la cuticule et des cellules épithéliales qui la produisent.

La cuticule chitineuse montre d'ailleurs un aspect tout à fait homogène; mais on peut parfois trouver dans son épaisseur deux ou trois couches parallèles qui se distinguent par leur réaction variable vis-à-vis de l'hématoxyline ferrique (v. les figures 3 et 4). La partie externe renferme des grains de pigment et des sels calcaires en quantité assez variable, aussi montre-t-elle une structure granuleuse. Les couches plus voisines des cellules-mères de la cuticule présentent à un plus fort grossissement une structure légérement striée; cet aspect est dû à des lames très minces, rangées les unes sur les autres parallèlement à la surface des cellules épithéliales. Dans beaucoup de préparations et avec les plus forts grossissements, la cuticule ne présente aucune structure.

Quant à l'épithélium, il n'est pas toujours bien développé; ce

fait empêche de préciser d'une part la structure des cellules épithéliales, d'autre part les relations qui existent entre les cellules et la cuticule et entre les cellules épithéliales et les cellules musculaires.

Chez les animaux plus jeunes, chez lesquels la couche épithéliale, à cause d'une élaboration active de la cuticule, est beaucoup plus épaisse, on peut voir ces éléments avec plus de netteté. La couche épithéliale, dans ces conditions, est formée par une rangée de cellules qui possèdent la forme de cylindres, ordinairement plus larges que hauts. Les limites entre les cellules ne sont pas bien visibles; on pourrait plutôt croire que nous avons affaire à un syncytium cellulaire, dans lequel nous trouvons semés à intervalles assez réguliers, de grands noyaux vésiculeux, ovoïdes, renfermant une quantité restreinte de chromatine nucléaire (v. la fig. 3).

Il faut des préparations bien différenciées après coloration à l'hématoxyline ferrique pour se faire une idée exacte de la structure du protoplasme des cellules épithéliales. Leur cytoplasme montre une constitution évidemment fibrillaire, à cause de la différenciation dans le corps cellulaire de fibrilles plus épaisses, plus fortement colorées qui sont situées dans un protoplasme fondamental également fibrillaire; mais les fibrilles protoplasmiques sont très fines, très peu colorées (v. la fig. 2), on pourrait même croire le plus souvent que le protoplasme fondamental est amorphe ou granuleux.

Les fibrilles en question parcourent le corps cellulaire séparément ou réunies en faisceaux de forme souvent conique (v. la fig. 3); elles remplissent uniformement la cellule ou laissent partiellement des endroits libres; elles sont presque toujours rangées perpendiculairement dans le corps cellulaire et entourent les noyaux. Les fibrilles parviennent jusqu'à la surface libre de la cellule, où elles se terminent par de petits épaississements qui atteignent la surface interne de la cuticule sans y pénétrer. Elles possèdent une épaisseur assez variable; les unes sont plus fines, les autres plus épaisses, elles présentent toutes la même réaction caractéristique et se colorent spécifiquement par l'hématoxyline ferrique.

Quand nous examinons les cellules épithéliales sur une grande quantité de préparations, nous voyons que les filaments intracellulaires ne sont pas toujours aussi visibles, que leur quantité est assez variable, que leur développement est beaucoup plus accusé, si la coupe passe près de l'endroit où les muscles s'attachent à la cu-

ticule et que leur arrangement dans la cellule devient dans ce cas de plus en plus régulier. Il suffit de jeter un coup d'oeil sur la fig. 3. pour nous persuader que la différenciation de ces filaments caractérisés par leur forme, leur réaction colorante et leur relation avec la charpente cytoplasmique n'est pas accidentelle, mais qu'elle est causée par la fonction spécifique des cellules qui les renferment. Les propriétés morphologiques que possèdent ces filaments nous montrent aussi que nous avons affaire à des différenciations spéciales du protoplasme, à du protoplasme supérieur, qui se présente dans les cellules épithéliales sous la forme de filaments, orientés dans un sens défini; — ce sont des *Tonomitomes*, nom que nous avons donné aux filaments correspondants des cellules trouées des néphridies des Vers de terre[1]) et que Heidenhain[2]) a donné également aux filaments des cellules épithéliales de l'intestin grêle de la Grenouille.

La question du protoplasme supérieur est traitée plus complétement dans notre travail cité plus haut, nous décrirons plus loin la fonction spéciale des Tonomitomes dans les cellules sous-cuticulaires des Crustacés, après avoir étudié les rapports de ces filaments avec des fibrilles musculaires.

Examinons la figure 4. de la planche XIV; elle nous présente, sous un grossissement beaucoup plus fort que la fig. 1., une cellule musculaire à l'endroit où elle s'attache sur la cellule épithéliale.

Dans la cellule musculaire délimitée par le sarcolemme, nous voyons que le sarcoplasme présente un aspect fibrillaire, ses fibrilles constitutives forment une sorte de réticulum, dans lequel sont plongées des fibrilles musculaires régulièrement striées. A côté des fibrilles se trouvent deux noyaux, grands, vésiculeux, de forme ovale, avec un nucléole assez volumineux et la chromatine nucléaire sous forme d'un réticulum. Le sarcolemme, comme on le voit bien, s'accole intimement à la membrane de la cellule épithéliale par un épaississement triangulaire, coloré plus fortement que les parties voisines. A ce niveau nous constatons aussi une plus grande quantité de sarcoplasme qui se présente sous la forme de minces

[1]) Maziarski S. Recherches cytologiques sur les organes segmentaires des Vers de terre. Arch. polon. d. Scienc. biolog. et medic. T. II. 1903.

[2]) Heidenhain M. Ueber die Structur der Darmepithelzellen. Arch. f. mikr. Anat. Bd. LIV. 1899.

lamelles, rangées parallèlement à la surface basale de la cellule épithéliale.

La limite entre la cellule musculaire et la cellule épithéliale est tout à fait nette; elle est formée par une ligne homogène sauf à l'endroit où les fibrilles musculaires viennent s'attacher à la cuticule; — elle est alors composée de petits corpuscules allongés. Des fibrilles partent de ces corpuscules dans deux directions: d'un côté des fibrilles minces et délicates, peu colorables qui traversent le corps de la cellule épithéliale et s'attachent par de petits épaississements à la surface interne de la cuticule; de l'autre des fibrilles plus grosses, qui se continuent dans la cellule musculaire et montrent une striation tout à fait régulière. Les premières représentent les filaments dont nous avons parlé plus haut, les *Tonomitomes*, qui se sont différenciés dans le corps cellulaire; les autres sont les fibrilles musculaires.

Il existe donc un accolement des fibrilles musculaires avec les Tonomitomes de la cellule épithéliale au niveau des corpuscules allongés; cet accolement se fait pour les fibrilles musculaires à l'endroit de la ligne Z, ce qu'on voit très facilement sur les figures 4 et 5.

La fig. 5 représente quelques fibrilles musculaires à l'endroit où elles s'attachent sur la cellule épithéliale. Cette figure, dessinée à un grossissement très fort, montre encore quelques particularités sur la structure de la substance musculaire et sur les rapports qui existent entre les fibrilles musculaires et les filaments de la cellule épithéliale. L'élément musculaire de chaque fibrille se compose de deux disques de substance anisotrope, séparés l'un de l'autre par de la substance isotrope, de deux disques de substance isotrope, qui se trouvent aux deux extrémités des disques anisotropes; enfin l'élément musculaire est fermé par la ligne Z. La ligne Z du dernier élément musculaire répond au corpuscule allongé qui se trouve dans la ligne limitant la cellule épithéliale et la cellule musculaire. Chaque fibrille musculaire est en rapport avec un filament de la cellule épithéliale. Il existe entre les deux formations une différence évidente: les Tonomitomes sont des filaments beaucoup plus minces, peu colorables et toujours homogènes, tandis que les fibrilles musculaires montrent partout une structure caractéristique.

Les préparations obtenues sur des *Copépodes* (fig. 6) et sur la *Phronima sedentaria* (fig. 7) montrent les mêmes relations entre les cellules musculaires et la couche épithéliale.

Partout les fibrilles musculaires se continuent, au niveau de la membrane cellulaire et par l'intermédiaire de corpuscules allongés avec des filaments différenciés dans le corps de la cellule épithéliale.

Après avoir décrit et démontré d'une façon précise le mode d'insertion des cellules musculaires sur les éléments épithéliaux, il nous faut encore répondre à quelques questions qui se posent nécessairement. On pourrait croire peut-être que les filaments intracytoplasmiques sont des prolongements directs des fibrilles musculaires et qu'ils diffèrent de ces dernières seulement par le défaut de striation, enfin que les corpuscules allongés correspondent à la ligne Z du dernier élément musculaire et ne forment pas les points épaissis d'accolement de deux substances différentes.

Nous n'avons aucune raison d'accepter la continuité directe des fibrilles musculaires avec des filaments intracellulaires, continuité qui se ferait de façon que les fibrilles musculaires pénétrassent dans le corps de la cellule épithéliale et s'attachassent directement à la cuticule. Dans ces conditions, la membrane de la cellule épithéliale serait perforée par les fibrilles musculaires et ne présenterait pas les contours nets que nous voyons sur les préparations. Les épaississements seraient moins réguliers et beaucoup plus petits, car ils correspondraient seulement aux lignes Z; celles-ci, même sur des préparations observées à un très fort grossissement, sont constituées par des formations évidemment plus petites et qui se montrent sous la forme d'une ligne et non d'un corpuscule (v. la fig. 5).

Quand nous examinons soigneusement la limite entre deux cellules aussi dissemblables, — épithéliale et musculaire, — nous voyons que la membrane est bien conservée sur toute sa longueur, qu'elle renferme des épaississements allongés qui sont constitués par l'accolement de deux fibrilles différentes par leur aspect et leur structure; les unes sont en effet striées, les autres sont tout à fait homogènes; elles montrent aussi des différences dans leur épaisseur et leur colorabilité.

Les unes et les autres sont formées par une substance différente: les fibrilles musculaires par une substance contractile qui se caractérise par l'arrangement régulier des disques anisotropes et isotropes; les filaments — *Tonomitomes* — différenciés dans le corps de la cellule épithéliale, par une substance protoplasmique, résistant

aux actions mécaniques. Les premières possèdent la contractilité; les autres ont pour fonction de fournir au corps de la cellule épithéliale une résistance plus grande aux actions mécaniques, produites par la contraction des fibrilles musculaires. L'insertion de ces dernières à la membrane de la cellule épithéliale a déterminé dans le corps cellulaire la différenciation de formations filamenteuses de protoplasme supérieur, de *Tonomitomes*, qui parcourent le corps cellulaire dans un sens correspondant à la direction des fibrilles musculaires. Les filaments en question s'attachent d'un côté à la cuticule, de l'autre ils se continuent par l'intermédiaire de corpuscules allongés avec des fibrilles musculaires qui aboutissent à la membrane cellulaire au niveau de la ligne Z. Cette orientation des Tonomitomes a pour résultat de parer à l'inconvénient de l'insertion des fibrilles musculaires sur la cuticule par l'intermédiaire des éléments épithéliaux.

Les propriétés morphologiques sur lesquelles nous avons insisté plus haut, les rapports qui existent entre ces filaments et le protoplasme fondamental d'un côté, et les fibrilles musculaires de l'autre côté, nous permettent de les considérer comme des formations du protoplasme supérieur, différentes de la substance musculaire et chargées d'une fonction spéciale.

On pourrait encore supposer que les filaments intracellulaires représentent les minces tendons des fibrilles musculaires. Mais les filaments en question se rencontrent non seulement dans les endroits où a lieu l'insertion des fibrilles musculaires, mais aussi dans les autres parties de la couche épithéliale (v. la fig. 3); c'est surtout au niveau des points d'insertion que leur disposition devient plus régulière et correspond à la direction de l'insertion et de la contraction des fibrilles musculaires; dans les autres régions au contraire leur orientation peut être assez variable.

On peut donc affirmer que les filaments intraprotoplasmiques et les fibrilles musculaires sont des éléments tout à fait différents, qui sont réunis par l'intermédiaire des corpuscules épaissis qui se trouvent dans la membrane de la cellule épithéliale.

C'est à ce point de vue que l'opinion de Holmgren (l. c.) diffère de la nôtre; cet auteur fait pénétrer les fibrilles musculaires qui ont perdu leur striation, dans les cellules épithéliales; nous, au contraire, attribuons aux fibrilles qui s'accolent aux fibrilles musculaires, une autre signification. Holmgren a-t-il donné

des arguments convaincants pour établir que les fibrilles qui pénètrent dans les cellules épithéliales sont des fibrilles musculaires et par conséquent contractiles? La striation n'est-elle pas caractéristique pour une fibrille musculaire? Peut-être sur l'objet utilisé par N. Holmgren pour ses recherches, les prolongements des fibrilles musculaires pénétraient-ils dans les cellules épithéliales; mais le défaut de striation nous laisse des doutes sur la nature musculaire qu'il leur attribue.

Les résultats de nos recherches se présentent de façon suivante: Chez les Crustacés, l'insertion des muscles à la cuticule se fait par l'intermédiaire des cellules épithéliales, qui sont les cellules-mères de la cuticule. Dans ces cellules se différencient des filaments de protoplasme supérieur, que nous appelons les *Tonomitomes;* d'un côté ils s'attachent à la cuticule. de l'autre aux fibrilles musculaires au niveau de la membrane cellulaire, — les parcelles musculaires aboutissent à cette membrane par la ligne Z. Le rôle de ces filaments est de fixer les fibrilles musculaires à la cuticule et d'agir comme des formations plus résistantes contre les actions mécaniques, causées par la contraction des fibrilles musculaires.

Explication des figures de la planche XIV.

Toutes les figures ont été dessinées à la chambre claire d'Abbé; la table à dessiner à la hauteur de la platine du microscope.

Fig. 1. *Mysis Telson.* Coupe perpendiculaire passant par le point d'attache des cellules musculaires à la cuticule. Grossiss. Zeiss. obj. 4·0, 0·95, oc. 4. Fixations liqu. de Vom Rath. Nous voyons six cellules musculaires bien délimitées l'une de l'autre par le sarcolemme; dans le sarcoplasme sont semés çà et là des noyaux, on y voit aussi les fibrilles musculaires régulièrement striées. Sous la cuticule, il existe une couche de cellules épithéliales avec des noyaux semés irrégulièrement. Dans les cellules, au point d'insertion des fibrilles musculaires, nous voyons de minces fibrilles qui traversent toute l'épaisseur de la cellule épithéliale et atteignent la surface interne de la cuticule. Le sarcolemme des cellules musculaires s'accole par des épaississements triangulaires sur la membrane homogène des cellules épithéliales; dans cette membrane existent aussi de petits corpuscules; ce sont les points d'accolement des fibrilles musculaires et des filaments intraprotoplasmiques.

Fig. 2. *Mysis elongata.* Une cellule musculaire qui s'attache au niveau de ses deux extrémités sur la cuticule. Même grossissement. Fixat. liqu. de Mann. D'un côté, la cellule musculaire s'accole au moyen de son sarcolemme à la couche épithéliale. son autre face est libre. Au niveau des deux extrémités, les fibrilles musculaires s'attachent aux filaments différenciés dans le corps des cellules épithéliales. Le sarcoplasme présente un aspect granuleux, il renferme des noyaux et des fibrilles musculaires régulièrement striées.

Fig. 3. *Mysis Telson.* Coupe perpendiculaire passant par la cuticule et la couche épithéliale sous-jacente. Grossiss. Immers. homog. Zeiss. 1·30, 2·0, oc. 6. Liqu. de Mann; coloration à l'hématoxyline ferrique. Les cellules épithéliales forment une sorte de syncytium, leurs limites ne sont pas visibles. Dans le protoplasme des cellules, les filaments — *Tonomitomes* — plus ou moins épais sont rangés perpendiculairement ou obliquement; dans une cellule se trouve un cône formé de fibrilles.

Fig. 4. *Mysis Telson.* Coupe perpendiculaire du point d'insertion d'une cellule musculaire. Fixat. liquide de Vom Rath. Grossissem. Immers. hommog. Zeiss, 1·30, 2·0, oc. 6. La cellule musculaire, délimitée par le sarcolemme, dans lequel se trouve le sarcoplasme réticulaire, des noyaux et des fibrilles musculaires régulièrement striées, s'accole à la membrane des cellules épithéliales par des épaississements triangulaires du sarcolemme. Dans la cellule épithéliale courent de minces fibrilles qui s'accolent avec des fibrilles musculaires en des points plus épais; cet accolement se fait pour les parcelles musculaires au niveau de la ligne Z. Les filaments intraépithéliaux s'attachent à la cuticule. Le noyau couvert par les filaments est coupé un peu obliquement. Dans la cuticule, on peut distinguer cinq lamelles différentes par leur coloration.

Fig. 5. *Mysis elongata.* Coupe perpendiculaire passant par le point d'insertion d'une cellule musculaire. Fixat. Liqu. de Mann; coloration à l'hématoxyline ferrique. Grossissem. Immers. apochr. Zeiss, 1·30, 2·0, oc. 12. La figure représente quatre parcelles musculaires, dont chacune se compose de deux disques de substance anisotrope Q, séparés par la substance isotrope M, de deux disques de substance isotrope I et des lignes Z aux deux extrémités. Au niveau de la ligne Z de la dernière parcelle, se trouve un corpuscule allongé C, qui est le point d'accolement de la parcelle musculaire avec le filament différencié dans la cellule épithéliale. Les filaments sont beaucoup plus minces et très peu colorés; ils s'attachent à la cuticule (Cu) avec des petits épaississements.

Fig. 6. *Copépodes.* Coupe perpendiculaire au niveau du point d'insertion d'une cellule musculaire. Liqu. de Mann, coloration à l'Hématoxyline ferrique. Grossiss. Immers. homog, Zeiss, 2·0, 1·30, oc. 6. Sous la cuticule assez épaisse nous voyons une rangée de cellules épithéliales avec des noyaux fortement colorés. Une cellule musculaire avec le sarcoplasme granuleux s'attache à la membrane de la cellule épithéliale, dans laquelle se trouvent les corpuscules d'accolement des deux sortes de fibrilles.

Fig. 7. *Phronima sedentaria.* Coupe perpendiculaire passant par l'insertion des muscles à la cuticule. Fixat. au Formol picrique, coloration à l'hématoxyline ferrique. Grossissem. Immers. homog. 1·30, 2·0, oc. 4. Nous voyons six cellules musculaires s'attacher par l'intermédiaire des filaments des cellules épithéliales sur la cuticule. La structure des fibrilles musculaires n'est pas aussi régulière que chez les Mysis, — mais on peut constater que là aussi les parcelles musculaires aboutissent à la membrane épithéliale au niveau de la ligne Z. Les noyaux des cellules épithéliales sont entourés par des filaments.

Laboratoire de Physiologie et d'Histologie de l'Université de Cracovie.

38. M. PHILIPPE EISENBERG. **O przystosowaniu bakteryj do sił ochronnych zakażonego ustroju.** ***(Über die Anpassung der Bakterien an die Abwehrkräfte des infizierten Organismus).*** *(Sur l'adaptation des microorganismes aux moyens de défense de l'organisme infecté).* Mémoire présenté par M. N. Cybulski m. t.

I. In Anbetracht der biologischen Rolle des B. pyocyaneus als fakultativen Parasiten erscheint die Seroreaktion berufen, gegebenen Falls darüber zu entscheiden, ob er nur als harmloser Saprophyt auf der Wunde vegetiert oder sich aktiv am Krankheitsprozess beteiligt hat. In einem Falle von tötlich verlaufender Wundinfektion konnte ein typischer Pyocyaneusstamm neben pyogenen Coccen und Pseudodiphteriebacillen aus dem Wundsekret isoliert werden. Das Serum des betreffenden Patienten agglutinierte einen Laboratoriumstamm von Pyocyaneus sowie von Fluorescens liquefaciens in der Verdünnung von $^1/_{100}$ resp. $^1/_{200}$, während der aus dem Kranken isolierte Stamm auch bei $^1/_2$ nur Spuren von Agglutination zeigte. Die Agglutination des Fluorescens liqu. sowie die geringere Beeinflussung anderer zugehöriger der Fluorescens-Gruppe kann auf Gruppenagglutination zurückgeführt werden; die Inagglutinabilität des aus dem infizierten Organismus gezüchteten Stammes, die auch gegenüber Pyocyaneus-Immunserum vom Kaninchen konstatiert wurde, findet ihre Analogie in dem ähnlichen Verhalten der aus Typhuskranken gezüchteten Typhusstämme, wie es von zahlreichen Untersuchern beschrieben wurde. Praezipitierende Eigenschaften gegenüber praezipitablen Pyocyaneus-Filtraten konnten im Serum nicht nachgewiesen werden. Beim bakteriziden Versuch in vitro zeigte sich der aus dem Kranken gezüchtete Stamm resistent gegenüber der bakteriziden Wirkung des menschlichen Serums, während alle anderen Pyocyaneus — sowie Fluorescens-Stämme in ausgesprochener Weise abgetötet wurden. Das Blut des Kranken zeigte schon bei Lebzeiten des Kranken in vitro sowie bei der Autopsie in den Gefässen selbst sehr prägnante Autoagglutination; das bei Lebzeiten dem Kranken entnommene Serum erwies sich als isoagglutinierend, während das nach dem Tode erhaltene derselben Blutart gegenüber inaktiv war. Die von S. Flexner behauptete ursächliche Rolle der Autoagglutination bei der Entstehung von hyalinen Thromben erscheint nach diesem Befund sehr zweifelhaft.

II. In Anbetracht der oben konstatierten Resistenz des aus dem infizierten Organismus gezüchteten Pyocyaneusstammes wurden nach dieser Richtung 4 aus Typhuskranken isolierte Typhusstämme, u. zw. 3 aus Roseolen nach der Methode von Neufeld-Schmiedicke, 1 aus dem Blut nach Castellani-Courmont untersucht. Mit einem Typhusimmunserum vom Pferd (Wert 1/30·000—1/50·000) geprüft, wurden die Stämme bei 1/2000—1/6000 agglutiniert, einer davon gab selbst bei 1/100 eine negative Reaktion. Der bakterizide Versuch wurde an jungen Bouillonkulturen im hängenden Tropfen angestellt und innerhalb 48—72 Stunden die Proben einer öfteren Beobachtung unterzogen. Die dazu verwendeten Sera stammten teils von Typhus-Kranken und Rekonvaleszenten teils auch von anderweitig Erkrankten, daneben wurden vergleichsweise normale Sera von Kaninchen und Pferden herangezogen; alle Sera wurden in möglichst frischem Zustande verwendet.

Als Vergleichsobjekt diente immer ein seit langer Zeit auf künstlichen Nahrböden fortgezüchteter Laboratoriumstamm. Morphologisch konnten bei den bakteriziden Versuchen folgende Details beobachtet werden: bei starker Serumwirkung mit vollkommener Abtötung der Bakterien zerfielen die Stäbchen zu einem feinkörnigen, schwach lichtbrechenden Detritus, der zum teil nachträglich verschwand; daneben waren undeutliche Schatten von Stäbchen mit angenagten Kontouren zu sehen, die meistens weiter unverändert blieben. Bei schwächerer Serumwirkung kam die Pfeiffer'sche Umwandlung zu Kügelchen zum Vorschein; in Übereinstimmung mit Radziewsky wird diese Erscheinung am besten als Ausdruck einer Wechselwirkung zwischen den bakteriziden Körpern und der noch lebenden Bakterienzelle aufgefast; ein grosser Teil der dabei entstehenden Kügelchen ist noch lebensfähig und kann durch Vermehrung eine neue Kultur erzeugen. In seltenen Fällen beobachtet man, dass die Kügelchen zu grossen, stark lichtbrechenden, scharf begrenzten Kugeln von der Grösse eines Leukozyten und darüber heranwachsen, die in ihrem Inneren eigentümliche Differenzierungen ihres Inhalts aufweisen und einmal entstanden sich nicht weiter verändern; diese Gebilde dürften vielleicht als Schwellungsprodukte der Kügelchen aufgefasst werden, über ihre Entstehungsbedingungen kann vorläufig nichts Bestimmtes gesagt werden. Beim Vergleich der bakteriziden Serumwirkung auf die aus dem Organismus frisch gezüchteten Stämme und den Laboratoriumstamm ergab sich, dass während letzter

in prägnantester Weise abgetötet wurde, die ersten sich vollkommen resistent zeigten und von anfang an sich üppig vermehrten.

Die Resistenz zeigte sich quantitativ begrenzt, indem bei Verwendung von Typhusrekonvaleszenten-Seris, die stärker bakterizid wirken, auch diese Stämme beeinflusst wurden, jedoch in geringerem Grade und durch stärkere Serumkonzentrationen als der Laboratoriumstamm. Die Resistenz erstreckt sich auch auf die Wirkung der Sera anderer Tierarten, scheint hier jedoch weniger ausgesprochen zu sein als beim Menschenserum. Diese Resultate wurden auch durch einige zur Kontrolle angestellte bakterizide Plattenversuche bestätigt. Ihre Zurückführung auf eine Besetzung des Bakterienreceptoren für bakterizide Körper („Stomosierung der Stomiten") die schon im Organismus oder in der Originalkultur stattgefunden hätte, erscheint in Anbetracht der Versuchsbedingungen unzulässig.

III. Aus obigen Untersuchungen ergibt sich im Zusammenhange mit den vorliegenden Forschungsergebnissen folgendes: Es ist von einer Reihe von Autoren festgestellt worden, dass aus dem infizierten Organismus (Milz, Abszesse, Blut, Roseolen) gezüchtete Typhustamme öfters eine herabgesetzte Agglutinabilität zeigen, das gleiche gilt von manchen aus Wasser isolierten Stämmen. Meine Untersuchungen bestätigen dies Verhalten von Typhusstämmen und zeigen eine analoge Erscheinung bei einem aus einem infizierten Organismus gezüchteten Pyozyaneusstamme. Dasselbe berichtet in neuester Zeit Otto von manchen Stapyhlococcenstämmen. Es wird dadurch dargetan, dass die Agglutinabilität der Bakterien ebenso wie viele andere Artmerkmale eine in weiten Grenzen variierende Funktion ist. Die Untersuchungen von Tarchetti und Nicolle und Trénel zeigen, dass die Reaktion des Mediums, die Züchtungstemperatur, der Reichtum des Mediums an Nährstoffen einen grossen Einfluss auf diese Funktion aussüben können — auf diese Faktoren wird wahrscheinlich ihr Verhalten bei aus Wasser gezüchteten Typhusstämmen zurückzuführen sein.

Die geringe Agglutinabilitat der aus dem infizierten Organismus gezüchteten Stämme ist wiederum als Ausdruck einer Anpassung der Bakterien an die Agglutinine des Organismus zu betrachten, da wir dank den Arbeiten von Ransom und Kitashima, Tarchetti, Walker und P. Th. Müller wissen, dass man durch Züchtung von Bakterien in agglutininhältigen Medien ihre Agglutinabilität herabsetzen kann und Sacquépée dasselbe Resultat durch Züchtung in Collodium-

säckchen im Peritoneum immunisierter Tiere erreicht hat. Bezüglich des Mechanismus dieser Agglutinin-Immunität der Bakterien lässt sich vorläufig nicht entscheiden, ob sie auf einer Vermehrung der Agglutininreceptoren (Pfeiffer und Friedberger) oder einer Verminderung (P. Th. Müller) beruht. Die oben beschriebene Resistenz frisch aus dem infizierten Organismus gezüchteter Stämme wird wohl am besten ebenfalls als Folge einer Immunisierung der Bakterien gegen die bakteriziden Kräfte des Organismus aufgefasst. Zahlreiche Untersucher haben gezeigt, dass man durch Züchtung von Bakterien in normalem oder spezifischem bakteriziden Serum dieselben gegen die Bakterizidie des Serums immunisieren kann sowie dass dabei ihre Virulenz gegenüber der serumspendenden Tierart erhöht wird. Andererseits wissen wir, dass virulente Stämme sich von avirulenten gerade durch ihre Resistenz gegenüber bakteriziden Serumwirkungen unterscheiden, und sind geneigt darin das Wesen der Virulenz zu suchen. Endlich ist auch von Bedeutung, dass frisch aus dem infizierten Organismus gezüchtete Stämme sich gewöhnlich durch höhere Virulenz gegenüber avirulenten, längere Zeit auf künstlichen Nährböden fortgezüchteten auszeichnen. Der Grund der erhöhten Resistenz ist nach Danysz, Walker sowie Pfeiffer u. Friedberger in einer Vermehrung der Bakterienreceptoren für die bakteriziden Körper zu suchen. Diese Tatsachen sind dazu angetan, unsere Auffassung von der Infektion bedeutend zu modifizieren; wir wissen durch die Forschungen über die Immunität, dass neben den infizierenden Mikroben im Mechanismus der Infektion der lebende Organismus mit seiner generischen sowie individuellen, angeborenen und erworbenen Immunität eine höchst bedeutsame Rolle spielt. Aber nicht nur der Organismus passt sich den durch die Giftwirkungen der Mikroben gesetzten Veränderungen der Lebensbedingungen an, auch diese sind ihrerseits höchst anpassungsfähige Lebewesen, die sich den Abwehrkräften des Organismus im Verlaufe der Infektion anpassen und dadurch den Verlauf sowohl wie den Ausgang der Infektion mitbestimmen können.

Diese Anpassungsfähigkeit der Bakterien an die bakteriziden Kräfte ermöglicht den infizierenden Mikroben das Haften in einem Organismus, der ihnen gegenüber über wirksame bakterizide Kräfte verfügt. Speziell beim menschlichen Abdominaltyphus wird dadurch erst die Möglichkeit des Vorkommens von Bakterien im Blute sowie Entstehung von Metastasen in der Haut, den Nieren, dem Kno-

chenmark unserem Verständnis näher gebracht. Tatsachen, die bisher angesichts der starken bakteriziden Wirkung menschlichen Serums auf den Typhusbacillus unerklärlich waren. Auf dieselbe Weise erklärt sich das Vorkommen von lebenden Typhusbazillen in posttyphösen Abszessen u. dgl. Jahre lang nach Erlöschen des Krankheitsprozesses, trotzdem doch der Organismus in der Rekonvaleszenz über erhöhte bakterizide Kräfte verfügt. Endlich wird es angesichts dieser Tatsachen zweifelhaft, ob man der Entstehung von specifischen bakteriziden Immunkörpern eine bestimmende Rolle in der Heilung des Typhus zuerkennen darf, ob nicht vielmehr die Entstehung einer antitoxischen Immunität die Grundlage dafür abgibt; sehen wir doch, dass trotz eingetretener Heilung die Bakterien lebend im infizierten Organismus persistieren und noch geraume Zeit nachher im Stuhl oder Urin nachgewiesen werden können. Für die aetiologische Behandlung des Typhus mitels spezifischen bakteriziden Immunserums folgt aus obigen Erörterungen der Grundsatz, den Organismus auf einmal mit einer grossen Menge von Immunkörper zu überschwemmen, um den Bakterien die Möglichkeit einer Anpassung zu benehmen. Endlich schränken diese Befunde die diagnostische Bedeutung der Pfeiffer'schen Probe ein, indem ein besonders gut angepasster, hochvirulenter Stamm, den wir gerade aus dem Organismus züchten, sich gegenüber der verwendeten Serumdosis dank seiner Immunität resistent erweisen kann.

Aus dem hygienisch-bakteriologischen Institut der Jag. Univ. Krakau.
Vorstand Prof. O. Bujwid.

---

39. M. W. HEINRICH. **O funkcyi błony bębenkowej.** ***(Sur la fonction de la membrane du tympan).*** Mémoire présenté par M. A. Witkowski m. t.

I.

On n'avait pas jusqu'à présent de données positives sur la fonction de la membrane du tympan et les opinions des savants à ce sujet sont très contradictoires.

Du temps de Johannes Müller, on pensait généralement que c'est par des changements de tension que la membrane du tympan s'accommode aux vibrations provenant du dehors, de telle manière

que les vibrations élastiques propres de la membrane s'accordent en caractère avec les vibrations extérieures.

C'est Rinné[1]) qui a tenté le premier, si je ne me trompe, d'étudier les vibrations de la membrane au moyen d'un petit manomètre, placé dans la partie extérieure de l'oreille. Il croyait pouvoir observer les vibrations de la membrane d'après les changements de la pression de l'air enfermé dans l'oreille extérieure et limité partiellement par la membrane. L'expérience a échoué. Au nombre des savants qui se sont occupés postérieurement de la question, il faut nommer en premier lieu Mach. Dans son travail „Zur Theorie des Gehörorganes“ [2]), il donne un aperçu sur les fonctions des diverses parties de l'organe de l'audition et s'exprime sur la fonction des muscles tensor tympani et stapedius de la manière suivante: „Je crois que cette fonction est aussi essentielle que la fonction accommodatrice de l'oeil, que les muscles indiqués sont toujours en fonction pendant l'audition attentive et que, d'après le changement de leur tension, on peut distinguer les tons et en suivre les variations, d'une manière analogue à celle dont l'oeil distingue les points et en suit les mouvements“.

Pour étudier d'une manière expérimentale l'accommodation de la membrane du tympan, Mach inventa la disposition suivante: on recouvre avec de la poussière métallique la membrane et on observe au microscope son image, obtenue avec une lentille convenablement choisie. L'expérience a fourni des résultats négatifs.

Helmholtz[3]) ne supposait pas que la membrane du tympan possédât à chaque état de sa tension la faculté de réagir uniquement sur celles des vibrations qui correspondent à ses vibrations propres. Il n'a pas même discuté la possibilité de la fonction accommodatrice de la membrane et en parlant des conditions dans lesquelles les vibrations agissant sur la membrane sont transmises à l'appareil de Corti, il remarque seulement que l'amplitude des vibrations de la région centrale de la partie de la membrane qui est située entre l'anneau osseux et le manche du marteau est la plus grande, tandis que la force agissant sur l'osselet est plus grande que celle qui agit sur la région précédente de la membrane.

[1]) Prager Vierteljahresschrift für praktische Heilkunde, 1855.

[2]) Travaux de l'Académie des Sciences de Vienne, 1863.

[3]) Die Mechanik des Gehörknöchels und des Trommelfelles. Oeuvres. Vol. II. pag. 515 et suiv. Leipzig, 1883.

Tous les savants ont suivi l'autorité de Helmholtz, laquelle était appuyée par les résultats négatifs de l'expérience de Mach. On supposait donc que la membrane tympanique n'est pas un appareil accommodateur, c'est à dire qu'elle trasmet, quel que soit son état, toutes les vibrations du dehors.

Les expériences des physiologistes comme Hensen, Bockendahl, Pollak etc. ont démontré qu'il existe une contraction du muscle tensor tympani correspondant au ton qui agit sur l'oreille, mais on n'a pas cru que cette contraction puisse accommoder la membrane au son. Une telle accommodation pourrait être utile, pense Brücke [1]), s'il s'agissait de la perception des tons, mais elle est sans importance pour la perception des bruits. Mais ce sont justement les bruits qui jouent le rôle le plus important dans nos perceptions auditives, la fonction accommodatrice de la membrane du tympan est donc superflue.

Il y a quelques années [2]), des considérations de nature générale m'ont fait supposer que dans le mécanisme psychophysique de l'attention, il faut considérer bien des phénomènes comme dépendant des conditions dans lesquelles l'excitation passe par les organes des sens. En discutant les opinions des psychologues sur le mécanisme psychophysiologique de l'attention, j'avais supposé que l'état des appareils accommodateurs des organes des sens doit modifier essentiellement les conditions dans lesquelles l'excitation agit sur les nerfs sensoriels. Il y avait intérêt à mettre ces faits en évidence par voie expérimentale. L'étude de l'accommodation de l'oeil a permis de trouver une série de relations importantes prévues par les considérations d'ordre théorique. Les expériences ont démontré notamment l'existence d'une forme d'accommodation inconnue auparavant, d'accommodation paraxiale et ont permis d'expliquer une série de phénomènes de l'attention [3]).

La confirmation par l'expérience des vues théoriques précédentes dans le domaine de la vision m'ont affermi dans la supposition que ces mêmes considérations doivent se vérifier de même dans le domaine de l'audition, c'est à dire que l'organe de l'ouïe doit avoir

[1]) Vorlesungen über Physiologie, 1884.

[2]) W. Heinrich: Die moderne physiologische Psychologie in Deutschland, II Ausgabe, Zürich 1899.

[3]) W. Heinrich: Die Aufmerksamkeit und die Funktion der Sinnesorgane. Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Vol. IX et XI.

aussi un appareil accommodateur. La faculté de distinguer les harmoniques d'un son constituait donc un exemple classique pour l'explication de la faculté analytique de l'attention. De plus, la partie de l'acoustique qui traite de l'audition est basée sur la faculté de discerner les tons simples d'un son complex. Grâce à cette faculté, Helmholtz a pu faire son analyse des sons, laquelle lui a fourni les faits fondamentaux pour la théorie de l'acoustique.

L'étude du fonctionnement de la membrane du tympan, la recherche d'une réponse précise à la question suivante: la membrane du tympan transmet-elle toutes les vibrations du dehors indépendamment de son état de tension, ou bien transmet-elle seulement les vibrations correspondant à ses vibrations élastiques propres, était une question importante non seulement pour la psychologie générale, mais aussi pour la théorie de l'acoustique.

J'ai essayé d'abord d'obtenir des résultats en me servant de la méthode de Mach[1]), mais en y introduisant une légère modification. Dans toutes les expériences sur les oscillations des osselets faites par Pollitzer ainsi que dans les expériences de Mach, on excitait la membrane par des ébranlements très-forts. Mach par exemple unissait l'oreille de la personne sur laquelle on expérimentait avec la boîte de la sirène, où les mouvements de l'air sont extrêmement agités, même dangereux pour l'intégrité de la membrane. Il est bien clair que, dans ces conditions, les oscillations de la membrane (si l'on pouvait les observer) ne peuvent pas être normales.

Pour éviter ces inconvénients, j'ai réuni l'oreille du sujet avec un résonnateur qui produisait des vibrations fortes mais sans excès. Dans ces conditions, il était impossible d'observer ne fût-ce que des traces des vibrations de la membrane. On pouvait observer au cours de l'expérience dans la position de l'image observée des changements qui pouvaient indiquer des changements correspondants dans la tension de la membrane du tympan, mais il était impossible de vérifier cette supposition.

Les expériences exécutées par la méthode de Mach ont fourni un fait décisif. Elles ont démontré que l'amplitude des vibrations

[1]) W. Heinrich: Zur Funktion des Trommelfelles, Verhandlungen des physiologischen Club in Wien, Sitzung vom 9. Juni 1896. Centralblatt für Physiologie vom 27. Juni 1896.

de la membrane est tellement petite qu'il est impossible de la percevoir au moyen du microscope. Pour les observer il faut donc se servir d'un procédé de mesure plus délicat. Un tel procédé ne peut être fourni que par les phénomènes d'interférence de la lumière monochromatique. Les premières expériences faites par cette méthode ont démontré que la membrane du tympan réagit, dans un état déterminé de la tension, sur quelques tons seulement, qu'elle est donc un appareil accommodateur [1]). Il restait à étudier plus soigneusement la fonction de la membrane.

II.

Pour étudier les vibrations de la membrane du tympan, on se servait de l'interféromètre de Michelson [1]), dans lequel le miroir était remplacé par la membrane portant un très petit miroir sur sa surface. Dans ces conditions, les vibrations de la membrane, d'amplitude supérieure à un quart de l'onde de la lumière monochromatique employée dans l'expérience, devaient se manifester par une disparition des franges; dans le cas où l'amplitude de la translation du petit miroir dans la direction du rayon réfléchi était plus petite qu'un quart de l'onde, cette translation devait se manifester par un élargissement des franges claires. Le dispositif employé était le suivant:

Pour obtenir la lumière monochromatique, on employait dans les premières expériences les rayons rouges du spectre d'une lampe à incandescence. Plus tard, on a remplacé la disposition précédente par une lampe à mercure, dont la lumière donne les franges interférentielles; c'est à l'aide de cette lampe qu'on a fait tous les essais pour photographier les vibrations des franges.

Quand enfin on a constaté qu'il était impossible d'obtenir des photogrammes des vibrations et qu'on pouvait seulement observer les vibrations des franges directement avec une lunette, il a paru plus commode de se servir de la lumière de sodium. On plaçait un bec de Bunsen avec une mèche imprégnée d'une solution de sel commun à une distance de quelques mètres de l'interféromètre en réglant la flamme de manière à ce que le bruit de la flamme soit

[1]) W. Heinrich. Note préliminaire sur la fonction accommodatrice de la membrane du tympan. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie Mai 1902.

[1]) Philosoph. Magazine, vol. XIII 1882, pag. 236.

le plus faible possible. Dans ces conditions, on n'observait jamais aucune trace d'influence du bruit de la flamme sur la membrane. La lentille placée devant l'interféromètre (v. figure 1) condensait le faisceau des rayons de la flamme sur le miroir L. fixé à la membrane du tympan. Grâce à la largeur de la lame en verre sur laquelle le faisceau se divisait en deux parties dirigées vers les deux

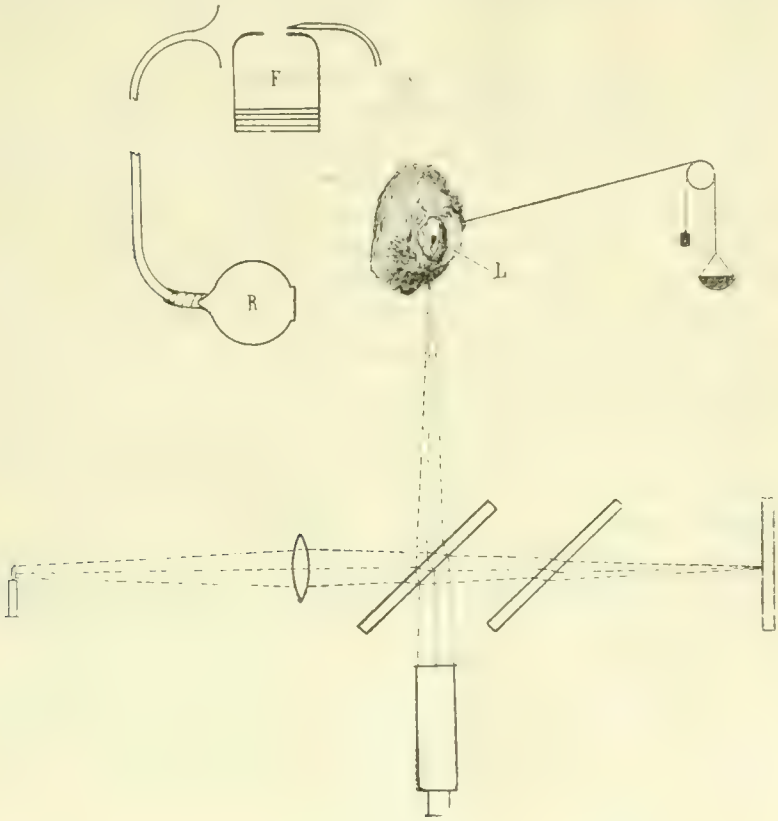


Fig. 1.

miroirs de l'interféromètre, les images de la flamme, formées par les rayons réfléchis par les deux surfaces de la lame, se séparent totalement l'un de l'autre et l'on obtient des franges interférentielles très pures. Les franges pouvaient être observées au moyen d'une lunette.

On a rencontré de grandes difficultés pour obtenir des miroirs assez légers pour qu'on puisse admettre que leur poids n'exerce

point d'influence sur les vibrations de la membrane. Il a été impossible de se procurer des miroirs aussi minces dans le commerce, et nous avons été obligés de les faire nous-mêmes. Les miroirs dont on s'est servi pour ces expériences, argentés et polis du côté extérieur, avaient une superficie de 1 — 1·5 mm^2 et leur poids ne dépassait pas 0·7 milligrammes. Déposé librement sur la membrane du tympan, le miroir adhérait assez fortement sans l'aide d'aucune colle.

La petitesse du miroir rendait très difficile le réglage de sa position dans l'interféromètre. Dans les conditions les plus favorables on parvenait à lui donner une position exactement perpendiculaire à la direction des rayons au bout d'une demi-heure de temps. Mais bien souvent on ne pouvait y parvenir même en $1^1/_2$ ou 2 heures, et on était obligé par ce fait d'abandonner l'expérience. Et ceci arrivait après quelques années de pratique dans le maniement de l'appareil. En général on peut dire que le réglage extrêmement soigné de chaque pièce de l'appareil forme une condition absolument nécessaire pour obtenir dans nos conditions les franges interférentielles. De petites irrégularités dans la position des lames ou des miroirs, qui sont sans influence sur l'apparition des franges quand on travaille avec de grands miroirs, suffisent pour les faire disparaître quand un des miroirs est très petit.

Cette circonstance troublait même souvent le cours de l'expérience. Tout changement dans la tension de la membrane pendant l'expérience influait sur sa position et sur la position du petit miroir sur sa surface par rapport aux rayons, d'où résultait la nécessité d'une nouvelle mise au point et une perte de temps, lequel était déjà bien limité par la circonstance que la membrane séchait rapidement et au bout de deux ou trois heures d'un usage continu devenait complètement impropre à servir à l'expérience.

Les conditions de l'expérience ne permettant pas l'usage d'une oreille vivante, on se servait d'organes d'animaux récemment tués. L'animal (un chien) étant asphyxié par le chloroforme, on procédait à la préparation de l'organe auditif en éloignant les parties extérieures autant que cela était indispensable pour mettre à découvert la membrane du tympan sans l'endommager. Toute l'oreille interne restait absolument intacte. La jonction de la membrane du tympan avec les osselets, et le chargement de la membrane par ces osselets étaient les mêmes que dans les conditions normales, d'où il suit

que la transmission des vibrations sonores aux parties internes de l'oreille n'était pas modifiée.

Pour changer à volonté la tension de la membrane. on ouvrait un peu l'orifice du côté intérieur afin de découvrir le tendon du muscle du tympan et d'y fixer un petit crochet auquel on attachait un plateau d'une balance équilibré par un poids (v. la figure). Le poids placé sur le plateau mesurait la tension exercée sur la membrane. On a reconnu qu'il est d'une grande importance que le muscle soit bien préparé, en particulier qu'il soit libéré de sa jonction avec le nerf, car il peut arriver qu'à cause d'une mauvaise préparation le poids placé sur le plateau ne change pas la tension de la membrane laquelle réagit alors toujours de la même façon.

D'abord on a eu soin d'employer des membranes absolument fraîches. Les essais ont démontré que pendant les 24 heures qui suivent la mort de l'animal. le mode de réaction de la membrane peut être conservé sans changement en maintenant celle-ci à un degré suffisant d'humidité. On s'est servi de cette circonstance de la manière suivante: on gardait les membranes dans du papier buvard imprégné de la solution physiologique de sel commun. La première expérience était faite tout de suite après la préparation de la membrane et durait environ deux heures. Pendant ce temps la seconde membrane était gardée dans du papier buvard. Puis on échangeait les membranes, on travaillait encore deux heures, puis on interrompait l'expérience. Le jour suivant, on répétait la même expérience, pour vérifier les résultats.

Pour produire des vibrations des membranes correspondant aux tons purs, on se servait des vibrations des résonnateurs répondant aux tons de bouteilles accordées à l'unisson. On disposait la série suivante de résonnateurs de Helmholtz:

Résonnateur	N° 1.	hauteur	du	ton	256	v. s.
„	N° 2.	„	„	„	512	v. s.
„	N° 3.	„	„	„	768	v. s.
„	N° 4.	„	„	„	1024	v. s.
„	N° 5.	„	„	„	1280	v. s.
„	N° 6.	„	„	„	1536	v. s.
„	N° 7.	„	„	„	1792	v. s.
„	N° 8.	„	„	„	2048	v. s.

Dans cette disposition, la source primaire des tons était formée par les bouteilles dans lesquelles on soufflait. On accordait les

bouteilles avec les résonnateurs correspondants d'abord approximativement en y mettant de l'eau. (Pour éliminer la vaporisation, on mettait de l'huile sur l'eau). On obtenait l'unisson précis par le réglage de l'intensité du courant d'air et de la position du tube aplati par lequel s'écoulait l'air par rapport à l'ouverture de la bouteille. La bouteille dans laquelle on soufflait et le résonnateur correspondant se trouvaient dans deux chambres différentes séparées par une porte double. On les unissait par un tube large de telle manière que le résonnateur fermait l'ouverture du tube lequel avait 12 mètres de longueur (v. la figure 1). Grâce à cette disposition, les vibrations transmises par le résonnateur placé près de la membrane étaient des vibrations simples d'un ton pur sans harmoniques.

Dans une autre série d'expériences la source des vibrations était formée par les sons d'un harmonium placé près de l'interféromètre.

Dans la communication préliminaire sur la fonction accommodatrice de la membrane, on exprimait l'espoir qu'on pourrait obtenir les photogrammes des vibrations de la membrane. Mais il a été impossible d'y parvenir. La lumière refléchie par le petit miroir placé sur la membrane était tellement faible, même dans le cas où l'on employait la lampe de mercure, qu'on ne pouvait obtenir aucune trace des franges sur la plaque photographique, même lorsque celle-ci était animée d'un mouvement lent. Il ne restait donc qu'à revenir à la méthode de l'observation directe au moyen de la lunette. Cette méthode permet seulement de constater l'existence des vibrations de la membrane. Pour être sur des résultats, il est nécessaire que la stabilité de l'appareil soit parfaite. On commençait donc les expériences après 11 heures du soir pour éviter tout tremblement provenant du mouvement des voitures dans la rue.

III.

Si pendant l'observation des franges d'interférence la membrane commence à vibrer, les franges doivent disparaître totalement, si l'amplitude des vibrations n'est pas inférieure à un quart de la longueur d'onde de la lumière employée. Dans ces conditions, le changement de la différence de marche des deux rayons est égal à une demi-longueur d'onde et pendant une vibration complète les franges claires prennent la place des franges noires et inversement. La durée d'une vibration étant très courte, les déplacements des

franges s'effectuent très rapidement; on ne voit donc dans la lunette qu'un champ uniformément éclairé. Si l'amplitude des vibrations de la membrane est plus petite qu'un quart de la longueur d'onde, les franges ne cessent pas d'être visibles, mais les franges noires deviennent grises et les franges claires s'élargissent. Si l'amplitude est encore plus petite, la vibration se manifeste comme un petit élargissement des franges claires. Dans ce cas, l'existence des vibrations est particulièrement aisée à constater dans les moments où le ton excitant commence ou cesse d'agir. A ces moments, les franges subissent un changement spécifique qui ne peut échapper à l'attention.

On observait des amplitudes égales ou peut-être plus grandes qu'un quart d'onde dans les octaves basses jusqu'à *c*. Dans les octaves plus hautes, l'amplitude de la vibration des parties situées entre le manche du marteau et l'anneau dans lequel la membrane est fixée (voir la position du miroir dans la figure 1) était généralement plus petite qu'un quart de la longueur d'onde du sodium. On sait que l'amplitude des vibrations de cette partie de la membrane est la plus grande. Il faut cependant ajouter qu'il y avait aussi des membranes dont l'amplitude des vibrations pour les tons des octaves au dessus de *c* était plus grande qu'un quart de la longueur d'onde. Mais cela arrivait dans des cas exceptionnels. Parmi quelques dizaines de membranes il n'y en avait que quelques-unes qui possédaient cette propriété. On ne percevait pas de vibrations dans le cas où le miroir était placé sur le manche du marteau. Cette petitesse de l'amplitude de la vibration de la membrane formait une grande difficulté de l'expérience surtout dans le cas des expériences avec les résonateurs. Ici la disposition de l'expérience ne permet pas d'interrompre le ton subitement parce qu'on devait chaque fois régler l'intensité du courant aérien de façon que la réaction du résonnateur soit la plus forte posible. Il est clair qu'en raison de ces circonstances la constatation de l'existence de vibrations qui se manifestaient par un faible élargissement des franges demandait beaucoup d'essais. La chose était d'autant plus difficile que chaque membrane demandait des charges différentes pour réagir sur les mêmes tons. A cause de cela, pour chaque membrane fraîche il fallait chercher à nouveau les tensions auxquelles correspondaient les réactions de la membrane sur les tons demandés. De cette manière on comprend pourquoi chaque

expérience permettait seulement de constater les réactions sur un petit nombre de tons.

L'usage de l'harmonium facilitait l'excitation de la membrane et permettait d'obtenir de plus grandes séries de réactions. On a donc remplacé les résonnateurs par l'harmonium à partir du moment où les expériences avec les résonnateurs permettaient d'interpréter les résultats des expériences avec l'harmonium.

Les expériences avec les résonnateurs étaient les suivantes:

Si l'on place un resonnateur Nr. *2* près de la membrane et si l'on augmente la tension de la membrane jusqu'au moment où elle réagit sur le ton du résonnateur, alors dans cet état de tension la membrane réagit aussi sur les tons: a) du résonnateur *Nr. 3*; b) du résonnateur *Nr. 4*; c) du résonnateur *Nr. 6*. Elle ne réagit pas sur le ton du résonnateur *Nr. 5*. Puisque les vibrations des résonnateurs sont les sinusoïdes simples des tons purs, il résulte donc de l'expérience que dans un état déterminé de la tension la membrane réagit non seulement sur la vibration correspondant au ton fondamental de la membrane et aux harmoniques mais aussi sur la quinte du ton fondamental.

Quand on accorde la membrane avec le résonnateur Nr. *3* comme ton fondamental, elle réagit alors sur les résonnateurs Nr. *4*., *5*.. *6*. et Nr. *2* c'est à dire sur les tons dont les intervalles sont ceux de la quarte et sexte au dessus et la quinte au dessous du ton fondamental. Les résultats précédents ont été vérifiés par de nombreuses expériences. Dans toutes les expériences on a pu constater très sûrement les réactions sur la quarte et quinte du ton fondamental. La réaction sur le ton $^5/_3$ (sixte majeur) du ton fondamental n'était pas toujours perceptible.

En résumé, les expériences avec les résonnateurs ont donné les résultats suivants: Dans chaque état de la tension la membrane réagit: 1) sur le ton fondamental, 2) sur les harmoniques (tons supérieurs), c'est à dire, sur les tons dont le nombre des vibrations est 2, 3, 4, etc. fois plus grand que le nombre des vibrations du ton fondamental; sur les tons dont le nombre de vibrations est ($^3/_2$) la quinte; ($^4/_3$) la quarte; ($^5/_3$) la sixte majeure et ($^2/_3$) la quinte au dessus du nombre de vibrations du ton fondamental.

Il suit des résultats précédents que la membrane doit reagir

sur un même ton dans de différents états de tension. Ce ton correspond une fois au ton fondamental de la membrane, les autres fois il est dans l'un des intervalles consonnants ou un des harmoniques du ton fondamental de la membrane. On peut vérifier cette conséquence. On a observé par exemple les réactions sur le ton du résonnateur Nr. *3* quand la membrane était chargée par un poids de 5 gr., puis par des poids de 7·5 gr., 9·75 gr., 14—14·5 gr.

Dans une autre expérience la membrane réagissait sur le ton du résonnateur Nr. *5* étant chargée avec des poids: 4—4·75 gr., 5·5—6 gr., 6·75—7 gr., 9·25—9·75 gr., 11·75—12 gr., et 14·50 gr. La plus forte réaction était constatée quand le poids fut 11·75—12 gr. On observait la réaction pour la dernière fois quand la charge était de 14·50 gr.; la constatation de la vibration dans ce cas n'était pas absolument sûre.

Il est clair qu'on ne peut pas indiquer l'intervalle entre le ton fondamental de la membrane en chaque état de la tension observée et le ton du résonnateur. En se basant sur les expériences précédentes on peut affirmer seulement qu'il ne peut s'agir ici que d'intervalles consonnants.

Les expériences avec les résonnateurs présentaient des difficultés tellement considérables et pour avoir des résultats précis il fallait les répéter tant de fois que la continuation du travail dans les mêmes conditions était impossible.

On a remplacé les résonnateurs par l'harmonium. Les sons de l'harmonium sont riches en tons harmoniques et cela constitue certainement un défaut. D'un autre côté l'harmonium permet de disposer d'une grande échelle de sons de la hauteur de C_1—c''', et chaque son pouvait être produit ou interrompu subitement ou enfin on pouvait le conserver longtemps. En même temps on pouvait observer d'une façon continue les franges d'interférence.

Les expériences avec l'harmonium ont confirmé que la membrane réagit non seulement sur le ton fondamental et ses harmoniques, mais aussi sur les intervalles consonnants de la manière suivante: On observe que la membrane réagit plus fortement sur le son dont le ton fondamental est consonnant avec le ton fondamental de la membrane que sur les sons dont les tons fondamentaux sont harmoniques du ton fondamental de la membrane. Par exemple, quand la membrane était accordée sur le ton *2*, elle réagissait le plus fortement sur le son de l'harmonium dont les tons

peuvent être exprimés par les nombres *2. 4. 6. 8.* etc. Si l'on produisait les sons dont les tons composants seraient respectivement *3. 6. 9.* etc. et *6. 12. 18.* etc., alors il serait incertain si la réaction de la membrane sur le son *3. 6. 9.* est due à sa réaction sur le ton *3* ou sur le ton *6*. Mais quand on constate que la réaction sur le son *3. 6. 9.* etc. est plus forte que la réaction sur le son *6. 12. 18.* etc. quoique le ton excitant *6* est, comme étant fondamental, plus fort dans le second ton, alors il est permis de conclure que la réaction forte de la membrane provenait de la présence du ton *3*. Cette supposition devient une certitude puisqu'elle est confirmée par les expériences, faites précédemment, avec les tons purs des résonnateurs.

Les nombreuses expériences avec l'harmonium fournissaient pour la plupart des résultats fragmentaires. Mais on est parvenu à obtenir une série plus grande, dans des conditions spécialement favorables, exprimée par les résultats de la Table I.

TABLE I.

Réactions de la membrane dans divers états de tension.

La tension de la membrane en grammes.	Ton fondamental de la membrane.	Sons dont les tons fondamentaux forment des intervalles consonnants.	Sons dont les tons fondamentaux sont harmoniques du ton fondamental de la membrane.
1·6	E.	A H	e h e′ g′
1·9	F.	H c	f c′ f′ a′ c″
2·5	G.	c d	g d′ g′ h′ d″
3·1	A.	d e	a e′ a′ c″ e″
3·7	H.	e f	h f′ h′ d″

Dans les réactions exprimées dans la Table I on n'avait observé que les réactions sur la quarte, la quinte et les tons harmoniques. Dans les autres expériences on a observé des réactions sur la tierce et la sixte. Par exemple, dans une expérience vérifiée deux fois sur deux membranes du même animal, on a constaté, la tension étant de *2 gr.*, le ton c′ comme fondamental et les réactions sur les sons e′ f′ g′ a′ et des réactions sur les tons harmoniques c″ g″ c‴. La réaction sur c′ était visiblement plus faible que celles sur f′ et g′.

Les expériences avec l'harmonium ont vérifié et completé les résultats obtenus avec les résonnateurs. Ils ont montré que dans

chaque état de tension la membrane réagit non seulement sur un ton fondamental et ses harmoniques, mais aussi sur la tierce, quarte, quinte et sixte du ton fondamental. Les réactions sur la quarte et la quinte sont plus fortes que les réactions sur la tierce et la sixte.

Dans les expériences avec les résonnateurs on a constaté l'existence d'une réaction sur le ton, exprimé par le nombre *2* quand le ton fondamental de la membrane était exprimé par le nombre *3*. Dans cet état de tension, la membrane réagissait sur les tons *4* et *5*, tandis que la membrane dont le ton fondamental s'exprimait par le nombre *2* réagissait aussi sur les tons *3*, *4*, mais ne manifestait aucune réaction sur le ton *5*.

Ce fait ne pouvait être vérifié avec l'harmonium parce que dans le cas où la membrane réagit sur un ton fondamental d'un son de l'harmonium, elle réagit aussi sur les sons des octaves plus basses, lesquelles contiennent le même ton comme harmonique. Par exemple, la membrane qui réagit sur les sons c′ e′ f′ g′ a′ réagit aussi sur les sons c e f g a.

Une confirmation indirecte de cette observation est fournie par le fait suivant bien connu: On sait que le caractère auditif d'un son est influencé par l'existence de tons plus bas que le ton fondamental du son. Ce caractère auditif doit dépendre du caractère des vibrations transmises par la membrane. Il faut donc conclure de là que la membrane peut, dans un état déterminé de tension, transmettre aussi les vibrations de tons plus bas que son ton fondamental. Cette question sera encore soumise aux expériences.

Les expériences avec l'harmonium ont permis aussi d'analyser exactement la relation entre les tensions de la membrane et les hauteurs des tons fondamentaux correspondants. Les membranes non chargées par aucun poids réagissaient sur des tons de la contre-octave et de la grande octave. Par exemple: une membrane montrait les réactions sur le ton *H*, une autre a manifesté des réactions fortes sur le ton Cis_I, encore une autre des réactions sur C_I etc., comme tons fondamentaux. Il ne faut pas oublier cependant qu'une telle membrane se trouve sous l'action du muscle „stapedius“ qui, à cause de la mort de l'animal, se trouvait dans un état de contraction. Il

me semble qu'une membrane non tendue ne réagirait sur aucun ton, parce qu'elle serait très flasque.

Les charges jusqu'à un gramme n'exerçaient aucun effet sur la tension de la membrane. parce qu'elles étaient équilibrées par le frottement de la poulie supportant la plateau. Dans l'expérience dont les résultats sont consignés dans la Table I, la membrane chargée avec un poids de 1 gr. réagissait sur le ton D. La charge de 1·6 gr. a donné la réaction sur E.

La Table II donne une série plus étendue de valeurs correspondantes des tons fondamentaux et de tensions de la membrane.

TABLE II.

Relation entre la tension et le ton fondamental de la membrane.

Tension en grammes.	Tons fondamentaux de la membrane.
2 gr.	c′
2·3 — *2·5* — 2·7	cis′
2·8 — *3* — 3·3	d′
3·3 — *3·5* — 3·7	dis′
4	e′
4·5	f′
5	fis′
5·5	g′
6	gis′
6·5	a′
7	ais′
7·5	h′
8	c″

On voit que les hauteurs des tons forment une progression géométrique (dans l'échelle temperée de l'harmonium tous les intervalles d'un demi-ton sont égaux) et les poids correspondants forment une progression arithmétique. La même loi se retrouve dans la Table I, dans laquelle la charge pour chaque demi-ton augmente de 0·3 gr. Dans la Table II cette augmentation est de 0·5 gr.

Les limites dans lesquelles on peut changer la tension en obtenant toujours une réaction au même ton sont très grandes. Dans chaque état de la tension, la membrane réagit sur les tons limités par une intervalle presque d'un demi-ton (voir les trois premières lignes de la Table II). Par exemple: à la tension 3·3 gr.

répondait une faible réaction sur les tons *d'* et *dis'*; aux tensions 3 gr. et 3·5 gr. répondaient des réactions fortes sur les mêmes tons. En augmentant les tensions depuis 3·5 gr. de 0·5 gr. on obtenait des réactions fortes sur tous les demi-tons successifs.

En entreprenant les expériences précédentes on pensait pouvoir s'assurer si les réactions de la membrane sur les vibrations provenant du dehors se compliquent d'une telle manière qu'on y puisse trouver comme composantes les vibrations simples correspondant aux tons résultants. Malheureusement, l'impossibilité de photographier les vibrations de la membrane a empêché de répondre à cette question.

Pour se rendre compte de la forme des vibrations de la membrane on a essayé de mettre en évidence les lignes nodales. A cet effet on a répandu sur la membrane une poussière très fine. Cette expérience ne donna pas de résultats. Quelquefois on a observé que les diverses parties de la superficie du petit miroir fixé sur la membrane dont la tension restait invariable, réagissaient différemment à des différents tons. Mais il était difficile d'en conclure la position des lignes nodales.

Il faut faire une remarque générale sur la nature des vibrations de la membrane. On assimile toujours les vibrations de la membrane du tympan à celles des membranes homogènes rondes élastiques. Cette façon de voir est insoutenable. Un coup d'oeil sur la membrane du tympan suffit pour reconnaître qu'elle est décidément oblongue et d'une structure tout à fait spéciale. On peut constater aisément que les fibres principales de la membrane relient le manche du marteau à l'anneau osseux comme l'indique l'esquisse (fig. 2) A cause de cette structure, la membrane peut être regardée comme se composant de deux bandes disposées des deux côtés du manche du marteau et, chose remarquable, la longueur des fibres de la bande plus large est deux fois plus grande que celle de la bande plus étroite. Nous avons fait cette observation en fendant la membrane le long des fibres et en mesurant avec un compas la longueur des fentes. Faisons observer que le miroir était toujours placé sur la bande plus large. Il est impossible d'étudier les bandes plus étroites à cause de leur petitesse et de leur position.

Fig. 2.

Il n'y a pas grand chose à dire sur les réactions de la mem-

brane aux bruits. La faculté de la membrane de réagir dans un état de tension sur une très grande quantité de tons permet de comprendre comment la membrane peut réagir sur les bruits. Dans un état déterminé de la tension, la membrane peut réagir sur un ton fondamental, sur les intervalles consonnantes, sur les tons harmoniques et sur tous les tons qui peuvent différer jusqu'à un demi-ton.

On sait que les bruits ne sont rien d'autre que le mélange des vibrations très courtes et très différentes. A ces vibrations la membrane peut réagir dans le cas où elles correspondent à la tension.

Et justement on constate que la membrane, au voisinage de laquelle on produit des bruits différents, reste généralement en repos. Elle réagit quand le caractère du bruit correspond à l'état de la tension de la membrane. On a observé, par exemple, dans un état de tension faible de la membrane, des réactions à des bruits produits en frappant l'un contre l'autre deux morceaux de bois d'une longneur de 30 cm. environ. Dans un état de tension moyenne (quelques grammes) on a observé des réactions sur le sifflement de l'air, sortant d'une bouteille où il était comprimé etc. En même temps la membrane ne réagissait pas sur les bruits d'un autre caractère. L'impossibilité d'analyser les vibrations des bruits n'a pas permis d'étudier plus systématiquement les réactions de la membrane aux bruits.

IV.

Les conséquences relatives à l'audition qu'on peut tirer des expériences sur la fonction de la membrane seront encore l'objet d'une étude spéciale. Nous nous bornons à faire seulement quelques remarques générales.

Il résulte des expériences relatées que dans un état de tension déterminé la membrane peut transmettre seulement les vibrations qui correspondent à cet état. La vibration totale de la membrane caractérise physiquement le ton écouté. La vibration simple la plus forte correspond au ton fondamental du son, les autres vibrations simples caractérisent les tons composant le son. Si les tons composants forment des intervalles consonnants, alors le son résultant sera aussi consonnant. Mais il arrive que les vibrations composantes forment des battements, alors la vibration de la membrane cesse d'être uniforme. Il y a des instants où elle est au repos; il y en

a d'autres où l'amplitude de la vibration de la membrane est la plus grande. On peut mettre cette circonstance en évidence en employant un son composé de deux tons bas qui diffèrent d'un demi-ton. On voit alors la membrane cesser de vibrer dans les instants où la vibration excitante s'éteint à cause de l'interférence.

Supposons maintenant que la tension de la membrane change, mais que la vibration excitante reste inaltérée, la membrane réagit le plus fort à une autre vibration simple, composant la vibration excitante. Le caractère du son écouté change: on discerne un ton composant du son. Les choses se passent de la même manière dans le cas des bruits. Un bruit d'un caractère determiné, disons un bruit d'une hauteur déterminée peut être écouté quand la membrane se trouve dans un état correspondant de tension, et chaque bruit d'une hauteur différente demande une autre tension etc.

On explique l'accomodation de la lentille en admettant qu'une impression faible sur la rétine, pendant que la lentille est dans un état quelconque, provoque le réflexe accomodateur. Il faut supposer que les choses se passent d'une façon analogue dans la production du réflexe réglant la tension accomodatrice de la membrane. Une vibration faible agissant sur la membrane non accomodée ne provoque aucun effet. Il suffit de rappeler tous les cas où nous n'entendons rien de ce qui se produit autour de nous quand nous sommes très occupés à un travail. Les vibrations fortes qui agissent violemment sur la membrane peuvent la forcer à vibrer dans chaque état de la tension: il est impossible de ne pas entendre les sons ou bruits très forts. Au contraire, pendant l'audition la membrane est dans un état tel que même les vibrations faibles peuvent la faire vibrer, peut être faiblement, dans le premier moment, mais cette vibration devient plus forte quand l'accomodation s'est effectuée [1]). Prenons comme exemple l'audition d'une pièce de musique. Ici chaque accord successif est toujours dans un intervalle consonnant avec l'accord précédent, les tons peuvent donc agir sur la membrane accommodée aux accords précédents. Cette action faible fait changer l'état de l'accommodation de la membrane, elle provoque le réflexe adaptant la membrane à l'accord nouveau. Par exemple, deux vibrations dont la seconde est dans l'intervalle de la quinte agissent successivement. La mem-

[1]) Il est bien probable que la transmission osseuse de vibrations aide à l'accommodation de la membrane.

brane accommodée au premier ton peut réagir aussi, bien que plus faiblement, sur la quinte. Celle-ci peut donc mettre la membrane en vibration d'abord faiblement, mais cela suffit pour provoquer le changement réflexe de la tension. Ordinairement la membrane s'accommode à la vibration simple la plus forte de la vibration excitante composée. Et c'est elle qui correspond au ton le plus fort du son et détermine sa hauteur. Dans le jeu de l'accommodation pendant l'audition d'une pièce, l'habitude joue un grand rôle. Les pièces musicales d'un caractère connu sont plus faciles à suivre que les pièces tout à fait originales, qui semblent être „étranges" à l'audition.

Les choses se passent semblablement dans le cas des bruits. En écoutant la parole nous devinons presque ce qui va suivre et cela aide au changement de l'état accommodatif de la membrane. La conversation dans une langue mal connue ou le seul fait de suivre les paroles d'une langue inconnue demande toujours des efforts et il est légitime de croire que le changement de l'accommodation de la membrane se produit dans ces cas avec moins de précision.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

23 Września 1903.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE

1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise

(Spółka wydawnicza polska)

à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski 10 k. Vol. V, VII Cod diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński 20 k. — Vol. VI, Cod diplom. Vitoldi ed Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect ed. Lewicki. 10 k. Vol. XIII, Acta capitulorum 1408—1530 ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV. Rationes curiae Vladislai Jagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI, XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 6 k. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol. VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587, ed. A. Sokołowski 4 k. Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674—1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo, 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol. I. II. IV. V épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo. 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

N° 8. OCTOBRE 1903.

12.229

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER
DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITE
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR: S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de M. Léon Marchlewski,
Mebre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ET NATURELLES.

N° 8. **Octobre** **1903.**

Sommaire: 40. MM. L. BRUNER et ST. TOŁŁOCZKO. Sur la vitesse de dissolution des corps solides
41. M. S. ZAREMBA. Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation.
42. M. S. ZAREMBA. Le principe des mouvements relatifs et les équations de la mécanique physique. (Réponse à M. Natanson).
43. M. N. CYBULSKI. Sur la théorie de l'origine des courants électriques dans les tissus des animaux et des plantes.
44. M. LAD. SATKĘ. De l'état hygrométrique à Tarnopol.
45. M. K. DZIEWOŃSKI. Sur un nouvel hydrocarbure aromatique: le décacyclène et sur un dérivé du thiophène de couleur rouge: le dinaphtylène-thiophène.
46. M. L. MARCHLEWSKI. Sur la phylloérythrine.

Séance du lundi 12 Octobre 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

40. MM. L. BRUNER et ST. TOŁŁOCZKO. **O szybkości rozpuszczania się ciał stałych.** ***(Über die Auflösungsgeschwindigkeit fester Körper).*** (*Sur la vitesse de dissolution des corps solides*). Mémoire présenté par M. A. Witkowski m. t.

I. Einleitung. Historische Übersicht.

II. Theorie des Auflösungsvorganges.

III. Versuchsergebnisse: 1. Auswahl und Bereitung des Versuchsmaterials. 2. Versuchsmethoden. 3. Einfluss der Rührgeschwindigkeit auf die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante. 4. Einfluss der Gipsart. 5. Einfluss des Volums der Lösung. 6. Giltigkeitsgrenze des logarithmischen Gesetzes. 7. Bestimmung von Diffusionskonstanten durch Auflösungsgeschwindigkeitsmessungen.

IV. Anhang: Über die Auflösungsgeschwindigkeit des Arseniks.

V. Zusammenfassung der Ergebnisse.

I. Einleitung.

Als der erste, der sich mit der Geschwindigkeit des Auflösungsvorganges befasst hat, ist wohl J. Stefan[1]) zu nennen, der bereits

[1]) Sitzungsberichte der k. k. Akademie in Wien. Band 98. Sektion 2a. S. 1418 (1889).

im J. 1889 Versuche und Berechnungen über diesen Gegenstand angestellt hatte.

Die Untersuchungen Stefans hatten jedoch auf die weitere Durchforschung dieses Gebietes keinen entscheidenden Einfluss gehabt, da dieser Forscher den Lösungsvorgang unter ausdrücklichem Ausschluss der Konvektion studiert und tatsächlich bloss einen besonders gestalteten einfachen Diffusionsversuch ins Auge gefasst hatte. Der eigentliche Auflösungsvorgang, wo die Verteilung des Gelösten durch mannigfaltig hervorgerufene Konvektion stattfinden kann, wurde von ihm unberücksichtigt gelassen.

So geschah es auch, dass die Einführung des fundamentalen hier obwaltenden Gesetzes späteren Untersuchungen von de Heen[1]) und von Noyes und Whitney[2]) zufiel.

de Heen hat sich bereits mit ganzer Klarheit dahin ausgesprochen, dass die Auflösungsgeschwindigkeit, d. h. die in der Zeiteinheit aufgelöste Stoffmenge dem Unterschiede zwischen der Sättigungskonzentration und der jeweiligen Konzentration der Lösung proportional ist. Es sei v die Auflösungsgeschwindigkeit, B — der Zähigkeits koeffizient der Lösung, C_o — die Sättigungskonzentration, c — die Konzentration der Lösung, so wird von de Heen gesetzt:

$$v = B(C_o - c)A',$$

wo A' eine Konstante ist. Ein geringfügiges Versuchsmaterial ergab eine leidliche Übereinstimmung der Formel mit der Erfahrung.

Obgleich v. $(C_o - c)$ und folglich auch B Funktionen der Zeit sind, versäumte jedoch de Heen, seinen Satz in der Form einer integrierbaren Differentialgleichung darzustellen. Dies wurde von Noyes und Whitney[2]) getan, die zugleich auf gleichmässige, wenn auch nicht genau kontrollierbare Konvektion, Rücksicht genommen haben. In ihrer Versuchsanordnung wurden zylindrische Stäbe aus dem Versuchsmaterial (Bleichlorid, Benzoësäure) gegossen, und in Flaschen mit 100 cm³ Wasser gefüllt eingesetzt. Die Flaschen wurden in Thermostaten eingesenkt und in langsame Drehung versetzt. In passenden Zeitintervallen wurden die Flaschen entleert und der Inhalt der Lösung titrimetrisch bestimmt. Als

[1]) Bulletin de l'Acad. Roy. de Belgique 3-me Ser. An. 1892 Vol 23, p. 136.
[2]) Zeit. phys. Ch. 23, 639 (1897).

Auflösungsgeschwindigkeit wurde von Noyes und Whitney die Konzentrationszunahme in der Zeitheinheit $\frac{dc}{dt}$ definiert. Noyes und Whitney haben nun vorausgesetzt und durch den Versuch bestätigt gefunden, dass

$$\frac{dc}{dt} = a\,(C_o - c)\,, \tag{1}$$

woraus nach der Integration (für $t = o$ ist $c = o$) sich ergibt

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{t}\; ln\; \frac{C_o - c}{C_o} \\ 0{,}43\, a = a' &= \frac{1}{t}\; lg\, \frac{C_o}{C_o - c}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Der de Heen'sche Zähigkeitsfaktor B wurde von Noyes und Whitney vorläufig nicht berücksichtigt. Noyes und Whitney wie auch alle späteren Forscher auf diesem Gebiete, haben aus praktischen Gründen nur schwer lösliche Stoffe, deren gesättigten Lösungen eine von der des Wassers nicht sehr verschiedene Zähigkeit zukommt, experimentell untersucht, so dass in allen Fällen B als konstant angesehen werden müsste und in der Konstante a ev. a' inbegriffen wäre. Ob überhaupt etwaigen Änderungen von B in der Grundformel Rechnung getragen werden muss, hängt, wie aus dem Weiteren ersichtlich, mit der Frage der Veränderlichkeit vom Diffusionskoeffizienten mit der Konzentration zusammen. So lange man mit kleinen Konzentrationen d. h. mit schwerlöslichen Stoffen zu tun hat, ist diese Veränderlichkeit sicher verschwidend klein.

Das logarithmische Gesetz des Auflösungsvorganges ist von Noyes und Whitney unter der Annahme aufgestellt worden, dass der Lösungsvorgang im Grunde ein Diffusionsvorgang sei, indem der feste Stoff „stets mit einer unendlich dünnen Schicht von ihrer gesättigten Lösung umgeben ist". Der Auflösungsvorgang besteht ja nur in einer Diffusion aus der gesättigten Schicht in das übrige Lösungsvolum; die Diffusiongeschwindigkeit aber ist nach der Fick'schen Grundgleichung dem Konzentrationsgefälle proportional, weshalb auch das logarithmische Gesetz für den Auflösungsvorgang eine einfache Folge des allgemeinen Fick'schen Gesetzes ist[1]).

[1]) Ebenso führt ja zur Bestätigung des logarithmischen Gesetzes eine von F. Beilstein [Lieb. Ann. 99, 165 (1856)] angewandte Diffusionsanordnung, wo sich

Wir haben unsere Untersuchungen nach den Noyes-Whitney'schen im Jahre 1900 begonnen, erstens um der Ansicht Noyes und Whitney näher zu treten und zu entscheiden, ob eine unmittelbare Wechselwirkung zwischen dem festen Stoffe und seinem Lösungsmittel (ev. seiner ungesättigten Lösung) wirklich unrealisierbar sei und die Auflösung immer durch die adhärierende gesättigte Schicht vermittelt würde; zweitens um die Noyes-Whitney'schen Konstanten des Auflösungsvorganges a mit den Diffusionskoeffizienten zu vergleichen.

Dementsprechend haben wir die Versuchsmethoden so abgeändert und gestaltet, dass wir als Versuchsobjekte Körper von messbaren quadratischen Dimensionen anzuwenden angefangen haben, was uns in den Stand gesetzt hat, die Konstante a auf die Einheit der Oberfläche (1 cm^2) zu beziehen und sie mit den auf dieselbe Flächeneinheit bezogenen Diffusionskoeffizienten zu vergleichen. Wir haben dann die Art und Weise der Konvektion des Lösungsmittels näher zu präzisieren gesucht und ihre Bedeutung für die Auflösungsgeschwindigkeit in mannigfaltiger Weise experimentell nachgewiesen. Die Auswahl der Versuchstoffe wurde auch reichlicher getroffen.

Gleich nach unseren ersten Publikationen sind die Arbeiten von K. Drucker[1]) und neuerdings die Publikation Erich Brunner[2]) erschienen. Die Untersuchung von E. Brunner wurde unter der Leitung des Herrn Prof. Nernst ausgeführt und in der Abhandlung des genannten Verfassers wird eine sinnreiche Theorie des Auflösungsvorganges von Prof. Nernst erweitert und auf verschiedene Fälle der Kinetik inhomogener Systeme erfolgreich angewendet. Die Untersuchungen Druckers und Brunners sind mit den unserigen innig verknüpft; sie werden im folgenden Kapitel wie auch bei Gelegenheit der Besprechung unserer Versuchsresultate ausführlicher besprochen. An dieser Stelle sei nur noch eine Arbeit von G. Wulff[3]) erwähnt. Da in der Wachstumsgeschwindigkeit verschiedener Kristallflächen Unterschiede von 300% vorkommen, versuchte G. Wulff, ob diese Erscheinung umkehr-

die Diffusion zwischen einer Lösung von veränderlicher und einer solchen von konstant gehaltener Konzentration = 0 vollzog.

[1]) Zeit. phys. Ch. 36, 693; Zeit. anorg. Ch. 29, 459.

[2]) Inaugural Dissertation. Göttingen 1903.

[3]) Zeit. für Krystallographie 34, 449 (1901).

bar sei, d. h. ob kristallographisch verschiedene Flächen auch verschiedene Auflösungsgeschwindigkeiten zeigen. Versuche mit Mohrschem Salz angestellt, haben ein negatives Ergebnis geliefert: in der Auflösungsgeschwindigkeit verschiedener Flächen sind Unterschiede nicht konstatiert worden. Dies wird von Wulff dahin gedeutet, dass bei der Auflösung Erosionen nicht zu vermeiden sind und durch das Auftreten derselben die bestimmte und feste krystallographische Flächencharakteristik verloren gehen muss. Das von Wulff gefundene Resultat muss jedoch ebenso aus der Existenz einer adhärierenden Diffusionsschicht sicher gefolgert werden, so dass es auch als eine Stütze dieser Ansicht gelten kann.

II. Theorie des Auflösungsvorganges.

Es sei H eine der Auflösung ausgesetzte Platte eines beliebigen festen Stoffes. Diese Platte sei in das Konvektionsgebiet H_2 eingesenkt, mit dem sie durch Vermittelung einer dünnen adhärierenden Schicht H_1 in Verbindung stehe. Es ist anzunehmen, dass die Schicht H_1 nur in unmittelbarer Nähe des festen Körpers die Sättigungs-

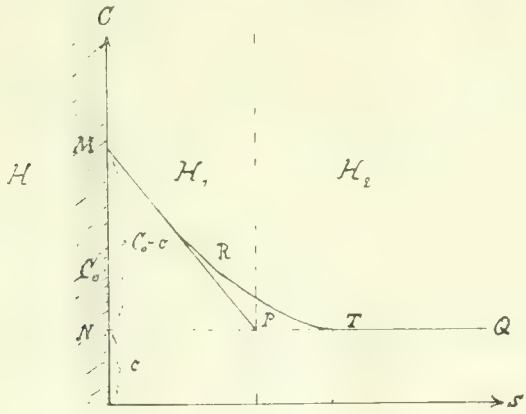


Fig. 1

konzentration besitzt, während an der Grenze von H_2 die jeweilige Lösungskonzentration herrscht. Noyes und Whitney setzten in ihrer Mitteilung voraus, dass die ganze Schicht H_1 aus gesättigter Lösung bestehe und dass folglich der Konzentrationsabfall zur jeweiligen Lösungskonzentration schon im Konvektionsgebiete stattfinde. Diese Meinung, der auch wir in unseren zwei ersten Mitteilun-

gen[1]) beigepflichtet haben, hat sich jedoch als unhaltbar erwiesen, denn wird eine genügende Bildungsgeschwindigkeit der gesättigten Schicht angenommen, so müsste man folgern, dass die Sättigungsgeschwindigkeit (als $\frac{dc}{dt}$ definiert) und auch die Konstante a (Gleichung 2) sich in weiten Konvektionsgrenzen vom Volumen des Lösungsmittels unabhängig erweisen müsste. Die Versuche Druckers wie auch die später von uns in mannigfaltiger Weise angestellten Experimente ergaben jedoch, dass die Konzentrationszunahme $\frac{dc}{dt}$ dem Volumen des Lösungsmittels umgekehrt proportional ist. Dies wird durch die oben angeführte, zuerst von Drucker ausgesprochene und von Nernst auf die gesamte Kinetik inhomogener Systeme verallgemeinerte Behauptung, dass der Konzentrationsabfall von der Sättigungskonzentration bis zur jeweiligen Lösungskonzentration sich eben in der adhärierenden Schicht vollziehe, wohl am einfachsten erklärt. Im Konvektionsgebiete H_2 wird nur so viel von dem Gelösten verteilt, als durch Diffusion in der Schicht H_1 (Diffusionsgebiet) übergegangen ist. Auf Grund dieser Vorstellung über den Mechanismus des Auflösungsvorganges lässt sich schon leicht nach Drucker und Nernst die Beziehung zwischen den Auflösungsgeschwindigkeitskonstanten und dem Diffusionskoeffizienten angeben.

Es ist nämlich nach der Noyes-Whitney'schen, von uns auf bestimmbare Oberflächen bezogenen Grundgleichung:

$$dx = A \,.\, F(C_o - c)\, dt \;, \tag{3}$$

worin x — die aufgelöste Stoffmenge in Grammen, F — die Oberfläche des aufzulösenden Stoffes, C_o — die Sättigungskonzentration, c — die Konzentration der Lösung zur Zeit t. A — eine Konstante, für die wir weiterhin den Namen der Auflösungsgeschwindigkeitskonstante ausschliesslich behalten werden[2]), — bedeu-

[1]) Zeit. phys. Ch. **35**, 283; Zeit. anorg. Ch. **28**, 314.

[2]) Es ist offenkundig, dass die Konstante A der Gleichung (3) und (5) mit der Noyes-Whitney'schen a durch die Beziehung $A = \frac{a\,V}{F}$ mit unserer früheren Konstante D (Zeit. phys. Ch. **35**, 283, Zeit. anorg. Ch. **28**, 314 und **35**, 23), die schon auf 1 cm³ berechnet ist, durch $A = D.\,V$, Modulus — verknüpft ist. Weiterhin soll zur Vermeidung von Verwechselungen nur die Konstante A die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante genannt werden.

ten. Als Auflösungsgeschwindigkeit wollen wir weiterhin nach der Gleichung (3) Δx für den Fall $c = 0$ und $F = 1$ definieren, d. h.

$$\Delta x = A\, C_o . \Delta t. \tag{3a}$$

Die Auflösungsgeschwindigkeit ist also die in der Zeiteinheit (1 Stunde) von der Einheit der Oberfläche (1 cm²) aufgelöste Stoffmenge, wenn die Oberfläche beständig mit einem Strome des reinen Lösungsmittels mit willkürlicher, aber unveränderlicher Geschwindigkeit umspült wird. Der so definierte Wert der Auflösungsgeschwindigkeit ist nur noch von den Konvektionsbedingungen abhängig; die Bestimmung dieser Werte z. B. für die in der Natur vorkommenden Ablagerungen könnte bei der Beurteilung geologischer Erscheinungen Wichtigkeit gewinnen.

Da $dx = V . dc$ ist (V — Volumen der Lösung), so geht die Gleichung (3) in (4) über:

$$dc = \frac{A}{V} . F(C_o - c)\, dt, \tag{4}$$

woraus nach der Integration

$$A = \frac{V}{F . t} \ln \frac{C_o}{C_o - c}, \text{ ev. } A = \frac{V}{F(t_2 - t_1)} \ln \frac{C_o - c_1}{C_o - c_2} \tag{5}$$

Anderseits gilt für die Diffusion in der adhärierenden Schicht H_1, deren Dicke s sei, die Fick'sche Diffusionsgleichung

$$dx = k . F \frac{dc}{ds}\, dt \tag{6}$$

Als erste Annäherung wollen wir annehmen, dass der Konzentrationsabfall im Diffusionsgebiete H_1 einen linearen Verlauf habe[1]),

[1]) Dies ist ja sicher nicht der Fall, da das Konvektionsgebiet H_2 vom Diffusionsgebiete nicht durch eine scharfe Grenzlinie getrennt werden kann. Vielmehr liesse sich das Konzentrationsgefälle durch eine Kurve MRT (Fig. 1) veranschaulichen. Nichtdestoweniger können wir jedoch immer die Gleichung (7) $\frac{dc}{ds} = \frac{C_0 - c}{s}$ setzen; nur in diesem Falle wird s nicht die totale Dicke der Diffusionsschicht (durch die Kurve MRT begrenzt) sein, sondern diejenige, die durch die im Punkte M gezogene Tangente bestimmt wird. Der durch die Gleichung (7) definierte Diffusionsweg entspricht rechnerisch der wirklich existierenden Diffusionsschicht.

es ist also:

$$\frac{dc}{ds} = \frac{C_o - c}{s} \tag{7}$$

weshalb die Gleichung (6) in (8) über geht:

$$dx = k \,.\, F \,.\, \frac{C_o - c}{s} \,.\, dt \tag{8}$$

und in

$$dc = \frac{k \,.\, F}{V} \,.\, \frac{C_o - c}{s}\, dt \tag{9}$$

Vergleichen wir (3) mit (8) oder (4) mit (9), so erhalten wir:

$$A \,.\, F(C_o - c)\, dt = k \,.\, F \frac{(C_o - c)}{s}\, dt,$$

woraus

$$\underline{A = \frac{k}{s}} \tag{10}$$

und umgekehrt:

$$\underline{k = A \,.\, s.} \tag{10a}$$

Die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante ist gleich dem Diffusionskoeffizienten dividiert durch den Diffusionsweg s. Wird gleiche Konvektion und gleiche Materialart vorausgesetzt — wodurch die Gleichheit des Diffusionsweges s bedingt wird — so lässt sich auf der Proportionalität von A und k zur Ermittelung von Diffusionskoeffizienten eine Methode gründen, die, wie wir schon in unserer ersten Mitteilung hingewiesen haben, besonders für wenig lösliche Stoffe Anwendung finden dürfte. Wie s und A von den Konvektionsbedingungen beinflusst werden, wird aus den weiter unten mitgeteilten Versuchsresultaten ersichtlich.

Wie schon erwähnt, ist von Nernst die Theorie des Auflösungsvorganges auf andere Fälle der Kinetik inhomogener Systeme verallgemeinert worden. Jede chemische Wirkung zwischen einer festen Phase H und einer flüssigen H_2 lässt sich nach Nernst auf dreierlei Vorgänge zurückfüren: 1) Übergang des Stoffes aus der Phase H in die adhärierende Schicht H_1; 2) chemische Reaktion in dem Gebiete H_1 oder $H_1 + H_2$ 3) Diffusion der beteiligten Stoffe in der adhärierenden Schicht H_1.

Der erste Vorgang spiele sich nun mit einer praktisch unmess-

bar grossen Geschwindigkeit ab, so dass die Kinetik inhomogener Systeme sich nur von den zwei übrigen Vorgängen abhängig erweist. Hier sind zwei Grenzfälle zu unterscheiden. Wenn (2) — die chemische, Reaktion von sehr kleiner Geschwindigkeit ist, dann haben die beteiligten Stoffe Zeit genug, ihren Weg durch die Diffusionschicht H_1 zurückzulegen und die Gesammtgeschwindigkeit des Vorganges ist vom Diffusionswege, also auch folglich von den Konvektionsbedingungen, der Rührgeschwindigkeit u. s. w. unabhängig. Wenn nun umgekehrt die chemische Reaktion eine sehr schnell verlaufende ist — wie dies z. B. bei der Ionenreaktionen, bei der Ionenspaltung neutraler Molekel oder bei der Wiederbildung solcher aus den Ionen (bei der elektrolytischen Ausscheidung) der Fall ist — dann hängt ja die Geschwindigkeit des Gesammtvorganges nur von der Diffusion der Stoffe in der adhärierenden Schicht H_1 ab, und alle Faktoren, die die Dicke der Adhäsionschicht affizieren, d. i. in erster Reihe die Konvektionbedingungen werden auch die Geschwindigkeit der Reaction beeinflussen. Durch die Untersuchung des Einflusses der Konvektionsart auf die Reaktionsgeschwindigkeit sind wir nun in den Stand gesetzt, zwischen den beiden Grenzfällen zu unterscheiden.

In dem zweiten Falle ist nun ersichtlich, dass, falls die Diffusionskoeffizienten der Stoffe und die Dicke der adhärierenden Schicht bekannt vorausgesetzt werden, aus diesen „physikalischen" Angaben die Geschwindigkeit chemischer Reaktion zwischen diesen Stoffen in inhomogenen Systemen sich voraussagen lässt. Wollen wir einige Beispiele näher ins Auge fassen. Als solchen wählen wir die Geschwindigkeit der Neutralisation einer Säure (Lösung von Benzoësäure) mit fester, in Platten aufgekitteter, praktisch unlöslicher Base, z. B. $Mg(OH)_2$. Die Geschwindigkeit der Vereinigung der Ionen $\overset{+}{H} + \overset{-}{O}H = H_2O$, ebenso wie die des Zerfalles der Benzoësäure in die Ionen $(\overset{+}{H})$ und $(C_6H_5 . \overset{-}{C}OO)$ können als praktisch unmessbar gross gesetzt werden, so dass an der Grenze zwischen der Platte H und der adhärierenden Schicht H_1 die Konzentration der Benzoësäure stets gleich 0 angenommen werden kann. Da $Mg(OH)_2$, nicht merkbar löslich ist, so wird die Geschwindigkeit der Neutralisation in diesem Falle nur durch die Diffusionsgeschwindigkeit der Benzoësäure in der Schicht H_1 zur Platte hin bedingt. Für diese Diffusionserscheinung können wir nach Fick schreiben:

$$dx = k \,.\, F \frac{dc}{ds} \,.\, dt\,;$$

setzen wir hier auch analog zu (7):

$$\frac{dc}{ds} = -\frac{C}{s} \text{ und auch } dx = V \,.\, dc\,,$$

so erhalten wir

$$(11) \qquad dc = -\frac{k \,.\, F}{V \,.\, s} \,.\, c \,.\, dt = -Nc\, dt\,.$$

Vergleichen wir die Gleichungen (11) und (9), so sehen wir, dass die Konstanten in beiden denselben numerischen Wert, nämlich $= \frac{k \,.\, F}{V \,.\, s}$ haben. Wird die Konstante in (11) auf die Einheit der Oberfläche und die Volumeinheit bezogen, d. h. wird gesetzt:

$$dc = -N' . \frac{F}{V} \,.\, c\, dt,$$

woraus nach der Integration:

$$(12) \qquad N' = \frac{1}{t} \cdot \frac{V}{F} \,.\, \ln \frac{c_1}{c_2} \text{ ist.}$$

so ist diese Konstante N' identisch mit der Konstante A (Gleichung 5) und gleich $\frac{k}{s}$: Die Konstante der Reaktionsgeschwindigkeit einer Säure mit einer festen unlöslichen Base ist gleich der Auflösungsgeschwindigkeitskonstante dieser Säure (dieselbe Konvektion vorausgesetzt).

Ebenso lässt sich leicht die Reaktionsgeschwindigkeit auch für den Fall berechnen, wo der festen Base selbst eine schon merkliche Löslichkeit zukommt [1]).

[1]) Erich Brunner l. c. S. 19 und 33. Die von E. Brunner zur Bestätigung der Theorie des Prof. Nernst angestellten Versuche weisen in quantitativer Beziehung bedeutende Schwankungen auf, da die von ihm benutzte Methode (s. u. w. S. 20) und auch manche Rechenoperationen stark anfechtbar sind. Wir hoffen binnen kurzem auf dies Gegenstand zurückzukommen und die Theorie an genaueren Experimenten zu prüfen.

III. Versuchsergebnisse.

1. Auswahl und Bereitung des Versuchsmaterials Wir haben zunächst wenig lösliche Stoffe zu den Versuchen verwendet, um das starke Einätzen der Oberflächen zu vermeiden und um nur mit verdünnten Lösungen, deren Zähigkeit und Dichte von denen des Wassers nicht sehr verschieden sind, zu tun zu haben. Die meisten Versuche sind deshalb mit reinem natürlichen Alabaster oder mit makrokristallinischem Gipse, s. g Marienglase ausgeführt worden. Aus diesem Material wurden Platten mit der Laubsäge ausgeschnitten, auf Glaspapier abgeschliffen und auf die nötige Form gebracht. Einige Versuche sind auch mit homologen aromatischen Säuren: Benzoësäure, Phenylessigsäure, Phenylpropionsäure wie auch mit Acetanilid angestellt worden. Aus diesen Stoffen lassen sich Platten in der Weise herstellen, dass man die Stoffe schmilzt und die geschmolzene Masse auf grosse, mit etwas Vaselin angestrichene Porzellantiegeldeckel aufgiesst und sie dann unter kleinem Druck langsam erstarren lässt. Nach dem Erstarren lösen sich die Platten leicht vom Deckel ab; sie werden auch auf Glaspapier in eine passende Form abgeschliffen. Für mässige Konvektionen besitzen solche Platten genügende Widerstandsfähigkeit.

Die Oberfläche sämtlicher Platten wurde mit einen feinem Lineal, welches in $^1/_2$ mm geteilt war, gemessen.

2. Versuchsmethoden. Zur Erzielung einer passenden Konvektion haben wir mehrere Methoden erprobt, die darauf gerichtet, erstens waren möglichst grosse Konvektion zu erreichen und zweitens dem lösenden Wasser eine kontrollierbare und zahlenmässig definierbare Bewegung zu ertheilen.

Methode *A*. In den ersten Versuchen[1]) wurde das Lösungsmittel in Glaszylinder (Bechergläser), deren Inhalt 1—3 Liter betrug, gebracht. Die zu lösenden Platten sind an den vier Flügeln des Rührers, der in der Mitte der Bechergläser angebracht war, oder auch an den Wänden der Bechergläser mit Kanadabalsam angekittet worden. Der Rührer wurde durch einen kleinen Luftmotor oder auch durch eine Turbine getrieben; die höchste so erzielte Umdrehungszahl des Rührers war ca. 400 Umdrehungen in der Minute. Diese Methode, die nachher auch von K. Drucker und neuerdings von E. Brun-

[1]) Zeit. phys. Ch. 35, 283 (1900), Zeit. anorg. Ch. 28, 314 (1901)

ner benutzt wurde, ist in mancher Hinsicht mangelhaft. Die Umdrehungszahl ist schwer konstant zu halten und zu berechnen; die wirkliche Bewegung des Wassers den Platten gegenüber ist nicht nur durch die Umdrehungszahl des Rührers, sondern auch durch die Breite des Gefässes, durch die Länge der Rührflügel und ihre Neigung gegen das Wasserniveau, mitbestimmt. Die in diesem Apparate angestellten Versuche sind jedenfalls nur für jeden besonderen Beobachter, der mit demselben Apparate arbeitet, reproduzierbar [1]. Auch lässt sich bei dieser Methode keine kräftige Konvektion erzwingen. Wir gingen deshalb zur Methode *B* über.

Methode *B*. Das Prinzip der Methode bestand darin, dass wir das Gefäss (grosses Erlenmeyersches Becherglas $4^1/_2$ Lit. fassend)

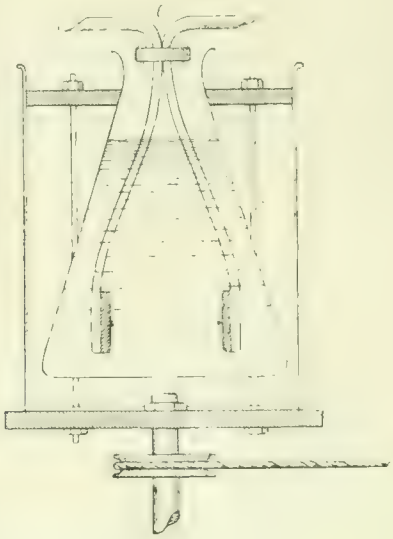


Fig. 2.

mit der Lösung zusammen an der Achse einer kräftigen Zentrifuge rotieren liessen; die Platten dagegen waren unbeweglich an eisernen Haltern befestigt und in die rotierende Lösung eingesenkt. Da wir nach dieser Methode kein definitives Resultat erzielt haben — wohl wegen der schwer kontrollierbaren Wasserbewegung wie auch wegen der schwer zu berücksichtigenden Temperaturschwankungen,

[1] Erich Brunner l. c. S. auch weiter unten.

möge hier die genauere Beschreibung der Versuchsausführung ausbleiben, zumal sich dieselbe an anderer Stelle[1]) findet.

Methode *C*. Die überwiegende Mehrzahl der Versuche wurde nach der Methode *C* ausgeführt, die wir auch als die genaueste und zweckentsprechendste betrachten. Der dazu verwendete Apparat ist in der Fig. 3 dargestellt. *A* ist ein aus Messing gefertigter Zy-

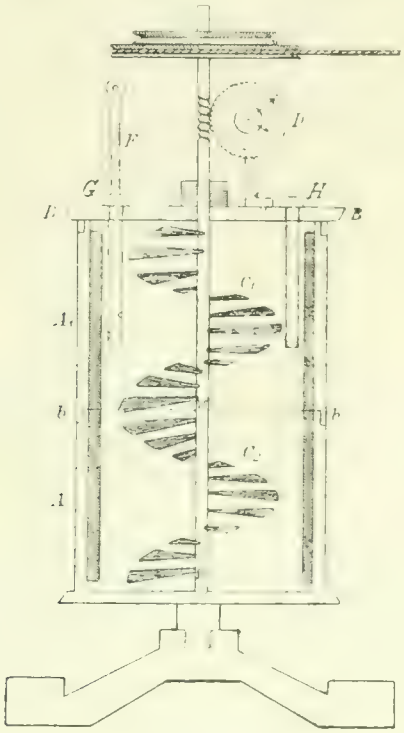


Fig. 3.

linder (Höhe 9·5 cm., Durchmesser 9·0 cm.), auf den in *b* ein zweiter eben solcher A_1 angeschraubt werden kann. Der Deckel *B*, mit Gummiringen gedichtet, kann ebenso auf *A* wie auf A_1 aufgesetzt werden. An der Achse, die durch den Deckel geht, kann entweder ein schraubenförmiger Rührer *C* — in zwei gleiche Teile C_1 und C_2 teilbar, oder auch Messingzylinder, deren Höhe gleich der Höhe des Gesamtapparates $(A + A_1)$, die Durchmesser aber der

[1]) Zeit. anorg. Ch. 35, 24 (1903).

Reihe nach gleich I — 5·4 cm., II — 3·9 cm., III — 2·0 cm. waren, befestigt werden. Diese mit rauher Oberfläche versehenen Messingzylinder hatten den Zweck, das Wasser in eine ringförmige Drehung zu versetzen. *D* ist ein Tourenzähler, der die in jedem Zeitintervall gemachte Umdrehungszahl unmittelbar abzulesen gestattet. In den Deckel des Gefässes konnten noch zwei metallne Röhrchen *G* und *H* eingeschraubt werden; die Röhrchen waren zur Aufnahme des Thermometers und zur Probenentnahme der Lösung bestimmt. Bei den Versuchen mit zylinderförmigen Rührern sind *G* und *H* weggelassen worden, um das die Gleichförmigkeit der Bewegung des rotierenden Wassers störende Hinderniss zu beseitigen. Die Zinkkasten mit den Platten oder unmittelbar die Platten selbst waren in zwei sich gegenüberstehende Vertiefungen auf der Innenseite des Apparates eingesetzt. In diesem Apparate lässt sich die Tourenzahl bis auf 2—3% genau während der ganzen Versuchsdauer einhalten.

Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, lässt sich der Apparat in zwei um 100% verschiedene Grössen zusammensetzen und benutzen. Es könnte somit das Volum des Lösungsmittels halbiert werden, ohne irgend welche andere Störung der Versuchsbedingungen hervorzurufen. Eine solche Anordnung wurde für die Entscheidung über den Einfluss des Volums auf die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante getroffen. Behufs Einhaltung einer konstanten Temperatur von 25° wurde der Apparat in einen Thermostaten eingesenkt in der Weise, dass der Boden des Apparates und der durchlöcherte Boden des Thermostaten an eine gemeinsame Unterlage eingeschraubt worden sind. Bei den Versuchen mit zylindrischen Rührern macht sich das Erwärmen des Wassers durch Reibung noch nicht störend fühlbar; wird dagegen der schraubenförmige Rührer in Gang gesetzt, so erwärmt sich das Wasser während des Versuches recht bedeutend. In diesen Fällen haben wir die Temperatur des Thermostaten 2—3° unter 25° C. eingestellt, damit die in dem Apparate entwickelte Wärme von dem Wasser des Thermostaten rasch aufgenommen würde. In den Versuchen mit den grössten Umdrehungsgeschwindigkeiten der Schraube hat sich auch diese Massnahme als unzulänglich erwiesen. Wir haben uns dadurch zu helfen gesucht, dass wir die ganze Versuchsdauer in kurze, 3 bis 5 Minuten lange Intervalle geteilt haben und am Anfang eines jeden Intervalles die Temperatur der Lösung auf soviel Grade

unterhalb 25° gebracht haben, als sie am Ende des Intervalls oberhalb der normalen Temperatur 25° steigen sollte. Der Temperaturspielraum eines Intervalles bei den angewandten Drehungsgeschwindigkeiten ist durch Vorversuche ermittelt worden. In solcher Weise lässt sich jedoch nur eine angenäherte Konstanz der mittleren Versuchstemperatur erzielen.

Die zylindrischen Rührer sind von einem $^1/_{40}$ HP. Luftmotor getrieben worden; für den schraubenförmigen dagegen ist eine stärkere Kraftquelle nötig. Es wurden dazu Elektromotoren von $^1/_2$ HP und 1 HP benutzt.

Die entnommenen Proben sind zur Entfernung etwaiger suspendierten Teilchen vor der Analyse immer filtriert worden. Die Analyse der Gipslösungen geschah durch Abdampfen, Glühen und Wägen des zurückgebliebenen $CaSO_4$. Die Lösungen der organischen Säuren waren mit $Ba(OH)_2$ - Lösung titriert. Die durch Entnahme der Proben eintretende Volumänderung wurde entweder direkt nach der Gleichung (5) berücksichtigt, oder es wurde eine der entnommenen Probe gleiche Wassermenge zur Lösung nachgefüllt, die dadurch eingetretene Konzentrationsänderung durch Rechnung ermittelt und jedes Intervall nach der Probenentnahme als besonderer Versuch mit unverändertem Volum nach der Gleichung

$$A = \frac{V}{t \,.\, F} \ln \frac{C_o - c_1}{C_o - c_2}$$

berechnet. Dieses letztere Verfahren und diese Rechnungsweise ist bei sämtlichen Versuchen mit den zylindrischen Rührern benutzt worden.

Zeichenerklärung. In allen weiter angegebenen Tabellen bedeuten:

V — das Volumen der Lösung in cm³.
F — die Oberfläche der Platten in cm².
t — die Zeit in Stunden.
C_o — die Konzentration der gesättigten Lösung, d. h. die Anzahl Gramme in 1 cm³ gesättigter Lösung.
c — die Konzentration zur Zeit t in g pro 1 cm³.
T — die Temperatur in Celsiusgraden.
n — die Tourenzahl des Rührers in 1 sec.
d — die Dicke des rotierenden Wasserringes gemessen aus dem Unterschied zwischen dem gegenseitigen Abstand der Platten und den Durchmessern der Zylinder.

r — den Radius der zylindrischen Rührer.

$v = 2\pi r . n$ — die lineare Geschwindigkeit der Oberfläche des Rührers.

$\frac{v}{d}$ — das mittlere Geschwindigkeitsgefälle in der rotierenden Wasserschicht.

A — die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante nach der Gleichung:

$$A = \frac{V}{F . t} . \lg \frac{C_0 - c_1}{C_0 - c_2} . 2{\cdot}303 \ \frac{\text{cm}}{\text{Stunde}} .$$

Δx — die Auflösungsgeschwindigkeit nach der Gleichung (3a)

$$\Delta x = A . C_0 .$$

s — die Dicke der adhärierenden Diffusionsschicht $= \frac{k}{A}$ [1]).

3. Einfluss der Rührgeschwindigkeit auf die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante. Die schon bereits nach der Methode *B* angestelten Versuche ergaben, dass die Konstante A proportional der Umdrehungszahl der Zentrifuge ist [2]). Das nämliche Ergebnis geht jedoch mit noch viel grösserer Genauigkeit aus den nach der Methode *C* sowohl mit dem zylindrischen wie auch mit dem schraubenförmigen Rührer ausgeführten Versuchen hervor.

Sämtliche unten angegebenen Tabellen beziehen sich auf Versuche, die mit Alabaster ausgeführt worden sind, falls nicht ausdrücklich ein anderes Versuchsmaterial vermerkt ist. Die Temperatur der Versuche betrug 25° C. Die Sättigungskonzentration ist bei 25° gefunden worden zu $C_0 = 0{\cdot}002094$ g $CaSO_4$ in 1 cm³ [3]). Die Zahlen Δx beziehen sich offenbar auf den Gips, das natürliche zweifach gewässerte Calciumsulfat $CaSO_4 . 2 H_2 0$, also $\Delta x = A . C_0'$, wo $C_0' = 0{\cdot}0026509$ $CaSO_4 . 2 H_2 0$ in 1 cm³.

[1]) Für den Diffusionskoeffizienten k für $CaSO_4$ liegen keine unmittelbaren Messungen vor. Wir haben denselben aus den Ionenbeweglichkeiten nach der bekannten Nernst'schen Gleichung (Nernst. Theor. Chem. III. Auflage S. 261) zu $k = 1{\cdot}45 \frac{\text{cm}^2}{\text{Tag}} = 0{\cdot}0605 \frac{\text{cm}^2}{\text{Stunde}}$ berechnet.

[2]) Zeit. anorg. Ch. **35**, 28 Tab. 2 (1903).

[3]) Zeit. phys. Ch. **35**, 287 (1903); Zeit. anorg. Ch. **28**, 320 (1901).

TABELLE I.

Schraubenförmiger Rührer.

t	V	$c.10^3$	$(C_0-c)10^3$	A.
	1) $n = 9{\cdot}77$		$F = 33{\cdot}8$ cm²	
0·	1000	0·200	1·894	—
0·250		0·748	1·346	40·42
0·	975	0·748	1·346	—
0·250		1·068	1·026	31·33 (?)
0·	1000	1·052	1·042	—
1·000		1·808	0·286	38·26
				$A = 36{\cdot}67$
				$s = 0{\cdot}00165$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}0972$ g
	2) $n = 17{\cdot}67$		$F = 31{\cdot}0$ cm²	
0·	1000	0·000	2·094	—
0·1667		0·560	1·534	60·33
0·	975	0·560	1·534	—
0·1667		0·996	1·098	63·09
0·	950	0·996	1·098	—
0·1667		1·308	0·786	61·46
0·	1000	1·480	0·514	—
0·1667		1·724	0·370	63·09
				$A = 61{\cdot}99$
				$s = 0{\cdot}00098$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}1643$ g
	3) $n = 24{\cdot}17$		$F = 31{\cdot}55$ cm²	
0·	1000	0·692	1·402	—
0·1667		1·156	0·938	76·43
0·	975	1·156	0·938	—
0·1667		1·460	0·634	72·62
0·	950	1·460	0·634	—
0·1667		1·696	0·398	84·10
				$A = 77{\cdot}72$
				$s = 0{\cdot}00078$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}2059$ g

t	V	$c.10^3$	$(C_0-c)\,10^3$	A.
	4) $n = 30{\cdot}95$		$F = 31{\cdot}55$ cm²	
0·	1000	0·468	1·626	—
0·1667		1·128	0·966	99·02
0·	975	1·128	0·966	—
0·1667		1·508	0·586	92·68
0·	950	1·508	0·586	—
0·1667		1·732	0·362	87·02
			$A =$	92·91
			$s =$	0·00065 cm
			$\Delta x =$	0·2462 g
	5) $n = 37{\cdot}25$		$F = 31{\cdot}55$ cm²	
0·	1000	0·008	2·086	—
0·0833		0·548	1·546	114·0
0·	975	0·548	1·546	—
0·0833		0·984	1·110	122·4
0·	1000	0·540	1·554	—
0·0833		0·960	1·134	119.9
0·	975	0·960	1·134	—
0·0833		1·264	0·830	115·8
			$A =$	117·6
			$s =$	0·00052 cm
			$\Delta x =$	0.3127 g

TABELLE II.

Schraubenförmiger Rührer. Versuchsmaterial: Marienglas.

	1) $n = 17{\cdot}33$		$F = 52{\cdot}0$ cm²	
0.	1000	0·000	2·094	—
0·250		0·600	1·494	25·98
0·	975	0·600	1·494	—
0·250		1·004	1·090	23·65
			$A =$	24·81
			$s =$	0·0024 cm
			$\Delta x =$	0·0657 g

t	V	$c.10^3$	$(C_0-c)\,10^3$	$A.$
	2) $n = 26{\cdot}25$;		$F = 54{\cdot}0$ cm²,	
0·	1000	0·000	2·094	—
0·200		0·612	1·482	32·01
0·	975	0·612	1·482	—
0·200		1·056	1·038	32·15
			$A = 32{\cdot}08$	
			$s = 0{\cdot}00190$ cm	
			$\Delta x = 0{\cdot}08501$ g	
	3) $n = 36{\cdot}5$		$F = 39{\cdot}9$ cm²	
0·	1000	0·010	2·054	—
0·0833		0·328	1·766	45·46
0·	975	0·328	1·766	—
0·0833		0·592	1·502	47·51
	4) $n = 36{\cdot}5$;		$F = 27{\cdot}7$ cm²,	
0·	1000	0·064	2·030	—
0·1333		0·364	1·730	43·32
			$A = 45{\cdot}43$	
			$s = 0{\cdot}00133$ cm	
			$\Delta x = 0{\cdot}12039$ g	

In der Tabelle III ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Tabellen I und II wiedergegeben.

TABELLE III.

n	A	$s = \frac{k}{A}$	$\Delta x = A\,.\,C'_0$
	Alabaster.		
9·77	36·7	16·0 μ	0·0972 g
17·67	62·0	9·8	0·1643
24·17	77·7	7·8	0·2059
30·95	92·9	6·5	0·2462
37·25	117·6	5·2	0·3127
	Marienglas.		
17·33	24·8	24 μ	0·0657
26·25	32·1	19	0·0850
36·50	45·4	13	0·1204

Es folgen nun die Ergebnisse der Versuche mit zylindrischen Rührern.

TABELLE IV.

Zylindrischer Rührer No. I.

$V = 750$ cm³ $\quad r = 2{\cdot}7$ cm

$F = 57{\cdot}7$ cm² $\quad d = 1{\cdot}15$ cm

t	n	$c.10^3$	$(C_0 - c).10^3$	A.
		1) $\frac{v}{d} = 47{\cdot}9$		
0·	3·25	0·232	1·862	
0·7500		0·855	1·232	7·06
0·	3·25	0·684	1·410	
0·6667		1·113	0·981	7·04
0·	3·25	1·250	0·855	
0·6667		1·510	0·584	7·14
	3·25			$A = 7{\cdot}08$
				$s = 0{\cdot}0086$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}01880$ g
		2) $\frac{v}{d} = 130{\cdot}2$		
0·	8·88	0·207	1·887	
0·500		1·002	1·092	14·22
0·	8·83	0·935	1·159	
0·500		1·442	0·652	14·96
0·	8·80	1·346	0·748	
0·500		1·647	0·447	13·39
0·	8·88	1·549	0·547	
0·500		1·770	0·324	13·62
	$n = 8{\cdot}85$			$A = 14{\cdot}05$
				$s = 0{\cdot}0043$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}0372$ g

t	n	$c.10^3$	$(C_0-c).10^3$	A.
		3) $\frac{v}{d} = 167{\cdot}0$		
0·	11·33	0·345	1·749	
0·250		0·845	1·249	17·51
0·	11·33	0·789	1·305	
0·250		1·160	0·934	17·39
0·	11·28	1·083	1·011	
0·3333		1·450	0·644	17·59
0·	11·33	1·353	0·741	
0·3333		1·617	0·477	17·18
	$n = 11{\cdot}32$			$A = 17{\cdot}42$
				$s = 0{\cdot}0035$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}0462$ g
		4) $\frac{v}{d} = 225{\cdot}9$		
0·	15·33	0·355	1·739	
0·1667		0·807	1·287	23·47
0·	15·25	0·754	1·340	
0·1667		1·097	0·997	23·06
0·	15·25	1·024	1·070	
0·1667		1·302	0·792	23·46
0·	15·41	1·215	0·879	
0·1667		1·433	0·661	22·23
0·	15·17	1·337	0·757	
0·3333		1·673	0·421	23·12
0·	15·33	1·561	0·533	
0·500		1·867	0·227	22·17
0·	15·33	1·743	0·351	
0.750		1·983	0·111	19·96 (?)
	$n = 15{\cdot}29$			$A = 22{\cdot}64$
				$s = 0{\cdot}0027$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}0600$ g
		5) $\frac{v}{d} = 270{\cdot}1$		
0·	18·50	0·301	1·793	
0·1667		0·802	1·292	25·56

t	n	$c.10^3$	$(C_0-c).10^3$	$A.$
0.	18·33	0·749	1·345	
0·1667		1·150	0·944	26·98
0·	18·33	1·073	1·021	
0·1667		1·365	0·729	26·27
0·	18·10	1·274	0·820	
0·250		1·575	0·519	23·78
	$n=18·32$			$A = 25·40$
				$s = 0·0024$ cm
				$\Delta x = 0·0673$ g

6) $\frac{v}{d} = 304·0$

0·	20·67	0·234	1·860	
0·250		0·970	1·124	26·19
0·	20·33	0·841	1·253	
0·1667		1·221	0·873	28·18
0·	20·67	1·058	1·036	
0·1667		1·360	0·734	26·87
0·	20·83	1·179	0·915	
0·1667		1·465	0·629	28·56
	$n=20·62$			$A = 27·45$
				$s = 0·0022$ cm
				$\Delta x = 0·0728$ g

TABELLE V.

$V = 950$ cm³ $r = 1·95$ cm

$d = 1·85$ cm

t	n	$c.10^3$	$(C_0-c)10^3$	$A.$
	1) $\frac{v}{d} = 21·6$		$F = 57·6$ cm²	
0·	3·28	0·134	1·960	
0·5833		0·417	1·677	4·41
0·	3·30	0·373	1·721	
0·500		0·605	1·489	4·78
0·	3·23	0·541	1·553	
0·6667		0·788	1·306	4·29

t	n	$c.10^2$	$(C_0-c).10^3$	$A.$
0·	3·31	0·705	1·389	
1·000		1·037	1·057	4·51
	$n = 3·27$			$A = 4·50$
				$s = 0·0134$ cm
				$\Delta x = 0·0119$ g

2) $\frac{v}{d} = 43·8$ $F = 57·6$ cm²

0·	6·67	0·104	1·990	
0·3333		0·375	1·719	7·24
0·	6·58	0·336	1·755	
0·3333		0·553	1·541	6·55
0·	6·58	0·495	1·599	
0·500		0·805	1·289	7·11
0·	6·62	0 720	1·374	
0·500		0·972	1·122	6·69
	$n = 6·61$			$A = 6·90$
				$s = 0·0087$ cm
				$\Delta x = 0·0180$ g

3) $\frac{v}{d} = 67·8$ $F = 58·3$ cm²

0·	10·25	0·254	1·840	
0·3333		0·582	1·512	9·60
0·	10·33	0·520	1·574	
0·3333		0·808	1·286	9·88
0·	10·25	0·723	1·371	
0·3333		0·968	1·126	9·63
0·	10·25	0·866	1·228	
0·500		1·188	0·906	9·91
	$n = 10·27$			$A = 9·73$
				$s = 0·0062$ cm
				$\Delta x = 0·0258$ g

4) $\frac{v}{d} = 105·1$ $F = 58·3$ cm²

0·	15·88	0·196	1·898	
0·250		0·535	1·559	12·83

t	n	$c.10^3$	$(C_0-c).10^3$	$A.$
0·	15·83	0·507	1·587	
0·250		0·795	1·299	13·05
0·	15·83	0·753	1·341	
0·250		1·002	1·092	13·39
0·	15·91	0·950	1·144	
0·333		1·205	0·889	12·33
	$n = 15·88$			$A = 12·90$
				$s = 0·0046$ cm
				$\Delta x = 0·0341$ g

5) $\frac{v}{d} = 148·9$ $F = 58·3$ cm²

0·	22·17	0·334	1·760	
0·1667		0·600	1·494	16·02
0·	22·50	0·568	1·526	
0·1667		0·795	1·299	15·76
0·	22·83	0·753	1·341	
0·1667		0·975	1·119	[17·69] (?)
0·	22·50	0·924	1·170	
0·250		1·180	0·914	15·73
	$n = 22·50$			$A = 15·84$
				$s = 0·0038$ cm
				$\Delta x = 0·0420$ g

6) $\frac{v}{d} = 232·8$ $F = 58·3$ cm²

0·	35·50	0·206	1·888	
0·1667		0·598	1·496	22·75
0·	35·33	0·535	1·559	
0·1667		0·880	1·214	24·45
0·	35·17	0·787	1·307	
0·1667		1·062	1·032	23·10
0·	34·67	0·950	1·144	
0·250		1·306	0·788	24·30
	$n = 35·17$			$A = 23·65$
				$s = 0·0026$ cm
				$\Delta x = 0·0627$ g

TABELLE VI.

$V = 1100$ cm³ $r = 1{\cdot}00$ cm
$F = 57{\cdot}6$ cm² $d = 2{\cdot}85$ cm

t	n	$c.10^2$	$(C_0-c)\,10^3$	$A.$
		1) $\frac{v}{d} = 34{\cdot}28$		
0·	15·61	0·070	2·024	
0·500		0·337	1·757	5·40
0·	15·78	0·307	1·787	
0·500		0·535	1·559	5·21
0·	15·37	0·486	1·608	
0·8333		0·821	1·273	5·36
0·	15·47	0·747	1·347	
0·6667		0·973	1·121	5·26
	$n = 15{\cdot}56$			$A = 5{\cdot}31$
				$s = 0{\cdot}0114$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}0140$ g
		2) $\frac{v}{d} = 54{\cdot}03$		
0·	24·50	0·166	1·928	
0·3333		0·380	1·714	6·74
0·	24·50	0·345	1·749	
0·3333		0·551	1·543	7·18
0·	24·55	0·501	1·593	
0·500		0·751	1·343	6·52
0·	24·55	0·682	1·412	
0·500		0·919	1·175	7·02
	$n = 24{\cdot}52$			$A = 6{\cdot}86$
				$s = 0{\cdot}0088$ cm
				$\Delta x = 0{\cdot}0181$ g
		3) $\frac{v}{d} = 75{\cdot}33$		
0·	34·43	0·239	1·855	
0.250		0·447	1·647	9·09
0·	33·67	0·406	1·688	
0·250		0·577	1·517	8·16

t	n	$c.10^3$	$(C_0-c)\,10^{33}$	$A.$
0·	34·25	0·525	1·569	
0·3333		0·751	1·343	8·91
0·	34·40	0·682	1·412	
0·4167		0·917	1·177	8·34
	34·19			$A = 8·62$
				$s = 0·0070$ cm
				$\Delta x = 0·0228$ g

4) $\frac{v}{d} = 92·25$

0·	44·33	0·110	1·984	
0·1667		0·273	1·821	9·82
0·	45·33	0·248	1·846	
0·1667		0·415	1·679	10·86
0·	45·00	0·377	1·717	
0·250		0·589	1·505	10·07
0·	45·50	0·535	1·559	
0·3333		0·800	1·294	10·68
	45·04			$A = 10·36$
				$s = 0·0058$ cm
				$\Delta x = 0·0273$ g

Die Tabelle VII gibt eine Zusammenfassung der oben angeführten ausführlichen Versuchsdaten aus den Tabellen IV—VI.

TABELLE VII.

$\frac{v}{d}$	A	s	$\Delta x = AC_0'$
	1) $d = 1·15$ cm		
47·9	7·1	86 μ	0·0187 g
130·2	14·1	43	0·0372
167·0	17·4	35	0·0462
225·9	22·6	27	0·0600
270·1	25·4	24	0·0673
304·0	27·5	22	0·0728

$\frac{v}{d}$	A	s	$\Delta x = AC_0'$
	2) $d = 1{\cdot}85$ cm		
21·6	4·5	134 μ	0·0119 g
43·8	6·9	88	0·0180
67·8	9·7	62	0·0258
105·1	12·9	46	0·0341
148·9	15·8	38	0·0420
232·7	23·7	26	0·0627
	3) $d = 2{\cdot}85$ cm		
34·3	5·3	114 μ	0·0140
54·0	6·9	88	0·0181
75·3	8·6	70	0·0228
92·2	10·4	58	0·0272

Die Tabelle III und VII sind auf das Diagramm (Siehe Fig. 4.) aufgetragen Als Ordinaten sind die Auflösungskonstanten A angenommen, als Abszissen sind es für die Tabelle III die unmittelbar abgelesenen Umdrehungszahlen des Rührwerkes (die punktierten Linien). Wie ersichtlich, sind die Auflösungskonstanten eine lineare Funktion der Rührgeschwindigkeit. Für die Tabelle VII sind als Abszissen nicht die Umdrehungszahlen, sondern die mittleren Geschwindigkeitsgefälle $\frac{v}{d}$ des rotierenden Wassers genommen. Die unmittelbar an dem rotierenden Messingzylinder gelegene Wasserschicht hat wohl die Geschwindigkeit des Zylinders selbst, die an den Platten dagegen adhärierende Schicht hat die Drehungsgeschwindigkeit 0. Wie auch die wirkliche Geschwindigkeitsverteilung in Mitten der Lösung sein mag, das mittlere Geschwindigkeitsgefälle kann gleich dem Quotient $\frac{v}{d}$ gesetzt werden, wo $v = 2\pi r.n$ ist.

Auch bei der Anwendung von zylindrischen Rührern ist die Konvektion in der Lösung zum gleichmässigen Verteilen des Gelösten ganz ausreichend: die Lösung hat in gegebener Zeit an allen der Analyse zugänglichen Stellen genau die gleiche Konzentration, wie durch Kontrollproben mehrfach festgestellt worden ist. Auch die genaue Giltigkeit der logarithmischen Formel in diesen sämtlichen

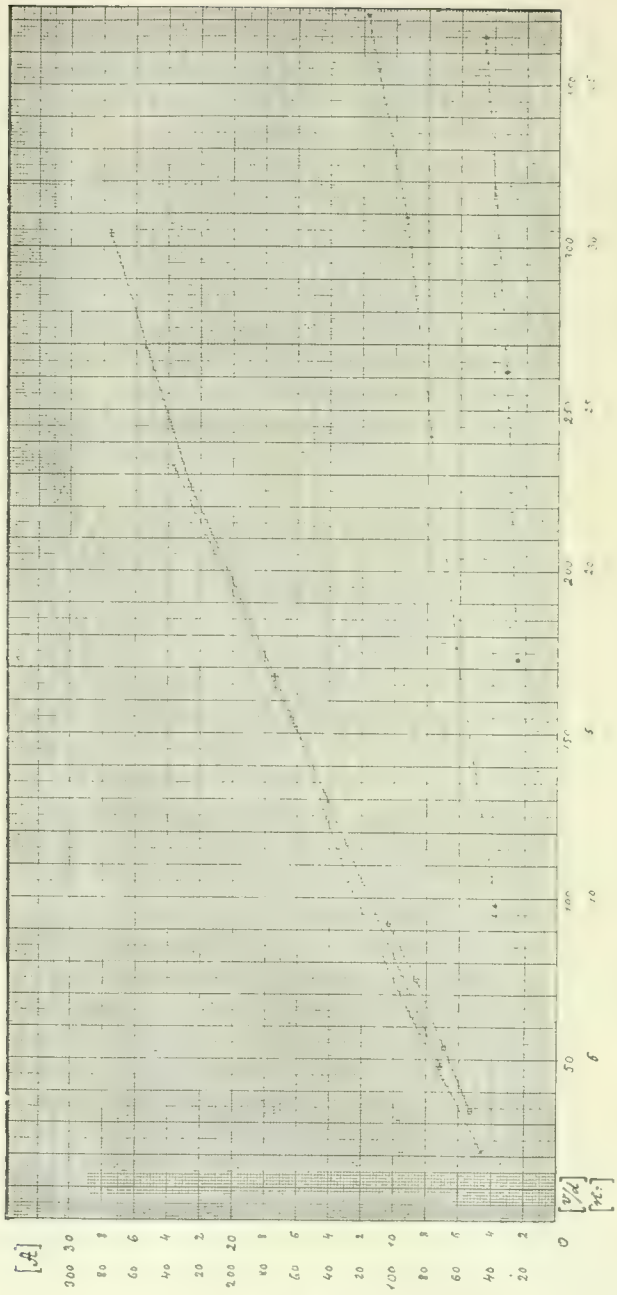

[h]
300 30
80 8
60 6
40 4
20 2
200 20
80 8
60 6
40 4
20 2
100 10
80 8
60 6
40 4
20 2
0
50
100
150
200
250
300
350
[m/s]

Fig. 4

Versuchen ist ein Beleg hierzu, denn die Gleichung konnte nicht bewährt sein, falls sie von dem Zufall abhinge, an welchem Punkte der Lösung die Probe zur Analyse entnommen worden ist.

Auch für die Versuche mit zylindrischen Rührern (die ausgezogenen Linien) besagt das Diagramm deutlich, dass die Auflösungskonstante eine lineare Funktion der Drehungsgeschwindigkeit ist[1]).

Die mit drei verschiedenen Zylindern erhaltenen Linien decken sich zugleich in ihrem gemeinsamen Gebiete. Die Unterschiede in der Lage der Linien übersteigen nicht die möglichen Versuchsschwankungen. Wie auch in diesen Versuchen (Tabelle IV—VI) die Flüssigkeitsbewegung hervorgerufen sein mag, die Auflösungsgeschwindigkeiten sind gleich, wenn die Geschwindigkeitsgefälle der rotierenden Lösung gleich sind. Dies gibt uns eine Antwort auf die Frage, unter welchen Bedingungen die verschiedenartig über die Auflösungsgeschwindigkeit angestellten Versuche unter einander vergleichbar werden. Als identische Konvektionsbedingungen müssen diejenigen betrachtet werden, in denen ein identisches Geschwindigkeitsgefälle realisiert worden ist. Wir dürfen also wohl behaupten, dass Versuche über Auflösungsgeschwindigkeit immer so gestaltet sein sollen, dass sich das Geschwindigkeitsgefälle der Bewegung quantitativ angeben liesse. Die Versuche nach der Methode A, wie solche später in grosser Zahl von Erich Brunner ausgeführt worden sind, entsprechen dieser Bedingung nicht, denn die Faktoren, die die Konvektion der

[1]) Hr. Erich Brunner (l. c.) behauptet, die Auflösungsgeschwindigkeit sei der Potenz $^2/_3$ der Rührgeschwindigkeit proportional. Diese Behauptung scheint uns ganz unbegründet, denn sie ist weder durch irgend welche theoretischen Betrachtungen gestützt, noch durch die von ihm erhaltenen Resultate genug begründet. Die von E. Brunner angewandte Versuchsmetode, die im wesentlichen unserer Methode A nachgebildet ist, gestattet nicht, die Umdrehungszahl des Rührers in weiteren Grenzen zu variieren und dieselbe auch genau zu berechnen. Die Reduktion sämtlicher A-Werte auf eine willkürliche Drehgeschwindigkeit 150 — nach der Proportionalität zur Potenz $^2/_3$—, wie dies von Hr. E. Brunner getan worden ist, ist unbegründet und führt ja auch zu widersinnigen Resultaten (z. B. (l. c. Seite 24, Tab. VI). Auch finden wir in der Abhandlung (Seite 7): „ich fand nun sowohl bei 20° als bei 30° die Konstante A genau proportional der Rührgeschwindigkeit". Dieser Satz, der im besten Einklang mit unseren von Hr. E. Brunner dort eben zitierten Ergebnissen steht, wird von diesem Verfasser weiter nicht berücksichtigt, obgleich er auch nicht abgewiesen wurde.

Lösung mitbestimmen, sind dort zu zahlreich und schwer erfassbar. In der Tat unterscheiden sich die Zahlen, die Erich Brunner für die Auflösungskonstante der Benzoesäure gefunden hat, sehr stark von den unserigen und auch von denen Druckers (Erich Brunner l. c. S. 9). Die Versuche nach dieser Methode lassen sich also nicht von verschiedenen Beobachtern reproduzieren, was wohl ein grosses Übel jeder Methode ist.

In den Versuchen mit schraubenförmigen Rührern sind für die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante A Zahlen von 36·7 bis 117·6 gefunden worden. Diesen Zahlen würden, nach den mit den zylindrischen Rührern erhaltenen Werten die Geschwindigkeitsgefälle $\frac{v}{d}$ von 390 bis 1300 entsprechen. So grosse Geschwindigkeitsgefälle mit den zylindrischen Rührern zu erzielen, war bei der uns dann zur Verfügung stehender Kraftquelle (Luftmotor $^1/_{40}$ HP) nicht möglich. Wenn jedoch die Linie, die in dem Diagramm die Versuche mit schraubenförmigem Rührer wiedergibt, eine Gerade ist, so dürfen wir dies auch so aussprechen, dass die lineare Abhängigkeit der Auflösungsgeschwindigkeit sich bis zu dem Geschwindigkeitsgefälle von 1300 sec^{-1} experimentell tatsächlich bewährt.

Die Linien des Diagramms konvergieren bei der Extrapolation für $n = 0$, ev. $v/d = 0$ nicht dem Werte $\Delta x = 0$ und $A = 0$ zu, sondern schneiden, wie es aus der Zeichnung zu entnehmen ist, für $n = 0$ die Ordinatenackse im Punkte $A = 1—3$. Die physikalische Bedeutung dieser Erscheinung ist sehr einfach. Unserem Apparate wird während des Versuches eine ganze Reihe von Stössen beigebracht, die durch den Lauf des Motors, durch das Beben des Tisches u. s. w. hervorgerufen werden. Würden diese Stösse ausgeschlossen sein, so würde für $n = 0$ die Auflösung nur durch ungestörte Diffusion erfolgen, d. h. die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante A wäre wohl praktisch unmessbar klein. Diese Stösse bringen es jedoch mit sich, dass, wenn auch das Wasser in Drehung nicht versetzt worden wäre, dennoch eine Konvektion und eine Vermischung der Lösung vorhanden sein würde. Das $A = 1 - 3$ für $n = 0$, ist, so zu sagen, das Drehungsaequivalent sämtlicher Stösse, die der Apparat in der Versuchsanordnung erleidet. Für $A = 1—3$ ergibt sich die Dicke der Diffusionsschicht s zu 300—200 μ; wäre keine Konvektion vorhanden und wäre also die ganze Wasserschicht der

freie Diffusionsweg, so sollte sie ca. hundert mal grösser sein und einige Millimeter (10—30 mm) betragen.

Wie aus den zusammenfassenden Tabellen III und VII ersichtlich, erfolgt das Steigen von A und das Sinken von s sehr langsam mit steigendem n und $\frac{v}{d}$. In der allgemeinen Formel der linearen Abhängikeit $y = mx + n$ ist in diesem Falle der Zahlenfactor m eine sehr kleine Zahl. Unsere Versuche mit dem kräftig betriebenen schraubenförmigen Rührer wurden in der Absicht unternommen, ob es nicht möglich wäre, eine direkte Wirkung zwischen Lösungsmittel und dem festem Stoffe zu erreichen. Bei der grössten Umdrehungszahl $n = 37{\cdot}25$ beträgt s noch 5 μ. Um die Dicke der adhärierenden Diffusionsschicht bis auf molekulare Dimensionen zu reduzieren, musste man die Drehgeschwindigkeiten noch ca. 10000 mal grösser machen. Ob sich im Wasser einem schraubenförmigen Rührer je eine Geschwindigkeit von ca. 300000 Umdrehungen in der Sekunde erteilen lassen wird, ist wohl zweifelhaft.

4. Einfluss der Gipsart. Aus den Tabellen I und II ist zu ersehen, dass die Auflösungsgeschwindigkeit des Marienglases ca. 2·5 mal kleiner als diejenige des Alabasters ist. Auch nach der Methode A ergab sich das nämliche Verhältnis. Da von Wulff[1]) in der Auflösungsgeschwindigkeit verschiedener Kristallflächen kein Unterschied gefunden worden ist, so lässt sich der Unterschied der Lösungsgeschwindigkeiten beider Gipsarten wohl nur auf die verschiedenen Adhäsionsbedingungen zurückführen. In der Tat zeigen die zum Spiegelglanz polierten Alabasterplatten anfänglich, so lange sie noch nicht mattiert werden, eine ca. 2 mal kleinere Auflösungsgeschwindigkeit.

Platten aus künstlichem Gips „Plâtre“ werden ca. 2 mal schneller gelöst als Alabaster-Platten. Doch verdient dies Resultat keine grosse Beachtung, da die Platten aus „Plâtre“ für stärkere Konvektionen nicht genug widerstandsfähig sind.

5. Einfluss des Volums der Lösung. Es wurde schon erwähnt, dass nach gewissen Voraussetzungen (s. ob. S. 4), die wir früher angenommen hatten, die Unabhängigkeit des Sättigungsgeschwindigkeitskoeffizienten a (Gleichung 2) vom Volum zu erwarten war. Nach einer entgegengesetzten Betrachtung dagegen sollte nicht

[1]) Zeit für Krystallorgr. l. c. s.

a, sondern nur $aV = A$ konstant sein, so dass a sich umgekehrt proportional dem Volumen stellen sollte. Um eine definitive Entscheidung zwischen beiden Ansichten zu treffen, haben wir verschiedenartige Versuche über den Einfluss des Volums ausgeführt. Vorläufige Versuche nach der Methode A und auch die mit der Zentrifuge ergaben keine genug übereinstimmenden Resultate; war das Volumverhältnis $\frac{V_1}{V_2} = 2$, so schwankte — je nach den Konvektionsbedingungen — das Koeffizientenverhältnis $\frac{a_2}{a_1}$ zwischen 1·4—2·3 [1]). Diese Schwankungen rühren von den dort schwer konstant zu haltenden Konvektionsbedingungen her. Definitive Versuche sind nach der Methode C ausgeführt worden: in den Versuchen mit schraubenförmigem Rührer wurde nur die halbe Höhe des Gefässes (unterer Teil A) und die Hälfte der Rührers c_1 benutzt. Von den zahlreichen Tabellen sei z. B. eine angegeben, deren A-Werte offenbar mit dem letztem A für Alabaster in der zusammenfassenden Tabelle III zu vergleichen sind.

TABELLE VIII.

t	V	$c.10^3$	$(C_0-c).10^3$	A
	$n = 37{\cdot}17$;		$F = 16{\cdot}1$ cm²	
0·	500	0·000	2·094	—
0·0833		0·548	1·546	113·1
0·	475	0·548	1·546	—
0·0833		0·948	1·146	106·2
				109·7

Das nämliche Resultat: die Konstanz von A und also die umgekehrte Proportionalität von a und V geht noch genauer aus den Versuchen mit dem zylindrischen Rührer hervor, wie dies aus der unten stehenden Tabelle, die mit den Zahlenangaben der Tabelle VII für $d = 1{\cdot}85$ vergleichbar ist, ersichtlich sein wird. Die A-Werte in der Tabelle IX und in der Tabelle VII für $d = 1{\cdot}85$ sind in der Tat in den Fehlergrenzen identisch.

[1]) Zeit. anorg. Ch. 35, 40.

TABELLE IX.

$V = 475$ cm³ $r = 1{\cdot}95$ cm
$F = 29{\cdot}0$ cm² $d = 1{\cdot}90$ cm

1) $\frac{v}{d} = 66{\cdot}8$

0·	10·43	0·000	2·094	
0·250		0·316	1·778	10·72
0·	10·27	0·250	1·845	
0·250		0·509	1·585	9·92
	$n = 10{\cdot}37$			$A = 10{\cdot}32$

2) $\frac{v}{d} = 103{\cdot}3$

0·	15·67	0·000	2·094	13·03
0·1667		0·260	1·834	
0·	16·33	0·205	1·889	13·53
0·1667		0·448	1·646	
0·	16·10	0·354	1·740	12·63
0·250		0·659	1·435	
	$n = 16{\cdot}03$			$A = 13{\cdot}06$

3) $\frac{v}{d} = 188{\cdot}3$

0·	29·17	0·379	1·715	19·52
0·1667		0·688	1·406	
0·	29·58	0·543	1·551	18·56
0·1667		0·810	1·284	
0·	28·92	0·640	1·454	19·44
0·1667		0·901	1·193	
	$n = 29{\cdot}22$			$A = 19{\cdot}17$

Auch nach der Methode A lässt sich die umgekehrte Proportionalität von a und V dartun, falls nur die Einhaltung einer gleichbleibenden Bewegung des Wassers genügend berücksichtigt wird. Wir haben einen Versuch in der Weise ausgeführt, dass wir die Platten in einer metallenen Fassung an den Wänden eines grossen Becherglasses befestigt und in dem Becherglase 3000 cm³ Wasser rotieren liessen. Nachdem zwei Proben von je 50 cm³ zur Ermittelung von A entnommen worden sind, wurden aus dem Becherglase, ohne

die Bewegung der Lösung zu unterbrechen, 1400 cm³ herausgeschöpft und 1000 cm³ Chloroform nachgefüllt. In der zweiten Hälfte des Versuchs betrug also das Volumen gerade die Hälfte des ursprünglichen — 1500 cm³; dagegen ist die Masse der Lösung und also auch aller Wahrscheinlichkeit nach die Geschwindigkeit der Bewegung unverändert geblieben. Das Versuchsergebnis ist in der Tabelle X wiedergegeben.

TABELLE X.

t	n	$c.10^3$	$(C_0-c)10^3$	A.
1) $V = 3000$ cm³ H_2O;			$F = 24{\cdot}7$ cm²	
0·	4·83	0·	2·094	—
1·50	4·83	0·394	1·700	16·30
0·	4·83	0·394	1·700	—
1·75	4·83	0·664	1·430	16·81
2) $V = 1500$ cm³ $H_2O + 1000$ cm³ $CHCl_3$;				
0·	4·83	0·664	1·430	—
1·25	4·83	1·100	0·994	17·67
0·	4·83	1·100	0·994	—
2·75	4·83	1·650	0·444	17·21

A ist in beiden Hälften des Versuches konstant. a ist also dem Volum umgekehrt proportional.

Auf diese in manigfaltiger Weise ereichten Versuchsergebnisse fussend, haben wir in unseren Versuchsdaten das Volumen rechnerisch auf 1 cm³ reduziert und die Zahlenangabe für A nach der in II Teil gegebenen Gleichung (5) berechnet.

6. Die Giltigkeit des logarithmischen Gesetzes. Aus allen mitgeteilten Versuchen geht hervor, dass die logarithmische Gleichung den Auflösungsvorgang sehr genau wiedergibt. Da die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante $A = \frac{k}{s}$ ist, so ist das Bestehen der logarithmischen Gleichung an die Unveränderlichkeit von s geknüpft. Da die Diffusionschicht durch Adhäsionskräfte bedingt wird, so konnte vermutet werden, dass in konzentrierterer Lösung, wo die kapillare Differenz zwischen der Diffusionsschicht und

der übrigen Lösung vermindert wird, eine Änderung von s und folglich eine Abweichung von der logarithmischen Gleichung eintreten würde. Dies ist jedoch nicht der Fall. Das logarithmische Gesetz bleibt in den von uns untersuchten Fällen richtig bis zu Sättigungen, die ca. 90—95% der Sättigungskonzentration betragen. (vergl. Tabelle IV, 4 und auch Zeit. anorg. Ch. **35**, 36). Das strenge Obwalten der logarithmischen Gleichung bis zu den Sättigungskonzentrationen zeigt an, dass auch bei dieser Konzentration der Lösungsvorgang durch Diffusion in der unveränderten adhärierenden Diffusionsschicht vermittelt wird.

7. Bestimmung von Diffusionskoeffizienten durch Auflösungsgeschwindigkeitsmessungen. In unserer ersten Mitteilung haben wir schon darauf hingewiesen, dass auf Grund der Versuche über Auflösungsgeschwindigkeit sich eine Methode zur Ermittelung von Diffusionskoeffizienten ausarbeiten lassen wird. Aus der Proportionalität von A und k folgt ja unmittelbar, dass — gleiche Konvektion und gleiche Beschaffenheit der zu lösenden Oberflächen vorausgesetzt — sich die Diffusionskoeffizienten zweier Stoffe wie ihre Auflösungsgeschwindigkeitskonstanten verhalten. Also:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$k_1 = k_2 \frac{A_1}{A_2}$$

Diese Gleichung setzt uns in den Stand, Diffusionskoeffizienten nach den Auflösungskonstanten zu berechnen, wenn nur für einen Stoff der Diffusionskoeffizient k_2 bereits bekannt ist.

Die Schwierigkeit der Methode liegt ja erstens in der Feststellung, was als „gleiche Oberflächenbeschaffenheit“ anzunehmen ist. Wie früher erwähnt, haben Alabaster und Marienglas eine verschiedene Auflösungsgeschwindigkeit; dasselbe wurde von Erich Brunner auch z. B. für Benzoësäure — ob sie geschmolzen, ist ob mit Klebemitteln in Platten aufgeschmiert — festgestellt. In dieser Unsicherheit, was die Oberflächenbeschaffenheit anbetrifft, liegt wohl das grösste zu überwindende Übel der Methode. Nichtsdestoweniger können schon aus unseren ersten Messungen [1]) mit gewisser Sicherheit Diffusionskoeffizienten geschätzt werden. Wir haben z. B. nach der

[1]) Zeit. phys. Ch. 35, 283.

ersten Methode die Auflösungsgeschwindigkeit der Benzoësäure, der Phenylessig- und Phenylpropionsäure gemessen und für alle drei dieselbe Konstante $A = 10{\cdot}1$ gefunden. Bei denselben Konvektionsbedingungen ergab sich A für Marienglas $= 5{\cdot}3$. Da die rauhe Oberfläche der geschmolzenen Säuren nicht mit der des Marienglases, sondern jedenfalls viel eher mit der des mattierten Alabasters vergleichbar ist, so müssen wir die Zahl 5·3 für Marienglas auf den Alabasters umrechnen. Für Alabaster wird nämlich das $A = 5{\cdot}3 \times 2{\cdot}5 = 13{\cdot}3$ (s. Seite 25). Der Diffusionskoeffizient von $CaSO_4$ ist $k_{25^\circ} = 1{\cdot}45 \frac{cm^2}{Tag}$. Die Diffusionskoeffizienten der untersuchten Säuren ergeben sich zu

$$k'_{25^\circ} = \frac{1{\cdot}45 \times 10{\cdot}1}{13{\cdot}3} = 1{\cdot}10$$

Es liegen keine unmittelbaren Messungen dieser Zahl k' vor. Aus dem Diffusionskoeffizienten der Essigsäure und den Beweglichkeiten der Anionen $CH_3.COO$ und $C_6H_5.COO$ berechnet Erich Brunner (l. c. S. 31) für Benzoësäure das k'_{20° zu 0·75. Da die Diffusionskoeffizienten gewöhnlich für jeden Grad Temperaturerhöhung um ca. 10% wachsen, so ist die von E. Brunner ermittelte Zahl um 50% zu erhöhen: sie wird dann zu 1·12. Diese von E. Brunner berechnete Zahl steht mit der unsern 1·10 aus den Auflösungsgeschwindigkeitsmessungen gezogenen in bestem Einklang. Wir haben leider kein weiteres Vergleichsmaterial, um die Genauigkeit und Anwendbarkeit der Methode weiter zu verfolgen.

Aus der Gleichheit der A-Werte für alle drei homologen Säuren lässt sich nur noch folgern, dass ihre Diffusionskoeffizienten — und wegen des grossen Molekulargewichtes auch wohl ihre Anionenbeweglichkeiten — untereinander gleich sein müssen.

IV. Anhang.

Über die Auflösungsgeschwindigkeit des Arseniks.

Über die Auflösungsgeschwindigkeit des Arseniks sind von K. Drucker[1]) zwei Arbeiten publiziert worden, die auch uns bewogen haben, einige Versuche mit diesem Stoff auszuführen. In seiner Arbeit hatte Drucker konstatiert, dass 1) die Auflösungsgeschwin-

[1]) Zeit. phys. Ch. 36, 173 und 36, 693.

digkeit des As_2O_3 durch die Ionen H und OH katalytisch beschleunigt wird, 2) dass die Auflösungsgeschwindigkeit dieses Stoffes einen mit der Zeit linearen Verlauf habe. Diese Ergebnisse sprechen dafür, dass der Auflösungsvorgang des Arseniks mit den anderen untersuchten Fällen nicht analog ist und dass er nicht ausschliesslich durch Diffusion in der Diffusionsschicht bedingt wird, da die durch Unterschiede des osmotischen Druckes hervorgerufene Diffusion den katalytischen Einflüssen nicht unterliegen konnte[4]). Während in der Tat in den übrigen Fällen die Veränderungen des Molekularzustandes nur in einer Spaltung der neutralen Molekel in die Ionen bestanden haben, ist die Auflösung des Arseniks mit einer weitgehenden Hydratation verbunden; wie aus den Untersuchungen Zawidzkis[2]) und den unseren[3]) hervorgeht, besteht in der Arseniklösung eine einbasische, nur ein Verbindungsgewicht Arsen enthaltende Säure ($HAsO_2$ oder H_3AsO_3). Man sollte eigentlich nicht von einer Auflösungsgeschwindigkeit, sondern von einer Hydratationsgeschwindigkeit des Arseniks sprechen. Diese Hydratation kann aber, ohne den allgemeinen Gesetzen zu widersprechen, katalytischen Einflüssen wohl unterligen. Diese Meinung wurde auch schon implicite von Drucker vertreten[4]).

Die von uns mit Arsenik angestelten Versuche zielten darauf hin zu entscheiden: 1) ob die Hydratationsgeschwindigkeit des Arseniks von den Konvektionsbedingungen und folglich auch von der Dicke der Diffusionschicht H_1 beeinflust wird; 2) in welchem numerischen Verhältnis die Auflösungsgeschwindigkeitskonstante des Arseniks zu der der anderen Stoffe steht; 3) ob das logarithmische Gesetz in dem Falle des Arseniks wirklich seine Giltigkeit verliert.

Um mit den früheren Versuchen vergleichbare Zahlen zu erhalten, wurden bei der Auflösung keine Katalysatoren gebraucht, wodurch die Versuchsdauer stark vergrössert wird, was manche

[1]) Wir haben experimentell nachgewiesen (Zeit. f. anor. Ch. 28, 314), dass die Auflösungsgeschwindigkeit des Alabasters von der Schwefelsäure nicht katalysirt wird. Auch sind in der Laboratoriums- oder Techniks praxis keine katalytischen Beschleunigungen gewöhnlicher (diffusionsartigen) Auflösungsgeschwindigkeiten bekannt

[2]) Ber. Deut. Chem Gesell. 36, 1427.

[3]) Zeit. f. anor. Ch. J (1904)

[4]) Zeit. f. phys. Ch 36, 708.

Übelstände mit sich führt. Wir haben in diesen Versuchen ausschliesslich die Methode *C* angewendet. Um einer chemischen Wirkung zwischen den (besonders konzentrierteren) Arseniksäurelösungen und den Metallen (Messing, Eisen, Zink), aus denen verschiedene Teile des Apparates verfertigt sind, vorzubeugen, wurde das Innere des Apparates mit Schellack überzogen. Trotzdem sind die Konstanten *A* noch grossen Schwankungen unterworfen. Diese Schwankungen sind aller Warscheinlichkeit nach durch verschiedene katalytische Einflüsse (CO_2, Salzlösungen der Metalle(?)) bedingt. Für manche hier beabsichtigte Zwecke spielen diese Schwankungen jedoch nur eine untergeordnete Rolle. Als Versuchsmaterial diente altgeschmolzenes porzellanartiges Arsenik. Die Angaben beziehen sich deshalb auf die gewöhnliche kristallinische Arseniksmodifikation. Die Analyse der Arseniklösungen wurde durch Titrieren mit Jodlösung ausgeführt.

TABELLE XI.

$V = 1100$ cm³ $F = 56{\cdot}4$ cm² $r = 1{\cdot}0$ cm $d = 2{\cdot}85$ $C_0 . 10^3 = 20{\cdot}39$.

t	n	$c . 10^3$	$(C_0 - c) 10^3$	A.
		a) $\frac{v}{d} = 83{\cdot}7$		
0·	38·2	0·260	20·13	
3·25		0·294	20·096	0·008
0·	38·0	0·294	20·096	
4·00		0·357	20·033	0·015
	38·1			
		b) $\frac{v}{d} = 14{\cdot}9$		
0	6·7	0·00	20·39	
10		0·067	20·32	0·0068
0	6·8	0·067	20·32	
9		0·147	20·243	0·0077
0	6·8	0·147	20·243	
9		0·261	20·129	0·0110
	6·8			

Obgleich im ersten Teile des angeführten Versuches das Geschwindigkeitsgefälle 6 mal grösser als in dem zweiten ist, zeigen die

Auflösungsgeschwindigkeitskonstanten nur sehr geringe Unterschiede. In einem über Nacht ohne Konvektion gelassenen Versuche wurde dieselbe Auflösungskonstante wie in dem Falle einer Konvektion $\frac{v}{d} = 84$ gefunden. Die Auflösungsgeschwindigkeit des Arseniks wird also aller Wahrscheinlichkeit nach von der Konvektion fast gar nicht beeinflusst: der Lösungsvorgang des As_2O_3 ist also kein Diffusionsvorgang im Sinne der Nernst'schen Theorie.

In Anbetracht dessen können die A-Werte für Arsenik eigentlich mit den A-Werten für $CaSO_4$ nicht verglichen werden, da die ersten von der Konvektion unabhängig, — die letzteren dagegen von derselben stark beeinflusst werden. Berücksichtigt man jedoch nur die bei den angewandten Konvektionen für Alabaster erhaltenen A-Werte, so darf man schliessen, dass die Auflösungsgeschwindigkeit des Arseniks 300—1000 mal kleiner ist als die des Alabasters. Dieser Grössenordnungsunterschied zeigt deutlich, dass wir es hier mit einer ganz anderen Erscheinungsart zu tun haben.

Versuche über die Anwendbarkeit des logarithmischen Gesetzes auch auf den Lösungsvorgang des Arseniks ergaben bis jetzt keine entscheidenden Resultate. Konzentriertere Arseniklösungen lassen sich nicht in unserem metallenen Apparate sicher handhaben: eine für diesen Zweck brauchbare Modifizierung der Versuchsanordnung wird in Sicht gehalten. Aus einigen vorläufigen Versuchen werden wir jedoch geneigt sein, das ursprüngliche Resultat Drucker's, welches von ihm aus uns unbekannten Gründen später angezweifelt worden ist, zu bestätigen. Es scheint nämlich in der Tat ein linearer Verlauf der Auflösungsgeschwindigkeit vorzuliegen. Auch muss hervorgehoben werden, dass, da die Auflösung des Arseniks, wie sicher nachgewiesen war, kein Diffussionsvorgang ist, das logarithmische Gesetz in diesem Falle theoretisch nicht mehr vorausgesetzt werden darf.

V. Zusammenfassung der Resultate.

1) Es sind einige Methoden zur Messung der Auflösungsgeschwindigkeit angegeben, aus denen hervorgeht, dass unter verschiedenen Bedingungen die Auflösungsgeschwindigkeit eine lineare Funktion der Umdrehungszahl des Rührwerkes ist. Als identische Konvektionsbedingungen sind diejenigen anzusehen, wo das mittlere Geschwin-

digkeitsgefälle $\frac{v}{d}$ des rotierenden Wassers gleich ist. In sämtlichen Versuchen über Auflösungsgeschwidnigkeit ist deshalb dies Geschwindigkeitsgefälle stets zu berücksichtigen.

2) Es wurde bestätigt, dass die Auflösungsgeschwindigkeit (nach der Gleichung 3a Seite 5) und die Auflösungskonstante A von Volumen unabhängig, die Konstante a (Seite 2) aber dem Volumen umgekehrt proportional ist

3) Es wurde der Einfluss der Gipsart auf die Auflösungsgeschwindigkeit experimentell ermittelt.

4) Das logarithmische Gesetz fand sich bis zu den Konzentrationen gleich ca. 95% der der Sättigung bestätigt.

5) Es wurde die Dicke der Diffussionsschicht in sämtlichen untersuchten Fällen berechnet. Sie war je nach den Konvektionsbedingungen in den Grenzen zwischen $5\,\mu$ bis über $100\,\mu$ begriffen.

6) Es wurde theoretisch und im Falle der Benzoësäure auch experimentell die Möglichkeit der Bestimmung von Diffusionskoeffizienten k durch Auflösungsgeschwindigkeitsmessungen nachgewiesen.

7) Der Lösungsvorgang des Arseniks ist kein Diffusionsvorgang, da seine Geschwindigkeit von den Konvektionsbedingungen fast gar nicht beeinflusst wird und sie sich auch als ca. 1000 mal kleiner als die Auflösungsgeschwindigkeiten aller anderen untersuchten Stoffe ergibt.

---

41. M. S. ZAREMBA m. c. **O pewnej postaci doskonalszej teoryi relaxacyi.** ***(Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation).***

I. Introduction.

Nr. 1. J'ai développé dans mon mémoire „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité“ [1]), une théorie qui comprend comme cas-limite la théorie classique et qui nous fait concevoir les propriétés d'un fluide visqueux comme tenant, en quelque sorte, le milieu entre celles d'un fluide parfait dénué de viscosité

[1]) Bulletin de l'Académie de Cracovie, Juin 1903.

et celle d'un solide isotrope et parfaitement élastique [1]). J'appellerai cette théorie la théorie de la relaxation. Dans le mode d'exposition que j'ai adopté, l'état de tension intérieure d'un fluide visqueux en mouvement devrait pouvoir être représenté, à chaque instant, par celui d'un solide élastique et isotrope lequel aurait éprouvé une déformation convenable. Or cela peut n'être pas possible: en effet les six composantes de la déformation d'un milieu déformable sont liées entre elles par un certain système d'équations différentielles [2]) et il en résulte que les six fonctions bien connues qui caractérisent l'état de tension qui règne dans un solide élastique et isotrope qui a subi une déformation ne peuvent pas être données arbitrairement a priori.

Abstraction faite de la circonstance précédente, la théorie que j'ai développée dans le mémoire que je viens de rappeler implique la restriction suivante: l'espace étant rapporté à un système de coordonnées rectangulaires (x, y, z), si l'on désigne par u, v, w les composantes parallèles aux axes de la vitesse de la particule du fluide qui, à l'époque t, se trouve au point (x, y, z), les dérivées partielles du premier ordre des fonctions u, v, w par rapport aux variables x, y, z doivent être très petites. Cela tient aux termes que l'on a négligés en établissant les équations (26) p. 395 du mémoire cité plus haut. équations sur le caractère approximatif desquelles je me suis d'ailleurs arrêté avec insistance. Je me propose maintenant de présenter la théorie de la relaxation de façon à éviter la difficulté signalée plus haut en m'affranchissant en outre de la restriction relative aux dérivées partielles des fonctions u, v, w J'appliquerai ensuite. à la fin du mémoire, les nouvelles équations que j'aurai établies au problème dont je me suis occupé déjà dans mon travail „Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène [3]).

[1]) M. Natanson, en s'inspirant d'une idée de Poisson reprise par Maxwell, a tenté, avant moi, de développer une théorie analogue, mais cette tentative doit être considérée comme manquée. Voir à ce sujet mon mémoire cité plus haut ainsi que ma Note „Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité" (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Février 1903).

[2]) Voir E et F. Cosserat „Sur la théorie de l'élasticité". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse T. X, année 1893, p. I, 36.

[3]) Bulletin de l'Académie de Cracovie, Juin 1903.

II. Forces intérieures dans un fluide visqueux. Equations du mouvement.

Nr. 2. Considérons un fluide quelconque (F) animé d'un mouvement quelconque et rapportons l'espace à un système de coordonnées rectangulaires (x, y, z). L'état de tension régnant dans le fluide en un point x, y, z à une époque t, sera caractérisé par les six quantités bien connues que nous désignerons, comme on le fait souvent, par

$$(1) \qquad p_{xx}, \quad p_{yy}, \quad p_{zz}, \quad p_{yz}, \quad p_{zx}, \quad p_{xy}.$$

Considérons pour un moment les quantités précédentes comme se rapportant à un élément matériel déterminé du fluide (F); elles se présenteront alors comme des fonctions de la seule variable t. Désignons dans ces conditions par

$$(2) \qquad \frac{dp_{xx}}{dt}, \quad \frac{dp_{yy}}{dt}, \quad \frac{dp_{zz}}{dt}, \quad \frac{dp_{yz}}{dt}, \quad \frac{dp_{zx}}{dt}, \quad \frac{dp_{xy}}{dt}$$

les dérivées de ces fonctions et proposons-nous d'exprimer ces dérivées en fonction des quantités (1) et des éléments définissant la nature du mouvement du fluide. Nous allons voir qu'il suffit de particulariser dans une certaine mesure le problème précédent tout en lui conservant encore une grande généralité et d'adopter une hypothèse très générale pour arriver à une solution déterminée.

Désignons par u, v, w les composantes parallèles aux axes de la vitesse du fluide (F) en un point (x, y, z) à l'époque t. Pendant le temps qui s'écoule de t à $t+dt$, l'élément matériel M du fluide, considéré plus haut, éprouve une déformation homogène infiniment petite laquelle sera identique à celle que définissent les formules suivantes:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} X' &= X + u\,dt + (u_1 X + u_2 Y + u_3 Z)\,dt \\ Y' &= Y + v\,dt + (v_1 X + v_2 Y + v_3 Z)\,dt \\ Z' &= Z + w\,dt + (w_1 X + w_2 Y + w_3 Z)\,dt \end{aligned} \right.$$

où, pour abréger l'écriture, l'on a fait coïncider l'origine des coordonnées (X, Y, Z) avec la position du centre de gravité de l'élément matériel M à l'époque t et où l'on a représenté par

$$(4) \qquad \left| \begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{matrix} \right.$$

le tableau des valeurs des quantités

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial z} \end{array}\right\} \tag{5}$$

pour l'élément matériel M à l'époque t. Cela posé revenons aux quantités (2). Nous admettrons que les quantités (2) ne dépendent que des éléments suivants: 1-o des quantités qui caractérisent l'état physique du fluide dans le voisinage de l'élément matériel M à l'époque t à savoir: les six quantités (1), la densité ϱ et la température τ. 2-o des éléments qui définissent la déformation éprouvée par le fluide dans le voisinage de l'élément M pendant le temps qui s'écoule de t à $t + dt$; abstraction faite des composantes u, v, w de la vitesse de translation du fluide dans le voisinage de l'élément M, laquelle ne peut avoir aucune influence sur les quantités (2), les éléments en question ne sont autre chose que les neuf quantités (4). Au lieu de considérer ces neuf quantités, nous allons envisager les neuf quantités définies par les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = u_1, \quad a_2 = v_2, \quad a_3 = w_3 \\ c_1 = v_3 + w_2; \quad c_2 = w_1 + u_3; \quad c_3 = u_2 + v_1. \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$q_1 = \tfrac{1}{2}(w_2 - v_3); \quad q_2 = \tfrac{1}{2}(u_3 - w_1); \quad q_3 = \tfrac{1}{2}(v_1 - u_2). \tag{7}$$

Pour l'intelligence des considérations qui vont suivre il ne faut pas perdre de vue que les quantités x, y, z, t et par conséquent aussi les quantités (6) et (7) devront être regardées comme constantes. A l'effet d'éviter tout malentendu nous représenterons les coordonnées courantes par X, Y, Z et une époque variable par t'. Cela posé introduisons, à côté du système de coordonnées (x, y, z), un second système de coordonnées (x', y', z'), mobile par rapport au système (x, y, z). Nous supposerons que l'origine du système (x', y', z') coïncide constamment avec celle du système (x, y, z); nous supposerons en outre qu'à l'époque t les deux systèmes de coordonnées sont confondus et que le système (x', y', z') est animé, par rapport au système (x, y, z), d'un mouvement de rotation dont la vitesse à l'époque t, a q_1, q_2, q_3 pour composantes parallèles aux axes. Convenons de distinguer par un accent les éléments relatifs

au système (x', y', z') des éléments analogues se rapportant au système (x, y, z). Cela posé cherchons les expressions des quantités:

$$(8) \qquad \frac{dp_{x'x'}}{dt}, \quad \frac{dp_{y'y'}}{dt}, \quad \frac{dp_{z'z'}}{dt}, \quad \frac{dp_{y'z'}}{dt}, \quad \frac{dp_{z'x'}}{dt}, \quad \frac{dp_{x'y'}}{dt}.$$

Il résulte de la définition du système de coordonnées (x', y', z') que les coordonnées courantes X', Y', Z', dans le système (x', y', z') seront liées à l'époque t aux coordonnées courantes X, Y, Z dans le système (x, y, z) par les relations suivantes

$$X' = X, \quad Y' = X, \quad Z' = Z,$$

et que l'on aura, en outre, à l'époque considérée t

$$(9) \qquad p_{x'x'} = p_{xx}; \quad p_{y'z'} = p_{yz} \quad \text{etc.}$$

On aura enfin, toujours à l'époque t, encore les relations que voici:

$$\begin{aligned} u' &= u - q_2 Z + q_3 Y \\ v' &= v - q_3 X + q_1 Z \\ w' &= w - q_1 Y + q_2 X. \end{aligned}$$

Ces relations donnent:

$$\frac{\partial u'}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial X}; \quad \frac{\partial v'}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial Y}; \quad \frac{\partial w'}{\partial Z} = \frac{\partial w}{\partial Z};$$

$$\frac{\partial v'}{\partial Z} + \frac{\partial w'}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial X} + \frac{\partial u'}{\partial Z} = \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial Y} + \frac{\partial v'}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial Y} - \frac{\partial v'}{\partial Z} = \frac{\partial w}{\partial Y} - \frac{\partial v}{\partial Z} - 2q_1$$

$$\frac{\partial u'}{\partial Z} - \frac{\partial w'}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial Z} - \frac{\partial w}{\partial X} - 2q_2$$

$$\frac{\partial v'}{\partial X} - \frac{\partial u'}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} - 2q_3,$$

lesquelles, pour

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z,$$

se réduisent aux suivantes:

$$(10) \qquad a_i' = a_i; \quad c_i' = c_i; \quad q_i' = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

J'observe maintenant que les quantités q_1, q_2, q_3 déterminent la vitesse de rotation, à l'époque t, du système formé par le fluide et le système de coordonnées mobile (x', y', z'). Il résulte de là que les quantités (8) ne dépendront pas des quantités q_1, q_2, q_3; elles ne seront donc fonctions que de la température $\tilde{t}$ et de la densité ϱ du fluide (F) au point (x, y, z) ainsi que des quantités $p_{x'x'}, \ldots p_{y'z'}, \ldots$, a_i' et c_i'. Si les quantités

$$\left.\begin{matrix} p_{x'x'}, & p_{y'y'}, & p_{z'z'}, & p_{y'z'}, & p_{z'x'}, & p_{x'y'} \\ a_1', & a_2', & a_3', & c_1', & c_2', & c_3', \end{matrix}\right\} \tag{11}$$

sont assez petites, les quantités (8) pourront être regardées comme des fonctions linéaires des quantités (11) à coefficients, fonctions des quantités ϱ et $\tilde{t}$. C'est l'hypothèse que nous allons adopter. D'après cela nous serions conduits à introduire 78 coefficients fonctions de ϱ et $\tilde{t}$. En réalité, le nombre de ces coefficients se réduit à 5. C'est ce qui résulte, comme nous allons le montrer, de ce fait qu'un fluide est une substance isotrope.

Nr. 3. Pour qu'un système d'expressions des quantités (8) en fonctions des quantités (11) convienne à une substance isotrope, il est nécessaire et suffisant que ce système d'expressions conserve sa forme sans aucun changement au passage du système de coordonnées (x', y', z') à tout autre système de coordonnées rectangulaires invariablement lié au système (x', y', z'). Il est évident que nous n'avons pas à envisager des changements de coordonnées se réduisant à une simple translation parce qu'un pareil changement d'axes n'affecterait en rien les quantités (8) et (11) et ne nous apprendrait par conséquent rien sur la nature des relations qui lient ces quantités. Nous pourrons donc, dans ce qui va suivre, supposer que l'origine du nouveau système coïncide avec celle du système (x', y', z'). Dans ces conditions, les quantités (8), les quantités

$$p_{x'x'}, \quad p_{y'y'}, \quad p_{z'z'}, \quad p_{y'z'}, \quad p_{z'x'}, \quad p_{x'y'} \tag{12}$$

et les quantités

$$2a_1', \quad 2a_2', \quad 2a_3', \quad c_1', \quad c_2', \quad c_3', \tag{13}$$

se transformeront, comme on le sait, au passage du système (x', y', z') au nouveau système, suivant une loi identique à celle suivant laquelle se transformeraient les coefficients P_1, P_2, P_3, N_1, N_2, N_3 de l'équation de la Quadrique:

$$P_1 X'^2 + P_2 Y'^2 + P_3 Z'^2 + 2 N_1 Y' Z' + 2 N_2 Z' X' + 2 N_3 X' Y' = 1.$$

Cela posé considérons le changement d'axes défini par les formules:

$$x_1 = y' ; \quad y_1 = z' ; \quad z_1 = x'$$

il nous apprendra, on le vérifiera très aisément, que les expressions des quantités

$$\frac{dp_{x'y'}}{dt}, \quad \frac{dp_{z'x'}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dp_{x'z'}}{dt}, \quad \frac{dp_{x'y'}}{dt}$$

se déduisent de celles des quantités:

$$\frac{dp_{x'x'}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dp_{y'z'}}{dt}$$

respectivement par voie de permutations circulaires des lettres x', y', z' et des nombres *1, 2, 3* dans les indices des quantités (11). Observons maintenant qu'un changement d'axes de coordonnées qui revient au changement de x' en $-x'$, de y' en $-y'$ ou de z' en $-z'$ n'affecte aucune des quantités

$$p_{x'x'}, \quad p_{y'y'}, \quad p_{z'z'}, \quad a_1', \quad a_2', \quad a_3', \quad \frac{dp_{x'x'}}{dt}, \quad \frac{dp_{y'y'}}{dt}, \quad \frac{dp_{z'z'}}{dt}$$

et entraine un simple changement de signe de deux quantités dans chacun de trois systèmes

$$\begin{array}{lll} p_{y'z'}, & p_{z'x'}, & p_{x'y'} ; \\ c_1', & c_2', & c_3' ; \\ \dfrac{dp_{y'z'}}{dt}, & \dfrac{dp_{z'x'}}{dt}, & \dfrac{dp_{x'y'}}{dt} \end{array}$$

en laissant sans aucun changement un des trois éléments dans chacun des trois systèmes précédents. On en conclura aisément 1-o qu'aucune des quantités

$$p_{y'z'}, \quad p_{z'x'}, \quad p_{x'y'}, \quad c_1', \quad c_2', \quad c_3'$$

ne peut entrer dans l'expression de $\frac{dp_{x'x'}}{dt}$, 2-o que la quantité $\frac{dp_{y'z'}}{dt}$ ne peut dépendre d'aucune des quantités

$$p_{x'x'}, \quad p_{y'y'}, \quad p_{z'z'}, \quad a_1', \quad a_2', \quad a_3', \quad p_{zz}', \quad p_{xy}', \quad c_2' \quad \text{et} \quad c_3',$$

et qu'elle doit être une fonction homogène des seules deux quantités du système (11) dont elle peut dépendre.

D'après ce qui précède nous aurions:

$$\frac{dp_{x'x'}}{dt} = Aa_1' + A'a_2' + A''a_3' + Bp_{x'x'} + B'p_{y'y'} + B''p_{z'z'} + C, \quad (14)$$

$$\frac{dp_{y'z'}}{dt} = -\mu c_1' - \frac{p_{y'z'}}{T} \quad (15)$$

où les lettres A, A', A'', B, B', B'', C, μ et T représentent certaines fonctions de la densité ϱ et de la température τ du fluide au point (x, y, z) à l'époque t. Considérons maintenant un changement d'axes de coordonnées qui reviendrait au changement de y' en z' et de z' en y'. Pour qu'un tel changement d'axes n'entraîne pas un changement de forme de l'expression de $\frac{dp_{x'x'}}{dt}$, il faut et il suffit que l'on ait:

$$A' = A''; \quad B' = B''.$$

Par conséquent, si l'on pose:

$$A - A' = m, \quad B - B' = n, \quad A' = -\lambda, \quad B' = -\frac{1}{3T'}$$

la formule (14) prendra la forme suivante:

$$\frac{dp_{x'x'}}{dt} = ma_1' - \lambda(a_1' + a_2' + a_3') + np_{x'x'} - \frac{p_{x'x'} + p_{y'y'} + p_{z'z'}}{3T'} + C. \quad (16)$$

Considérons maintenant un changement d'axes équivalent à une rotation quelconque du système (x', y', z').

Désignons par ξ, η, ζ les nouveaux axes et par

$$\begin{matrix} p_{\xi\xi}, & p_{\eta\eta}, & p_{\zeta\zeta}, & p_{\eta\zeta}, & p_{\zeta\xi}, & p_{\xi\eta}, \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, \end{matrix}$$

les valeurs correspondantes des quantités (11). Nous devrions trouver:

$$\frac{dp_{\xi\xi}}{dt} = m\alpha_1 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + np_{\xi\xi} - \frac{p_{\xi\xi} + p_{\eta\eta} + p_{\zeta\zeta}}{3T'} + C. \quad (17)$$

D'autre part, si l'on désigne par l, l', l'' les cosinus directeurs de l'axe des ξ, on trouve en s'appuyant sur les équations (15) et (16):

$$\frac{dp_{\xi\xi}}{dt} = m\alpha_1 - \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + np_{\xi\xi} - \frac{p_{\xi\xi} + p_{\eta\eta} + p_{\zeta\zeta}}{3T'} + C -$$

$$- 2\left(\mu + \frac{m}{2}\right)\{c_1' l' l'' + c_2' l'' l + c_3' l l'\} -$$

$$- 2\left(\frac{1}{T} + n\right)\{p_{y'z'} l' l'' + p_{z'x'} l'' l + p_{x'y'} l l'\}.$$

Pour que la formule précédente soit identique à la formule (17), il faut et il suffit que l'on ait

$$m = -2\mu\,; \quad n = -\frac{1}{T}.$$

On voit donc que les formules (14) et (15) prennent finalement la forme suivante:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_{x'x'}}{dt} &= -2\mu\, a_1' - \lambda\,(a_1' + a_2' + a_3') - \\ &\quad - \frac{p_{x'x'}}{T} - \frac{p_{x'x'} + p_{y'y'} + p_{z'z'}}{3T} + C \\ \frac{dp_{y'z'}}{dt} &= -\mu\, c_1' - \frac{p_{y'z'}}{T} \end{aligned} \right.$$

laquelle, on le vérifiera aisément, se conserve sans aucun changement quelle soit l'orientation des axes.

Nr. 4. Il nous faut revenir maintenant au système de coordonnées primitif (x, y, z). Soient

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, x' + \beta\, y' + \gamma\, z' \\ y &= \alpha_1\, x' + \beta_1\, y' + \gamma_1\, z' \\ z &= \alpha_2\, x' + \beta_2\, y' + \gamma_2\, z', \end{aligned}$$

les formules de transformation du système (x, y, z) au système (x', y', z'). D'après les conventions faites au Nr. 2, les coefficients dans les formules précédentes doivent être considérés comme des fonctions de la variable t', lesquelles pour $t' = t$ prennent les valeurs définies par les équations suivantes:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha = \beta_1 = \gamma_2 &= 1\,. \\ \beta = \gamma = \gamma_1 = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 &= 0\,. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs:

$$p_{xx} = p_{x'x'}\,\alpha^2 + p_{y'y'}\,\beta^2 + p_{z'z'}\,\gamma^2 + 2\,p_{y'z'}\,\beta\,\gamma + 2\,p_{z'x'}\,\gamma\,\alpha + 2\,p_{x'y'}\,\alpha\,\beta$$

$$\begin{aligned} p_{yz} = p_{x'x'}\,\alpha_1\,\alpha_2 &+ p_{y'y'}\,\beta_1\,\beta_2 + p_{z'z'}\,\gamma_1\,\gamma_2 + p_{y'z'}\,(\beta_1\,\gamma_2 + \gamma_1\,\beta_2) + \\ &+ p_{z'x'}\,(\gamma_1\,\alpha_2 + \alpha_1\,\gamma_2) + p_{x'y'}\,(\alpha_1\,\beta_2 + \beta_1\,\alpha_2). \end{aligned}$$

Différentions ces formules par rapport à t', faisons ensuite $t' = t$ et reportons-nous aux relations (9) et (19). Il viendra:

$$\frac{dp_{xx}}{dt} = \frac{dp_{x'x'}}{dt} + 2\,p_{xy}\,\frac{d\beta}{dt} + 2\,p_{xz}\,\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{dp_{yz}}{dt} = \frac{dp_{y'z'}}{dt} + p_{y'y'}\,\frac{d\beta_2}{dt} + p_{z'z'}\,\frac{d\gamma_1}{dt} + p_{z'x'}\,\frac{d\alpha_1}{dt} + p_{x'y'}\,\frac{d\alpha_2}{dt}.$$

Il résulte d'ailleurs de la nature du mouvement attribué au système (x', y', z') que l'on a:

$$\frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{d\gamma_1}{dt} = q_1$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d\alpha_2}{dt} = q_2$$
$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{d\beta}{dt} = q_3,$$

il viendra donc:

$$\frac{dp_{xx}}{dt} = \frac{dp_{x'x'}}{dt} - 2\,q_2\,p_{z'x'} - 2\,q_3\,p_{x'y'},$$
$$\frac{dp_{yz}}{dt} = \frac{dp_{y'z'}}{dt} + q_1\,(p_{y'y'} - p_{z'z'}) + q_3\,p_{z'x'} - q_2\,p_{x'y'}$$

d'où, en vertu des formules (18) et des relations (9) et (10):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dt} &= -2\mu\,a_1 - \lambda\,(a_1 + a_2 + a_3) - \frac{p_{xx}}{T} - \\ &\qquad \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3T'} + C + 2\,(q_2\,p_{zx} - q_3\,p_{xy}) \\ \frac{dp_{yz}}{dt} &= -\mu\,c_1 - \frac{p_{yz}}{T} + q_1\,(p_{yy} - p_{zz}) + q_3\,p_{zx} - q_2\,p_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Nr. 5. Le système formé par les équations (20) et celles qui s'en déduisent par voie de permutation circulaire des lettres x, y, z et des nombres *1, 2, 3* dans les indices, ont la propriété de conserver leur forme non seulement quand on passe du système de coordonnées (x, y, z) à un autre système de coordonnées rectangulaires ayant une position quelconque par rapport au système (x, y, z) mais encore quand le nouveau système de coordonnées rectangulaires est animé d'un mouvement quelconque par rapport au système (x, y, z). Cela résulte de la manière dont elles ont été établies et c'est ce qu'il serait aisé de vérifier au moyen d'un calcul direct. C'est là une propriété que doit avoir tout système d'équations exprimant les relations qui existent entre les forces intérieures dans une substance et les circonstances de son mouvement.

Examinons de plus près la nature des lois physiques qu'expriment les équations que nous avons obtenues.

Supposons qu'à partir d'une certaine époque t_0 tout mouvement

ultérieur du fluide et tout changement de distribution des températures dans son sein aient été supprimés. Les équations (20) et celles qui s'en déduisent par voie de permutations circulaires nous donneront:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dt} &= -\frac{p_{xx}}{T} - \frac{p_m}{T'} + C \\ \frac{dp_{yy}}{dt} &= -\frac{p_{yy}}{T} - \frac{p_m}{T'} + C \\ \frac{dp_{zz}}{dt} &= -\frac{p_{zz}}{T} - \frac{p_m}{T'} + C \\ \frac{dp_{yz}}{dt} &= -\frac{p_{yz}}{T} \\ \frac{dp_{zx}}{dt} &= -\frac{p_{zx}}{T} \\ \frac{dp_{xy}}{dt} &= -\frac{p_{xy}}{T}\,. \end{aligned}\right.$$

en posant:

$$(22)\qquad 3p_m = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}.$$

Désignons par $p_{xx}^{(0)}$, $p_{yz}^{(0)}$ etc. les valeurs des quantités p_{xx}, p_{yz} etc. à l'époque t_0 et soit

$$3p_{zz}^{(0)} = p_{yy}^{(0)} + p_{xx}^{(0)} + p_m^{(0)}.$$

Les trois dernières équations du système (21) donnent

$$(23)\qquad p_{yz} = p_{yz}^{(0)} e^{\frac{t-t_0}{T}}\;;\quad p_{zx} = p_{zx}^{(0)} e^{-\frac{t-t_0}{T}}\;;\quad p_{xy} = p_{xy}^{(0)} e^{-\frac{t-t_0}{T}}$$

Ces équations montrent que l'on doit avoir:

$$(24)\qquad \frac{1}{T} \geqq 0$$

car autrement les quantités p_{yz} etc. croîtraient indéfiniment à partir de l'époque t_0 ce qui évidemment est inadmissible.

Ajoutons membre à membre les trois premières équations du systéme (21) et posons:

$$(25)\qquad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T'}.$$

il viendra:

$$\frac{dp_m}{dt} = -\frac{p_m}{T_1} + C. \tag{26}$$

Examinons d'abord le cas particulier

$$\frac{1}{T_1} = 0. \tag{27}$$

Nous aurions alors, en vertu de l'équation (26)

$$p_m = p_m^{(0)} e^{C(t - t_0)}.$$

Cette équation nous apprend que l'on doit avoir $C = 0$ car autrement, à partir de l'époque t_0, la quantité p_m croîtrait indéfiniment ou tendrait vers zéro suivant le signe de C; or aucune de ces hypothèse n'est admissible.

Il résulte de là qu'il est permis de poser dans tous les cas

$$C = \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right) p.$$

en désignant par p une quantité finie, et que, par conséquent, les trois premières équations du système (21) peuvent, dans tous les cas, être présentées sous la forme suivante:

$$\frac{dp_{xx}}{dt} = -\frac{p_{xx} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'}$$

$$\frac{dp_{yy}}{dt} = -\frac{p_{yy} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'}$$

$$\frac{dp_{zz}}{dt} = -\frac{p_{zz} - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'}.$$

L'intégration de ces équations donne:

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} - p &= (p_m^{(0)} - p)\, e^{-\frac{t-t_0}{T_1}} + (p_{xx}^{(0)} - p_m^{(0)})\, e^{-\frac{t-t_0}{T}} \\
p_{yy} - p &= (p_m^{(0)} - p)\, e^{-\frac{t-t_0}{T_1}} + (p_{yy}^{(0)} - p_m^{(0)})\, e^{-\frac{t-t_0}{T}} \\
p_{zz} - p &= (p_m^{(0)} - p)\, e^{-\frac{t-t_0}{T_1}} + (p_{zz}^{(0)} - p_m^{(0)})\, e^{-\frac{t-t_0}{T}}.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Joignons à ces équations l'équation suivante:

$$p_m - p = (p_m^{(0)} - p)\, e^{-\frac{t-t_0}{T_1}}. \tag{29}$$

Cette équation nous apprend que l'on doit avoir

$$\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}=\frac{1}{T_1}\geqq 0, \tag{30}$$

sans quoi, à partir de l'époque t_0, p_m croîtrait indéfiniment ce qui est impossible. Les inégalités (24) et (30) ayant lieu, il résulte des équations (28) que les quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} tendent vers une limite commune p. Il est aisé de voir quelle est la signification physique de la quantité p: c'est la pression hydrostatique du fluide (F) qui correspond à la densité ϱ et à la température τ du fluide au point auquel se rapportent les équations (23) et (28); elle satisfait donc à l'équation caractéristique

$$F(p,\ \varrho,\ \tau)=0 \tag{31}$$

du fluide considéré.

Nous pouvons résumer les résultats acquis jusqu'à présent de la manière suivante: les vues théoriques que nous avons adoptées conduisent à admettre que si, à partir d'une certaine époque t_0, tout mouvement ultérieur du fluide et tout changement ultérieur de la distribution des températures dans son sein étaient supprimés, il se produirait, en chaque point du fluide, le phénomène suivant: les quantités p_{yz}, p_{zx} et p_{xy} tendraient vers zéro tandis que les quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} tendraient vers une limite commune p laquelle ne serait autre chose que la pression hydrostatique du fluide correspondant à la densité ϱ et à la température τ au point considéré; nous désignerons le phénomène précédent par le terme de relaxation. La marche de la relaxation serait déterminée par les quantités T et T' où, ce qui revient au même par les quantités T et T_1, la quantité T_1 étant définie au moyen de l'équation (25); la quantité T caractériserait la loi suivant laquelle les efforts tranchants tendraient vers zéro et la quantité T_1 celle suivant laquelle la pression normale moyenne p_m tendrait vers p. Les dimensions de chacune des quantités T et T_1 étant celles d'une durée nous pouvons appeler: T — temps de la relaxation de la rigidité; T_1 — celui de la pression normale moyenne. Enfin la forme définitive des relations entre les forces intérieures et les circonstances du mouvement du fluide serait la suivante:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_{xx}}{dt} &= -2\mu a_1 - \lambda\tilde{\omega} - \frac{p_{xx}-p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} + 2(q_2 p_{zx} - q_3 p_{xy}) \\
\frac{dp_{yy}}{dt} &= -2\mu a_2 - \lambda\tilde{\omega} - \frac{p_{yy}-p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} + 2(q_3 p_{xy} - q_1 p_{yz}) \\
\frac{dp_{zz}}{dt} &= -2\mu a_3 - \lambda\tilde{\omega} - \frac{p_{zz}-p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} + 2(q_1 p_{yz} - q_2 p_{zx}) \\
\frac{dp_{yz}}{dt} &= -\mu c_1 - \frac{p_{yz}}{T} + q_1(p_{yy} - p_{zz}) + q_3 p_{zx} - q_2 p_{xy} \\
\frac{dp_{zx}}{dt} &= -\mu c_2 - \frac{p_{zx}}{T} + q_2(p_{zz} - p_{xx}) + q_1 p_{xy} - q_3 p_{yz} \\
\frac{dp_{xy}}{dt} &= -\mu c_3 - \frac{p_{xy}}{T} + q_3(p_{xx} - p_{yy}) + q_2 p_{yz} - q_1 p_{zx}\,;
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

où l'on a posé

$$\left.\begin{aligned}
p_m &= \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} \\
\tilde{\omega} &= a_1 + a_2 + a_3\,.
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Les équations (32) contiennent, comme nous l'avions annoncé, 5 fonctions de la densité ϱ et de la température $\tilde{t}$ du fluide, dépendant uniquement de la nature de celui-ci, à savoir μ, λ, T, T' et p. La quantité p, rappelons-le, est la pression hydrostatique du fluide correspondant à la densité et à la température du fluide au point (x, y, z) à l'époque t; quand aux fonctions T et T' elles ont la signification physique déterminée plus haut et elles satisfont aux inégalités (24) et (30). Il nous reste à déterminer la signification physique des quantités λ et μ et à nous assurer s'il n'est pas possible d'indiquer des inégalités qu'elles devraient vérifier, au moins probablement, dans tous les cas. A cet effet supposons qu'à une certaine époque t, la vitesse de déformation du fluide soit assez rapide pour qu'il soit permis de négliger, dans les équations (32) les termes contenant $\frac{1}{T}$ ou $\frac{1}{T'}$ en facteur; nos équations donneraient alors pour les quantités (2) des expressions qui ne différeraient pas de celles que l'on aurait obtenues dans le cas où le fluide (F) serait remplacé par un solide isotrope et parfaitement élastique dont les propriétés élastiques seraient caractérisées, dans les notations adoptées par M. Appell[1]), précisément par les quantités λ et μ. Il est donc

[1]) Traité de Mécanique rationnelle T. III.

permis de supposer que les inégalités:

$$(34) \qquad \begin{cases} \mu > 0 \\ 3\lambda + 2\mu > 0 \end{cases}$$

probables dans le cas d'un solide élastique, devront être aussi considérées comme telles dans le cas de la théorie actuelle.

A la vérité les formules déduites des formules (32) en négligeant les termes contenant en facteur $\frac{1}{T}$ ou $\frac{1}{T'}$ ne seraient pas identiques à celles que l'on obtiendrait en différentiant par rapport à t les formules classiques de la théorie de l'élasticité: elles en différeraient par les termes en q_1, q_2, q_3 mais cela n'infirme en rien ce que nous avons dit plus haut parce que le désaccord précédent tient à ce fait que les formules classiques de la théorie de l'élasticité ne sont pas valables sous la condition unique que la déformation proprement dite soit extrêmement petite, c'est-à-dire que le rapport des distances de deux éléments matériels quelconques, infiniment voisins, avant et après la déformation, soit toujours très voisin de l'unité: il faut encore, que les changements d'orientation des éléments linéaires du corps considéré soient très petits; tout désaccord disparait quand on remplace les formules ordinaires par des formules valables même lorsque la première des deux conditions précédentes est seule vérifiée. On trouvera dans l'excellent mémoire de MM. Eugène et François Cosserat:[1]) „Sur la théorie de l'Elasticité" tous les éléments voulus pour vérifier ce que nous venons de dire.

D'après ce qui précède, l'état instantané du fluide en un point quelconque M est absolument analogue à celui qui subsisterait dans toute l'étendue d'un corps (C) élastique et isotrope, aux coefficients d'élasticité λ et μ, lequel aurait éprouvé une déformation homogène dont les composantes ε_i^*, γ_i^* $(i = 1, 2, 3)$ seraient déterminées au moyen des équations suivantes:

$$(35) \qquad \begin{cases} -2\mu\varepsilon_1^* - \lambda(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*) = p_{xx} \\ -2\mu\varepsilon_2^* - \lambda(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*) = p_{yy} \\ -2\mu\varepsilon_3^* - \lambda(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*) = p_{zz} \\ -\mu\gamma_1^* = p_{yz}; \qquad \mu\gamma_2^* = p_{zx}; \quad -\mu\gamma_3^* = p_{xy}. \end{cases}$$

[1]) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse T. X. année 1896.

où les quantités $p_{xx}, \ldots p_{yz}, \ldots$ auraient les valeurs qu'elles ont dans le fluide au point et à l'époque considérés.

En partant de cette définition des ε_i^*, γ_i^* $(i = 1, 2, 3)$ il serait aisé de retrouver les équations (32) par la méthode suivie dans notre mémoire: „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité" et d'éviter, moyennant une légère modification du raisonnement, la difficulté signalée dans l'introduction. Mais je crois qu'il n'y a pas intérêt à développer ce point, parce que la méthode suivie plus haut fait reposer les équations en question sur des hypothèses bien moins arbitraires que celles que l'on aurait à introduire en suivant la méthode du mémoire que je viens de rappeler. Ajoutons seulement que le désaccord qu'il y a entre les équations (32) de ce mémoire et les équations (28) p. 395 du mémoire: „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité", ne tient nullement à la divergence des méthodes; la source de ce désaccord est la suivante: dans le précédent mémoire nous sommes partis des formules ordinaires de la théorie de l'élasticité et, par cela même, nous avons dû regarder les termes contenant les quantités q_1, q_2, q_3 en facteur comme négligeables.

Nr. 6. Les considérations développées au numéro précédent mettent immédiatement en évidence ce fait que les équations (32) comprennent comme cas-limite correspondant à l'hypothèse

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T'} = 0,$$

les équations différentielles que vérifient les forces intérieures d'un solide élastique isotrope dont les coefficients d'élasticité seraient λ et μ. Passons à l'examen de quelques autres cas-limites de nos équations.

Au lieu de supposer, comme tout à l'heure, que $\frac{1}{T}$ tende vers zéro, supposons que la quantité T elle-même tende vers zéro; si l'on suppose que le rapport $\frac{T}{T'}$ tende vers une limite finie quelconque et que les produits λT et μT aient zéro pour limite, les équations (32) se réduiront à la limite à un système équivalent au suivant:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$$
$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0.$$

équations qui conviennent à un fluide parfait dénué de viscosité; si l'on suppose au contraire que les produits λT et μT tendent vers des limites non nulles l' et m le rapport $\frac{T}{T'}$ ayant une limite déterminée k, quelconque, le système (32) se réduira, à la limite, à un système équivalent au système suivant:

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} p_{xx} - p &= -2m a_1 - l\tilde{\omega} \\ p_{yy} - p &= -2m a_2 - l\tilde{\omega} \\ p_{zz} - p &= -2m a_3 - l\tilde{\omega} \\ p_{yz} &= -m c_1 \\ p_{zx} &= -m c_2 \\ p_{xy} &= -m c_3, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture:

$$l = l' - k\frac{2m + 3l'}{3(1 - k)}.$$

Les équations (36) représentent les expressions classiques des forces intérieures dans un fluide visqueux.

Il y a intérêt enfin à déduire des équations (32) comme cas-limite celles qui conviennent à un fluide incompressible. Il faut à cet effet faire croître λ indéfiniment et admettre que le produit $\lambda\tilde{\omega}$ tende vers une limite déterminée φ. Si l'on pose:

$$p' = p - \frac{TT'\varphi}{T + T'};$$

on obtiendra les équations demandées sous la forme suivante:

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dt} &= -2\mu a_1 - \frac{p_{xx} - p'}{T} - \frac{p_m - p'}{T'} + 2(q_2 p_{zx} - q_3 p_{xy}) \\ \frac{dp_{yy}}{dt} &= -2\mu a_2 - \frac{p_{yy} - p'}{T} - \frac{p_m - p'}{T'} + 2(q_3 p_{xy} - q_1 p_{yz}) \\ \frac{dp_{zz}}{dt} &= -2\mu a_3 - \frac{p_{zz} - p'}{T} - \frac{p_m - p'}{T'} + 2(q_1 p_{yz} - q_2 p_{zx}) \\ \frac{dp_{yz}}{dt} &= -\mu c_1 - \frac{p_{yz}}{T} + q_1(p_{yy} - p_{zz}) + q_3 p_{zx} - q_2 p_{xy} \\ \frac{dp_{zx}}{dt} &= -\mu c_2 - \frac{p_{zx}}{T} + q_2(p_{zz} - p_{xx}) + q_1 p_{xy} - q_3 p_{yz} \\ \frac{dp_{xy}}{dt} &= -\mu c_3 - \frac{p_{xy}}{T} + q_3(p_{xx} - p_{yy}) + q_2 p_{yz} - q_1 p_{zx} \end{aligned}\right.$$

équations auxquelles il faudra joindre l'équation

$$\tilde{\omega} = a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{38}$$

laquelle tiendra lieu ici de l'équation caractéristique (31).

Nr. 7. On obtiendra le système complet des équations du mouvement du fluide en adjoignant aux équations (32) et (31) ou, dans le cas d'un fluide incompressible, aux équations (37), 1-o les trois équations fournies par le principe de d'Alembert, 2-o l'équation de continuité, 3-o les équations qui dérivent des principes de la thermodynamique et de la théorie de la conductibilité calorifique. Il est presque superflu de dire que, dans les premières applications, on devra étudier les cas où la température et la densité du fluide varient assez peu pour qu'il soit possible de regarder les quantités λ, μ, T et T' comme constantes.

III. Application de la théorie précédente à un cas particulier.

Nr. 8. Nous nous proposons de reprendre l'étude du problème qui forme l'objet de notre mémoire: „Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à cette question“ [1]).

Nous nous placerons dans des conditions identiques à celles où nous nous étions placés dans le mémoire que nous venons de rappeler, nous en conserverons toutes les notations sans les définir de nouveau et, bien entendu, nous rapporterons le liquide au même système de coordonnées. La lettre φ désignant la vitesse angulaire de la particule qui se trouve à la distance r de l'axe des z on aura:

$$\left.\begin{aligned} q_1 = q_2 &= 0 \\ q_3 &= \varphi + \tfrac{1}{2} r \frac{d\varphi}{dr}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

D'ailleurs la troisième, la quatrième et la cinquième équation du système (32) nous donneront:

$$\left.\begin{aligned} p_{yz} = p_{zx} &= 0 \\ \frac{p_{zz} - p}{T} + \frac{p_m - p}{T'} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) Bulletin de l'Académie de Cracovie, Juin 1903.

Cela posé adressons-nous aux équations (19) et (20) de la page 412 du mémoire cité au début de ce chapitre et rappelons que l'on a

$$q = r\varphi. \tag{3}$$

En transformant au moyen de ces équations la première, la seconde et la sixième équation du système (32) du chapitre précédent nous arriverons à un système d'équation équivalent au système suivant:

$$\left\{\begin{aligned} &\mu r \frac{d\varphi}{dr} - \tfrac{1}{2}(P - H) r \frac{d\varphi}{dr} + \frac{Q}{T} = 0 \\ &\frac{P - H}{2T} - Q r \frac{d\varphi}{dr} = 0 \\ &\frac{P + H - 2p}{2T} + \frac{p_m - p}{T'} = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

D'ailleurs le principe de d'Alembert [1] donne:

$$\left\{\begin{aligned} &\varrho r \varphi^2 = \frac{dP}{dr} + \frac{P - H}{r} \\ &0 = \frac{2Q}{r} + \frac{dQ}{dr}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) suffisent pour calculer les quantités φ et Q, éléments au calcul desquels nous allons nous borner. La seconde des équations (5) donne:

$$Q = \frac{A}{r^2} \tag{6}$$

en désignant par A une constante arbitraire. D'autre part, en portant dans la première équation du système (5) la valeur de $P - H$ déduite de la deuxième équation du même système et en tenant compte de (6), on trouve:

$$A T^2 r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \mu T r^3 \frac{d\varphi}{dr} + A = 0. \tag{7}$$

L'intégration de cette équation est très aisée, on trouve:

$$2T\varphi = 2 \operatorname{arctg} s - s + \frac{B}{\mu} \tag{8}$$

où

$$s = \frac{\mu r^2 - \sqrt{\mu^2 r^4 - 4A^2}}{2A}; \tag{9}$$

[1]) Voir les équations (23) p. 414 du mémoire cité plus haut.

la lettre B désignant une nouvelle constante arbitraire. Dans la formule (9) le symbole

$$\sqrt{\mu^2 r^4 - 4 A^2}$$

représente un nombre positif; il doit en être ainsi pour que, comme cela doit être, la fonction φ tende vers une valeur finie lorsque A tend vers zéro. La formule (8) peut être simplifiée, sans que le degré d'exactitude du résultat en souffre. En effet nous avons établi les équations fondamentales (32) du chapitre précédent en nous plaçant dans l'hypothèse où les termes de degré supérieur au premier par rapport aux quantités p_{xx}, $p_{yx}, \ldots$ sont négligeables, donc, comme on le voit en tenant compte de la formule (6), si l'on développe la formule (8) suivant les puissances de A le terme du premier degré devra seul être conservé. On verra aisément que, d'après ce que nous venons dire, la formule (8) pourra être remplacée par la formule plus simple que voici:

$$2T\varphi = \frac{A}{\mu r^2} + \frac{B}{\mu}. \tag{10}$$

Telle est la formule que nous considererons comme définitive.

Dans mon mémoire „Sur un problème d'hydrodynamique etc." je suis arrivé à la formule suivante (formule (27) p. 415)

$$2T\varphi = tg\left(\frac{A}{\mu r^2} + \frac{B}{\mu}\right). \tag{11}$$

Il résulte des conditions dans lesquelles j'avais établi les équations fondamentales d'où j'étais parti que la formule précédente n'est certainement applicable que dans le cas où φ est assez petit pour qu'il soit permis d'en négliger les puissances supérieures à la première Il faut donc que l'expression

$$\frac{A}{\mu r^2} + \frac{B}{\mu} \tag{12}$$

représente, dans la formule (11), un nombre assez petit pour qu'il soit permis d'en négliger les puissances supérieures à la première. Donc, la formule (11), dans les limites de sa validité doit être considérée comme équivalente à la formule (10). En résumé le résultat que l'on obtient en partant des équations que j'avais établies dans le mémoire: „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité" et celui que donnent les équations établies dans le présent

mémoire s'accordent dans la partie commune des domaines de validité de chacune d'elles, puisque ce résultat est fourni par la formule (10) mais, dans la théorie que j'ai développée maintenant, il suffit de supposer que la constante A est très petite tandis que la théorie que j'avais développée d'abord nous obligerait à admettre en outre que B est aussi un nombre très petit.

---

42. M. S. ZAREMBA m. c. **Zasada ruchów względnych i równania mechaniki fizycznej. (Odpowiedź prof. Natansonowi).** ***(Le principe des mouvements relatifs et les équations de la mécanique physique. Réponse à M. Natanson).***

J'ai démontré dans une note récente [1]), que les équations définitives auxquelles arrive M. Natanson dans la théorie de la viscosité [2]), équations dont je désignerai l'ensemble par (E) et sur lesquelles sont basés tous ses travaux ultérieurs relatifs à la mécanique des fluides visqueux, sont en contradiction avec le principe „des mouvements relatifs" [3]). M. Natanson [4]) reconnait l'exactitude du fait que j'ai mis en évidence mais:

1-o. Il croit que les équations (E) sont approximativement exactes et, pour le prouver, il s'efforce d'établir que, dans certaines conditions, très particulières d'ailleurs, bien plus particulières que celles dans lesquelles il les avait présentées d'abord, elles peuvent être considérées comme équivalentes à un autre système d'équations, système que nous désignerons par (F) et qui n'est plus en contradiction avec le principe des mouvements relatifs.

2-o. Il affirme que son travail „sur la double réfraction accidentelle dans les liquides" [5]), travail dont le résultat est, de son

[1]) Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité (Bulletin de l'Académie de Cracovie 1903).

[2]) Natanson. Sur les lois de la viscosité. (Bulletin de l'Académie de Cracovie 1901).

[3]) On trouvera l'énoncé de ce principe, tel que nous l'entendons, au Nr. 63, p. 79 du T. I du Traité de Mécanique rationnelle de M. P. Appell.

[4]) Natanson. Sur l'approximation de certaines équations de la Théorie de la viscosité. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Mai 1903, §§ 6 et 7).

[5]) Natanson. Sur l'approximation de certaines équations etc. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Mai, 1903, § 13).

propre aveu, inexact[1]), repose sur le système (F) et non pas, comme je l'ai dit dans ma note, sur le système (E).

Pour ce qui concerne le second point l'affirmation de M. Natanson est contraire au fait: son mémoire „sur la double réfraction accidentelle dans les liquides" repose, dans toutes ses parties, sur les équations (E); le lecteur qui désirerait s'éclairer complètement sur ce point n'aurait qu'à se reporter à mon mémoire: [2]) „Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur un travail de M. Natanson relatif à cette question", mémoire où il trouverait une analyse détaillée du travail de M. Natanson.

Passons au premier point. J'ai établi [3]) récemment les équations qui expriment correctement l'hypothèse que M. Natanson a pris pour base de sa théorie de la viscosité. Ces équations ne sont nullement équivalentes aux équations (F) proposées par M. Natanson. Par conséquent, au point de vue de l'hypothèse qu'il a tenté de développer, il n'y aurait aucun intérêt à rechercher si les systèmes d'équations (E) et (F) peuvent ou ne peuvent pas être considérés comme équivalents approximativement dans certaines conditions. Mais la question de l'équivalence approximative des systèmes (E) et (F) offre un certain intérêt au point de vue de la méthode en mécanique physique parce qu'elle se rattache à la question d'ordre général que voici: dans quelle mesure est-il possible d'employer, en mécanique physique, des équations, où le principe des „mouvements relatifs" n'est pas respecté? Des équations de ce genre ne peuvent jamais être rigoureusement exactes mais, en cela, elles n'auraient qu'un défaut commun à toutes les équations de la mécanique physique; les circonstances qui les rendent particulièrement suspectes, dès le premier abord, sont en réalité les suivantes:

1-o. Il ne peut exister aucun système matériel dont les lois du mouvement soient rigoureusement conformes à celles qu'expriment des équations du genre considéré. 2-o. Les résultats que l'on obtiendrait au moyen d'équations offrant la particularité en

[1]) Natanson. Sur l'approximation de certaines équations etc. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Mai 1903, note au bas de la p. 307).

[2]) Bulletin de l'Académie de Cracovie, Juin 1903.

[3]) Zaremba. Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Juin 1903).

question dépendraient de la vitesse de translation que l'on attribuerait au système de coordonnées que l'on voudrait employer.

Ceci suggère l'idée que des équations non conformes au principe des mouvements relatifs pourraient tout au plus être utilisées dans les problèmes très particuliers où il serait possible, et cela est essentiel, de fixer à priori, sans aucune ambiguité la vitesse de translation du système de coordonnées auquel on aurait à rapporter le système matériel.

Pour bien faire comprendre qu'il en est réellement ainsi et pour mettre en évidence les dangers auxquels on s'expose en faisant usage d'équations où le principe des mouvements relatifs n'est pas respecté, j'envisagerai un exemple particulier, exemple que cite M. Natanson croyant y trouver une confirmation de la légitimité des équations (E). Désignons par u, v, w les composantes parallèles aux axes de la vitesse de la particule du fluide qui, à l'époque t a x, y, z pour coordonnées et par α, β, γ et T des constantes dépendant de la nature du fluide. En partant des équations (E) et en supposant que les quantités u, v, w ainsi que leurs dérivées partielles sont très petites, M. Natanson arrive à l'équation suivante:[1])

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\beta^2 - \gamma^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \\ + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \right. \\ \left. - (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} = 0.$$

ainsi qu'aux équations analogues relatives à v et à w. Désignons d'autre part par a, b, c les coordonnées d'une particule du fluide à l'état d'équilibre et de repos par rapport au système de coordonnées (x, y, z) et par $a+\xi, b+\eta, c+\zeta$ les coordonnées de la même particule à l'état de mouvement et à l'époque t. En partant des

[1]) Natanson. Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Janvier 1902, équation (3) du § 6 [nous transcrivons cette équation en remplaçant les lettres a, b, c par α, β, γ, pour mettre en harmonie les notations dans lesquelles elle sera écrite avec celles dans lesquelles M. Natanson écrit une autre équation que nous nous proposons de comparer avec elle]).

équations (F) M. Natanson arrive, dans un autre travail[1]), à l'équation suivante:

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - (\beta^2 - \gamma^2)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + \\ + T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \alpha^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial b^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial c^2}\right) - \right. \\ \left. - (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\right\} = 0.$$

ainsi qu'aux deux équations analogues relatives à η et à ζ et il y voit une confirmation de l'exactitude des équations (E). En cela il se trompe: 1-o. Les deux systèmes d'équations qu'il obtient ne sont nullement mathématiquement équivalents. En effet les valeurs suivantes de u, v et w:

$$u = mt + n; \quad v = w = 0,$$

où m et n représentent des constantes fournissent un système d'intégrales de l'équation (1) et des équations analogues relatives à v et w. Or, parmi les valeurs correspondantes de ξ, η et ζ, on trouve les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \xi &= \tfrac{1}{2}mt^2 + nt + l \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

lesquelles ne satisfont pas, comme cela devrait être si les deux systèmes d'équations étaient équivalents, à l'équation (2) lorsque $m = l = 0$. J'ajoute que les équations (3) expriment une chose inadmissible. Pour mettre ce point en évidence je rappelle que l'équation (1) et les équations analogues relatives à v et w ont été établies en supposant que les forces extérieures se réduisent à des pressions sollicitant la surface limitant le fluide. D'autre part il résulte des positions relatives qu'ont les particules du fluide, dans le mouvement défini par les équations (3), que les forces sollicitant sa surface doivent se réduire à une pression normale constante. Par conséquent les forces extérieures se feraient équilibre et cependant toute la masse fluide serait animée d'un mouvement

[1]) Natanson. Sur l'application des équations de Lagrange dans la théorie de la viscosité. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Mai 1903, équation (5a) du § 9).

uniformément varié. C'est précisément la circonstance que nous voulions signaler.

2-o. Bien qu'il existe des intégrales du premier système d'équations équivalentes approximativement à certaines intégrales du second système, ces deux systèmes d'équations conduisent à des conclusions opposées en ce qui concerne certains côtés de l'aspect physique du phénomène de la propagation des petites perturbations. Montrons qu'il en est bien ainsi.

Soient $\psi(x, t)$ et $\psi_1(x, t)$ deux intégrales particulières de l'équation (1) obtenues en posant

$$v = w = 0$$

et vérifiant d'ailleurs toutes les hypothèses de M. Natanson. L'expression

$$u = \psi(x, t) + \psi_1(x, t), \tag{4}$$

représentera alors une perturbation longitudinale parallèle à l'axe des x, composée des perturbations $\psi(x, t)$ et $\psi_1(x, t)$. Quelle sera la vitesse avec laquelle se déplacera le plan contenant les particules qui, dans la perturbation (4) auront la vitesse qu'elles auraient dans le cas où la perturbation $\psi(x, t)$ existerait seule? Un plan pareil sera déterminé par l'équation:

$$\psi_1(x, t) = 0, \tag{5}$$

laquelle donne, pour la vitesse demandée $\frac{dx}{dt}$ la valeur suivante:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial t}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial x}}, \tag{6}$$

où x et t doivent être considérés comme liés par l'équation (5). Cela prouve que, d'après l'équation (1), la vitesse demandée ne dépendrait que de la nature de la perturbation ψ_1.

Quelle sera la réponse que donnera à la même question l'équation (2)? Désignons par $\varphi(a, t)$ et $\varphi_1(a, t)$ deux intégrales particulières de l'équation (2) obtenues en posant

$$\eta = \zeta = 0.$$

L'abscisse x d'une particule du fluide dans la perturbation composée des perturbations φ et φ_1 sera donnée par l'équation suivante:

$$x = a + \varphi(a, t) + \varphi_1(a, t), \tag{7}$$

d'où

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}.$$

Il résulte de là que l'abscisse du plan (normal à l'axe des x) contenant les particules ayant la vitesse qu'elles auraient dans le cas où la perturbation φ existerait seule s'obtiendra en portant dans la formule (7) la valeur de a déduite de l'équation suivante:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Cette valeur de a étant portée dans l'équation (7) on aura, pour la vitesse demandée la formule suivante:

$$\frac{dx}{dt} = \left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a}\right) \frac{da}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

où l'on devra porter la valeur de $\frac{da}{dt}$ déduite de l'équation (8). On aura donc finalement:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a \, \partial t}} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{9}$$

où a et t doivent être regardés comme liés par l'équation (8). La formule (9) montre que la vitesse demandée dépend à la fois des deux perturbations. Donc, dans la question que nous nous sommes posée, les équations (1) et (2) conduisent bien à des résultats opposés. La différence numérique des résultats que nous venons de comparer sera petite mais la portée physique de la simple existence de cette différence est considérable: en effet il est aisé d'en tirer la conséquence que voici: d'après le système auquel appartient l'équation (1), un courant préexistant dans le fluide n'entraînerait pas les perturbations qui pourraient s'y produire et il les entraînerait au contraire d'après le système dont l'équation (2) fait partie. Il est à peine utile de dire que la dernière assertion seule est admissible.

L'exemple que nous venons de considérer suggère la remarque suivante: l'emploi des variables introduites en hydrodynamique par

Lagrange permet d'éviter, sans introduire aucune complication dans les équations, l'usage d'équations incompatibles avec le principe des mouvements relatifs: dès lors rien absolument ne nécessite l'introduction, en hydrodynamique, d'équations aussi défectueuses que le sont celles où le principe des mouvements relatifs n'est pas respecté.

Peut-être croira-t-on que notre critique des équations où le principe des mouvements relatifs est violé, est infirmée partiellement par ce fait qu'en acoustique on fait usage, avec succès, d'une équation qui précisement rentre dans le type de l'équation[1] (1). Il n'en est rien en réalité. En effet on ne considère en acoustique, quand on emploi l'équation en question, que le cas des vibrations proprement dites. En d'autres termes on suppose qu'il est possible de rapporter le fluide à un système d'axes animé d'un mouvement de translation tel que les variations des coordonnées de chaque particule soient constamment comprises entre des limites constantes et très étroites. Donc la vitesse de translation du système de coordonnées pour lequel on considère l'équation en question comme valable est parfaitement déterminée; on évite dès lors toutes les erreurs qui pourraient dériver de la comparaison des résultats obtenus en rapportant le fluide à des systèmes d'axes dont les vitesses de translation seraient différentes et on se place précisément dans le cas que nous avons dit être le seul où les équations non conformes au principe des mouvements relatifs pourraient être employées sans s'exposer à de graves erreurs. D'ailleurs tous les résultats déduits en acoustique de la façon que nous venons d'indiquer s'obtiennent aussi aisément et sous une forme plus satisfaisante en se servant d'équations du type de l'équation (2).

Il résulte des considérations précédentes que, même dans les nouvelles conditions où M. Natanson s'est placé, les équations (E) et (F) ne peuvent être considérées comme équivalentes approximativement.

Je désirerais, en terminant cette note, dissiper un malentendu que pourrait créer ce que dit M. Natanson au sujet du criterium que j'applique aux équations (E) au Nr. 3 de ma note citée au début. M. Natanson estime que ce criterium est „injustifiable et même erroné parce que son adoption entraînerait une conclusion

[1]) J'ai en vue l'équation dont on se sert ordinairement pour calculer le potentiel des vitesses.

de la nature de la proposition suivante: pour que certaines équations soient exactes approximativement il est nécessaire et suffisant qu'elles soient absolument rigoureuses" [1]).

La circonstance qui en réalité a provoqué cette assertion de M. Natanson est la suivante: lorsque la vitesse de translation du système de coordonnées auquel on doit rapporter un système matériel dont on veut étudier le mouvement n'est pas rigoureusement déterminée à priori, il est nécessaire, d'après le criterium que j'ai indiqué, que les équations du mouvement, pour être approximativement exactes, soient rigoureusement conformes au principe des mouvements relatifs.

D'après cela l'objection de M. Natanson tombe immédiatement: en effet des équations de mouvement données peuvent non seulement n'être qu'approchées mais même elles peuvent être tout à fait inexactes sans pour cela violer forcément le principe des mouvements relatifs.

Pour établir que les équations (E) sont inadmissibles, même à titre d'équations approchées, dans des conditions aussi générales que celles dans lesquelles M. Natanson les présente, il n'était pas nécessaire de formuler la conclusion générale, énoncée plus haut, résultant de l'application du criterium que j'ai indiqué; il suffisait de prouver que les équations (E) ne satisfont pas à ce criterium et c'est précisément ce que j'ai fait dans ma note.

Nous ne nous sommes pas arrêtés à examiner d'une façon détaillée le raisonnement au moyen duquel M. Natanson cherche à établir l'équivalence approximative des systèmes (E) et (F) parce que ce raisonnement ne présente, en aucune de ses parties, les caractères d'un raisonnement mathématique rigoureux: M. Natanson aurait dû, à l'effet d'arriver à une démonstration rigoureuse, commencer par établir l'existence d'intégrales du système (E) vérifiant les conditions voulues et c'est ce qu'il n'a même pas tenté de faire.

[1]) Natanson. Sur l'approximatiou de certaines équations de la théorie de la Viscosité. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Mai 1903, p. 310 ad 5).

43. M. N. CYBULSKI m. t. **Przyczynek do teoryi powstawania prądów elektrycznych w tkankach zwierzęcych i roślinnych.** ***(Ein Beitrag zur Theorie der Entstehung der elektrischen Ströme in tierischen und pflanzlichen Geweben).*** *(Sur la théorie de l'origine des courants électriques dans les tissus des animaux et des plantes).*

Im Jahre 1898 habe ich in der Maisitzung vor den geehrten Herren den Gedanken geäussert, dass die elektrischen Erscheinungen, die wir in den pflanzlichen und tierischen Geweben beobachten können, in den in lebendigen Elementen hervortretenden Diffusions- und osmotischen Prozessen ihre Quelle haben.

Diese Prozesse verursachen, dass die Elemente der Gewebe z. B. der Muskel- oder Nervenfasern etc. die Eigenschaften einer elektromotorischen Oberfläche besitzen. Durch diesen Gedanken wollte ich ausdrücken, dass einerseits bei den fortwährend entstehenden chemischen Veränderungen der Stoffe, aus welchen das Protoplasma und die es durchdringenden Säfte gebildet sind, und dass anderseits bei der fortwährenden Veränderung der Stoffe, die sich in der die Elemente der Gewebe umgebenden Flüssigkeit befinden, Diffusions- und osmotische Prozesse entstehen müssen; da sich aber unter diesen Stoffen eine gewisse Menge der Elektrolyte in einer sehr verdünnten Lösung befindet, so müssen dieselben in gänzlicher Dissoziation sein. Selbstverständlich geben die Unterschiede der Konzentration dieser Elektrolyte in der Umgebung der Gewebe: Muskelfasern, Nerven oder überhaupt einer lebendigen tierischen oder pflanzlichen Zelle und des Protoplasmas selber elektrische Potentialdifferenzen, die bei entsprechenden Bedingungen Konzentrationsströme geben können. Direkte Untersuchungen haben schon längst bestätigt, dass diese elektrischen Erscheinungen in Geweben einen genau bestimmten Charakter und eine bestimmte Richtung besitzen, und zwar dass auf der Oberfläche eines lebendigen Elementes die Kationen und im Protoplasma die Anionen überwiegen. Wenn wir also das Innere (einen Querschnitt oder eine beschädigte Stelle) vermittels eines guten elektrischen Leiters mit der Oberfläche verbinden, erhalten wir einen Strom, welcher im Leiter immer von der Oberfläche zum Querschnitt verlaufen wird.

Wir brauchen also weder die Theorie du Bois Reymonds, noch die Alterationstheorie Hermanns, die eigentlich nichts erklärt und nur eine beobachtete Tatsache wörtlich darstellt, zu berücksichtigen.

Meine Versuche, die für die oben erwähnte Hypothese eine

Bestätigung geben sollen, bestehen aus einigen Serien. Erstens versuchte ich mir klar zu machen, was für einen Charakter die Konzentrationsströme im Momente ihrer Entstehungen besitzen. Wie bekannt ist, bildeten den Hauptbeweis für die Theorie Hermanns dessen Versuche mit dem Fallrheotom. Dieselben zeigen, dass der Muskelstrom nicht momentan seine höchste Spannung erreicht, sondern sich allmälich entwickelt. Deswegen habe ich eine Reihe von Versuchen mit dem Fallrheotom gemacht, das ich zur Untersuchung der Konzentrationsströme entsprechend eingerichtet habe. Diese Versuche haben mich überzeugt, dass die Konzentrationsströme sich in einer ganz analogen Weise wie die Muskelströme verhalten, d. h. dass das Maximum der Spannung des Stromes auch nicht momentan erscheint, sondern dass der Strom allmälich wächst und nach einer kurzen Zeit höher als am Anfange ist. In dieser Hinsicht unterscheidet sich also der Konzentrationsstrom von dem Muskelstrome gar nicht.

Da ferner die Konzentrationsströme für verschiedene Elektrolyte bekannt sind und da sie sich theoretisch berechnen lassen, so versuchte ich ein Modell eines Nerven oder Muskels darzustellen, um zu konstatieren, inwiefern die in dieser Weise erhaltenen Ströme sich von den theoretisch berechneten unterscheiden, falls sie vermittels der bis jetzt von Physiologen gebrauchten Metoden untersucht sind. Als Modell diente mir ein Froschdarm, welcher von der Schleimhaut gereinigt und im Wasser und Alkohol gewaschen war. Diesen Darm habe ich mit Gelatine gefüllt. Die Gelatine habe ich in einer Elektrolytenlösung von bekannter Konzentration im Verhältnis von 1:20 gelöst. Nachher habe ich den Darm mehrmals in eine ähnliche Gelatinelösung nur von einer anderen Konzentration desselben Elektrolyten eingetaucht, um eine mehr oder weniger dicke Schicht auch auf der Oberfläche des Darmes zu erhalten. Wenn man dabei die Geschwindigkeit der Ionen berücksichtigt und dem entsprechend auf der Oberfläche eine mehr konzentrierte und im Innern eine schwächere Elektrolytenlösung nimmt oder umgekehrt, kann man Ströme erhalten, die dem Ruhestrom der Muskeln oder Nerven analog sind, wenn man sie in derselben Weise ableitet, d. h. wenn man den Darm mit einem scharfen Messer durchschneidet und eine unpolarisierbare Elektrode an die Oberfläche und die andere an den Querschnitt legt. Die elektromotorischen Kräfte, die man für diese Konzentrationselemente gefunden hat, entsprachen

nicht den durch Berechnung gefundenen; sie waren stets niedriger und ausserdem war der Charakter dieser Ströme ein anderer, sie besassen nämlich keineswegs die Ständigkeit, die wir bei den Muskel- oder Nervenströmen wahrnehmen. Diese Tatsache erweckte bei mir den Gedanken, dass in lebendigen Geweben ausser den Konzentrationsdifferenzen auch zwei andere Faktoren im Spiel sein können. Erstens können wir es hier mit den semipermeablen Membranen oder Substanzen zu tun haben, welche die Bedingungen der Osmose grundsätzlich verändern können; zweitens können die elektromotorischen Differenzen in den Geweben davon abhängen, dass die dissoziierten Elektrolyte sich in den Mischungen befinden, deren Hauptmasse von Nichtelektrolyten in einem besonderen physischen Zustande gebildet ist z. B. Proteinstoffe u. s. w.

Hier muss ich bemerken, dass, während sich mir in meinen Untersuchungen vom Jahre 1898 immer neue Gesichtspunkte aufdrängten, mehrere Arbeiten erschienen sind, deren Verfasser auch von demselben Standpunkte ausgegangen sind, nämlich dass die elektrischen Ströme in den Geweben nur Konzentrationsströme sind. Diese Autoren sind: Tschagowetz [1]), Max Ocker Blom [2]), W. M. Strony [3]), Bernstein [4]). Die Versuche dieser Autoren wurden in einer mehr oder weniger analogen Weise durchgeführt und haben mich jedenfalls immer mehr und mehr von der Richtigkeit der oben erwähnten Hypothese überzeugt. Im allgemeinen muss ich aber sagen, dass die genannten Autoren ausser Bernstein die Tradition nicht verlassen wollen und weiter ähnlich wie Hermann die Ursache der elektromotorischen Erscheinungen auf den Querschnitt lokalisieren und dieselben als Folge des Absterbens des Gewebes betrachten. Manche, wie Tschagowetz, weisen sogar auf CO_3H_2 als auf den Elektrolyten hin, der die Erscheinung hervorruft. Tschagowetz berechnet die elektromotorische Kraft der Muskeln theoretisch, obwohl man aus seinen Berechnungen gar nicht verstehen kann, warum der Strom diese Richtung und nicht eine andere besitzt. Die Ströme selbst halten die Autoren für reine Konzentrationsströme.

Von einem viel allgemeineren Standpunkte betrachtet die Sache

[1]) Neurologitscheskij Wiestnik. B. I. H. 6. und Otscherk Elektritscheskich Jawlenij cet. Petersburg 1903.

[2]) Pflügers Archiv — B. 84.

[3]) Journal of Physiology. B. 24.

[4]) Pflügers Archiv — B. 94.

Bernstein, der zum Beweise, dass die elektrischen Ströme in den Geweben Konzentrationsströme sind, den Umstand anführte, dass dieselben in einem direkten Verhältnis zu der absoluten Temperatur stehen. Er meint aber, dass gegebenen Falls auch die semipermeablen Membranen im Spiel sein können.

Ich habe in meinen Versuchen eine solche Membran aus zwei klassischen, bekannten Stoffen, nämlich aus Kupfersulfat und Ferrocyankali, gebildet. Wir lösen Gelatine in einer $^1/_{10}$ n. Lösung von $CuSO_4$ und in einer ebensolchen Lösung von K_4FeCy_6. Wenn wir dann mit der in Ferrocyankali gelösten Gelatine den oben erwähnten Froschdarm füllen und nach dem Erstarren der Gelatine auf der Oberfläche des Darms durch Eintauchen eine mehr oder weniger dicke Schichte der in $CuSO_4$ gelösten Gelatine bilden, so erhalten wir, wenn wir den Strom von der Oberfläche eines solchen Darmes ableiten, gewöhnlich keine Potenzialdifferenz oder nur eine sehr unbedeutende; wenn wir aber diesen Gelatinezylinder irgendwo beschädigen oder durchschneiden, so wird der Querschnitt oder die beschädigte Stelle oder ihre Umgebung ebenso wie bei einem Muskel negativ elektrisch, während die Oberfläche positiv wird. In dieser Tatsache haben wir einen sicheren Beweis dafür, dass unter diesen Bedingungen die Längsoberfläche elektromotorisch sein kann und dass ferner neben der Längsoberfläche eine Doppelschicht der Ionen gebildet wird: positive Ionen auf der Oberfläche und negative im Inneren. Es muss nur hervorgehoben werden, dass in einem solchen Schema die elektromotorische Kraft gleich wie ihre zeitlichen Veränderungen dem Nerven gänzlich ähnlich ist.

Mehrere auf solche Weise praeparierten Därme, zusammengelegt und in Gelatine mit $CuSO_4$ eingetaucht, bilden einen Bündel, das seinem Baue nach noch mehr an einen Nerven erinnert. Verbinden wir jetzt den Querschnitt mit der Oberfläche, so erhalten wir einen wegen Verminderung des Widerstandes viel stärkeren Strom von derselben elektromotorischen Kraft. Nach einer gewissen Zeit wird der Strom schwächer; ein neuer Querschnitt hebt den Strom bedeutend und vergrössert die elektromotorische Kraft. In dieser Hinsicht also verhält sich auch der, von mir so genannte, *künstliche Nerv* ganz ähnlich wie ein wirklicher, obwohl in diesem Falle niemand zugeben kann, dass man es hier mit einem Absterben des Querschnittes zu tun hätte.

Die zweite Reihe der Versuche sollte in dieser Hinsicht die

Bedeutung der Nichtelektrolyte aufklären. Als Nichtelektrolyte habe ich hier in warmem Wasser gelöste und dann erstarrte Gelatine, Hühnereiweiss, destillirtes Wasser etc. benutzt. Die Versuche dieser Reihe haben uns gezeigt, dass die obengenannten Stoffe nicht nur von Einfluss sind, sondern auch über die Stärke und Richtung der Konzentrationsströme entscheiden. Obwohl ich jetzt kaum imstande bin, die Ursache dieser Tatsache zu erklären, muss ich sie dennoch angeben, weil ich sie für die Theorie der tierischen Elektrizität für sehr wichtig halte und ferner auch deswegen, weil einen analogen Versuch schon Tschagowetz angegeben hat, den er zur Erklärung der elektrischen Apparate der Fische angewandt hat. Ich muss aber bemerken, dass die Versuche von Tschagowetz im allgemeinen ziemlich primitiv ausgeführt worden sind, indem er mit Wasser gemischten Ton als Nichtelektrolyten angewendet hat. Die Anordnung meiner Versuche war folgende: Ich liess eine von oben offene und durch zwei Scheidewände geteilte Paraffinkammer anfertigen. Auf diese Weise erhielt ich in der Kammer drei Abteilungen. In den beiden inneren Scheidewänden habe ich ungefähr 0·5 cm von ihrem oberen Rande entfernt runde Öffnungen von 6—8 mm Durchmesser gemacht. Beide Öffnungen habe ich mit gewöhnlichem Filtrierpapier zugeklebt, wobei ich das Paraffin vermittels eines heissen Stäbchens erhitzte, so dass das Papier vor der Öffnung nicht mit Paraffin begossen wurde; wenn wir jetzt in die zwei äusseren Abteilungen der Kammer eine Elektrolytenlösung von einer bestimmten Konzentration geben und in die mittlere eine Lösung von einer anderen Konzentration und die beiden seitlichen Kammern nach der üblichen Weise durch unpolariosirbare Elektroden mit einem Galvanometer verbinden, dann erhalten wir keinen oder fast keinen Strom. Wenn wir aber eine dieser Öffnungen in der Scheidewand ausser mit Papier noch mit Gelatine ausfüllen und erst nachher die Elektrolyten hineingiessen, und zwar in die seitlichen Abteilungen einen weniger und in die mitlere einen mehr konzentrierten, und wenn wir ferner die beiden seitlichen Abteilungen mit dem Galvanometer verbinden, so erhalten wir einen ziemlich konstanten Strom von einer verhältnismässig hohen Spannung, dessen elektromotorische Kraft bei Anwendung von Säuren oder Alkalien der teoretisch berechneten nahe steht. Nehmen wir Säuren oder Alkalien, so erhalten wir regelmässig einen Eindruck, als ob die Diffusion nur durch das Papier ginge und

die Gelatine nur als elektrischer Leiter diene. Die Richtung des Stromes hängt davon ab, welches Ion die grössere Geschwindigkeit besitzt, geben wir z. B. in die seitlichen Abteilungen $^1/_{1000}$ n H_2SO_4 und in die mitleren $^1/_{10}$ n oder $^1/_{100}$ n H_2SO_4, so wird die schwächere Lösung von der Seite der Gelatine negativ. Die elektromotorische Kraft schwankt zwar je nach der Exaktheit, mit welcher der Versuch ausgeführt wurde, sie ist aber jedenfalls sehr bedeutend, z. B. beträgt sie bei Lösungen von $^1/_{1000}$ n und $^1/_{10}$ n H_2SO_4 0·1—0·06 Volt. Füllen wir die Gefässchen mit KOH oder NaOH an, und zwar das mittlere mit $^1/_{10}$ n, die seitlichen mit $^1/_{1000}$ n, so wird die schwächere Lösung von der Seite des Papiers negativ und von der der Gelatine positiv. Die elektromotorische Kraft schwankt ebenfalls; als obere Grenze habe ich 0·05 Volt erhalten. Die Lösungen der Salze aber folgen diesem Satze nicht. Die Mehrzahl der Salze, wie NaCl, $ZnSO_4$, $CuSO_4$ und manche anderen haben den negativen Pol stets von der Seite der Gelatine, obwohl man in Hinsicht darauf, dass das negative Ion schneller ist und dass die Diffusion hauptsächlich durch das Papier geht, vermuten könnte, dass die Erscheinung einen entgegengesetzten Verlauf nehmen wird. Diese Tatsache zeigt meiner Ansicht nach, dass die Diffusion in beiden Richtungen vor sich geht und dass in der Gelatine die relative Geschwindigkeit der Ionen einer Veränderung unterliegt. Das negative Ion hat eine relativ grössere Geschwindigkeit als das positive und deswegen wird die Zelle von der Seite der Gelatine negativ.

Nehmen wir anstatt solcher drei Abtheilungen 5, 7, 9 u. s. w. und kleben wir in den unpaarigen Wänden die Öffnungen nur mit Papier zu, in den paarigen aber mit Gelatine und Papier; geben wir nachher in die unpaarigen Abteilungen schwächere Lösung und in die paarigen eine stärkere und verbinden die Gefässe an den beiden Enden des Apparates, die dieselbe Lösung enthalten, mit dem Galvanometer, so erhalten wir eine Batterie, deren elektromotorische Kraft der Summe der elektromotorischen Kräfte aller Elemente entspricht. Eine solche Batterie ist eigentlich ein Modell des elektrischen Apparates der elektrischen Fische. Die Richtung des Stromes wird dieselbe wie die eines einzelnen Elementes sein. Die Tatsache, die man hier beobachten kann, hat, wie ich das schon oben erwähnt, Tschagowetz in diesem Jahre beschrieben; er hat aber die dabei beobachteten Erscheinungen nicht zur Erklärung

der elektrischen Ströme im thierischen Organismus im allgemeinen angewandt, sondern beschränkt sich im Gegenteil nur auf die Fische. Die elektrischen Ströme in den Muskeln und Nerven erklärt er ausschliesslich nur durch die Diffusion der Kohlensäure, die in den absterbenden Teilen neben dem Querschnitte sich bilden soll.

Die Versuche reichen meiner Ansicht nach gänzlich zur Bestätigung der am Anfange angegebenen Hypothese aus. Die Quelle der elektrischen Ströme in den Geweben bilden die Diffusions- und osmotischen Strömungen der Elektrolyte und dank dem speziellen Bau und der Natur der Membranen, die das Protoplasma umhüllen, oder dank den Eigenschaften des Protoplasmas selber sind die Bedingungen zu einer solchen Verteilungen der Ionen vorhanden, dass die positiven Ionen auf der Oberfläche und die negativen im Inneren sich sammeln. Deshalb verursacht auch jede Beschädigung der Oberfläche die Entstehung eines Stromes, dessen Leitung die feuchte Oberfläche des Elementes bildet. Der zum Galvanometer abgeführte Strom bildet eine Abzweigung des Stromes, die zur Ausgleichung der Konzentrationsdifferenzen in den Elementen der Gewebe dient.

Die Ströme, die ich bei der Anwendung der Gelatine beobachtete, haben wirklich eine grosse Bedeutung für die Erklärung der elektrischen Erscheinungen in den Geweben. Sehr ähnliche erhielt ich auch, wenn die Öffnung in der Wand von einer Seite der konzentrierten Lösung mit Hühnereiweiss, Gummi arabicum oder Zuckerlösung u. d. gl. ausgefüllt wurde. Ich erhielt auch qualitativ analoge Resultate dann, wenn einerseits die Öffnung durch Filtrierpapier und anderseits durch eine organische Membran (Eiweissmembranen, entkalkte Eiermembranen, Froschblasen etc.) geschlossen wurde.

Zum Schluss erlaube ich mir zu bemerken, dass man in dem oben beschriebenen künstlichen Nerven elektrotonische Ströme beobachten konnte, und zwar sowohl unter dem Einflusse von konstanten wie auch gleichgerichteten unterbrochenen Strömen. Unterbrochene gleichgerichtete Ströme rufen stets Ströme in derselben Richtung hervor; dagegen rufen die alternierenden und besonders die Induktionsströme von beiden Seiten der gereizten Stelle eine positive Phase hervor. Hätte sie eine negative gegeben, so könnte das den Eindruck einer negativen Schwankung machen. Ein Kriterium können also hier nur gleichgerichtete, unterbrochene, kurzdauernde Ströme bilden, die in lebendigen Nerven immer eine

negative Schwankung ohne Rücksicht auf ihre Richtung hervorrufen. Nur wenn die reizenden Elektroden von den ableitenden sehr wenig entfernt sind und sehr starke Ströme angewendet werden, so treten auch in den Nerven elektrotonische Ströme hervor, die sich mit den negativen Schwankungen summieren. Das erhalten wir in einem künstlichen Nerven niemals: im Gegenteil wir haben hier immer abgeleitete Ströme, welche dieselbe Richtung haben wie die reizenden. Alternierende Ströme rufen hier wahrscheinlich auch nur elektrotonische Erscheinungen hervor, die aber wegen des Übergewichtes derselben Ionen auf beiden Seiten der reizenden Elektroden auch dieselbe Phase von beiden Seiten geben, ähnlich wie es bei den toten oder vergifteten Nerven beobachtet wurde. (Boruttau, Herzen, u. a.).

Die negativen Schwankungen oder die Aktionsströme in lebendigen Nerven und Muskeln können also von zwei Ursachen abhängig sein: 1. Im tätigen Zustande entstehen neue Ionen, die in entgegengesetzter Richtung gehend die frühere elektromotorische Kraft vermindern, und 2. der tätige Zustand vermindert die Rolle der lebendigen Substanz als Nichtelektrolyten und deshalb vermindert sich die elektromotorische Kraft, was wir in meinen Kammern beobachten konnten.

---

44. M. LAD. SATKE **O względnej wilgotności w Tarnopolu.** ***(Die relative Feuchtigkeit in Tarnopol).*** *(De l'état hygrométrique à Tarnopol).* Mémoire présenté par M. M. P. Rudzki m. c.

(Planche XV.)

Zur Berechnung der relativen Feuchtigkeit benutzte der Verf. die Beobachtungen von 1861 bis 1900 inklusive. Dieses Material ist nicht ohne Lücken, da die Mittel nur aus 421 Monaten gebildet wurden und 36 Monate ausgeschlossen werden mussten. Da ferner das Material von 1861 bis 1893 nicht ganz zuversichtlich ist, so beschränkte sich der Verf. bei der Berechnung der Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit, sodann bei der Zusammenstellung der Minima und der Häufigkeit unter 50% nur auf die Periode von 1893 bis 1900, da seit dem 1. Oktober 1893 die Lage der Station und die Aufstellung der Instrumente eine viel freiere war als vorher.

Das Jahresmittel der Feuchtigkeit beträgt 82%. Im Vergleich mit anderen, zwar etwas entfernteren Stationen (Krakau, Breslau, Warschau, Kiew, Nowa-Aleksandrya und Kalocza) scheint dieses Mittel zu hoch zu sein, es stimmt aber mit den Aufzeichnungen des Hygrometers und dem Mittel aus den letzten sieben Jahren, die am zuversichtlichsten sind. Dieses zu hohe Jahresmittel hat seine Ursache nicht in einem Beobachtungsfehler, sondern es ist eine lokale Erscheinung, und zwar ist es bedingt durch die Nähe des Tarnopoler Teiches, der sich im Westen und Nordwesten der Stadt befindet und gegen 600 m von der Station entfernt ist. Seine Ausdehnung beträgt 260 ha und mit den ihn umgebenden Sümpfen und Wiesen bis 483 ha. Dieser Teich erhöht die Feuchtigkeit von Tarnopol; dieselbe ist also nicht massgebend für Podolien, da diese gewiss in einiger Entfernung vom Serethtale um einige Perzente trockener ist als Tarnopol. Besonders feucht werden die Jahreszeiten (namentlich der Sommer), in denen die W — und NW — Winde die vorherrschenden sind, da dieselben im allgemeinen feucht sind und dazu noch üben den Teich streichen, ehe sie zur Station gelangen. Die Feuchtigkeit derjenigen Winter, in denen die SE — Winde vorherrschen und der Teich zugefroren ist, wird man als massgebend für ganz Podolien ansehen können.

Was die einzelnen Monate anbelangt, so ist der Jänner mit 92·8% der feuchteste, der Mai mit 70·7% der trockenste Monat; doch ist der Sommer trockener als der Frühling. Im Juni steigt die Feuchtigkeit etwas; im Juli und August hält sie sich in gleicher Höhe, um sodann stetig bis zum Jänner zu steigen. Der jährliche Gang ist regelmässig, wie es einer kontinentalen Station entspricht. Das Maximum der Feuchtigkeit haben wir zur Zeit der niedrigsten Tempertur; während des Vorherrschens der trockenen E — und NE — Winde im April und Mai fällt die Feuchtigkeit auf ihr Minimum; hernach steigt dieselbe auch während des Temperaturmaximums, und zwar hauptsächlich unter dem Einflusse der feuchten W — und NW — Winde und der Zunahme der Niederschläge. Zugleich mit der Abnahme der Temperatur im September beginnt die Feuchtigkeit zu steigen.

Auch in Bezug auf die Minima der relativen Feuchtigkeit erweist sich der Mai als der trockenste, der Dezember jedoch als der feuchteste Monat. Die Ursache dessen, dass in dieser Zusammenstellung der Dezember und nicht der Jänner als der feuchteste Mo-

nat auftritt, liegt wohl nur darin, dass die Bewölkung des ersten Monats grösser ist als die des zweiten, was zur Folge hat, dass im Januar kleinere Minima als im Dezember vorkommen.

Berechnet man die Häufigkeit der Feuchtigkeit unter 50%, so weist der Mai die grösste Anzahl der Tage mit einer Feuchtigkeit unter 50%, der Dezember die geringste auf.

Die jährliche Periode der Feuchtigkeit wurde auch in Tagesmitteln berechnet und graphisch in der beigegebenen Tabelle dargestellt. Trotz der doppelten Ausgleichung ist der jährliche Gang noch sehr unregelmässig; doch dürfen wird zuversichtlich schliessen, dass das Maximum mit 93·2% auf den 17. und 18. Jänner entfällt, also genau auf den Tag des Temperaturminimums; das Minimum mit 69·4% auf den 30. April. Die grösste Abnahme finden wir in den ersten Apriltagen, die grösste Zunahme vom 7. bis 17. Oktober.

Das Jahresmittel der Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit von Tag zu Tag beträgt 6·12%; die grösste Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit finden wir im Mai, die geringste im Dezember. Die absolut grösste Veränderlichkeit trifft man im Mai 1899 an; dieselbe beträgt 11·54%. Die grösste Zunahme und Abnahme der Veränderlichkeit fällt auf den Mai; die kleinste auf den Dezember. Die maximale Zunahme mit 34·3% und 34·4% haben wir im Mai und Juli; die maximale Abnahme mit 29·7% im August. Die grösste Häufigkeit der Zunahme finden wir im März, der Abnahme im Juli; die geringste Häufigkeit der Zunahme entfällt auf den Februar, Juli und August, die der Abnahme aber auf den März. Die grösste Häufigkeit der Veränderlichkeit von 0—5% hat der Winter besonders der Jänner; im Sommer haben wir die grösste Häufigkeit von 5—10%; die grösste Anzahl aber der Veränderlichkeit von über 10% bis 45% treffen wir im April und Mai an.

Die relative Feuchtigkeit scheint von der Bewölkung am meisten abzuhängen, denn an heiteren Tagen haben wir das Maximum im Februar mit 87·6% und das Minimum im Mai mit 57·1%, an trüben aber das erste im November mit 93·2%, das zweite im April mit 85·0%. Die Differenz beträgt also an trüben nur 7·5%, an heiteren 30·5%. Das Maximum an heiteren Tagen ist kleiner als das Minimum an trüben. Die Abhängigkeit der Feuchtigkeit von der Temperatur kann man nur im Sommer nachweisen, wo dieselbe an kühlen Tagen 81·4%, an heissen 68·8% beträgt. Was die Winde

anbelangt, so sind im Winter die E — Winde feucht, die W — Winde aber trocken; im Sommer umgekehrt. Im Frühjahr und im Herbst sind die N — Winde feucht und S — Winde trocken.

---

44. M. K. DZIEWOŃSKI. **O dekacyklenie (trójnaftylenbenzolu) nowym węglowodorze aromatycznym i czerwonym związku siarkowym, dwunaftylentiofenie.** ***(Über Dekacyklen (Trinaphtylenbenzol), einen neuen hochmolekularen aromatischen Kohlenwasserstoff und über Dinaphtylenthiophen, einen roten Thiokörper).*** *(Sur un nouvel hydrocarbure aromatique: le trinaphtylènebenzène ou décacyclène et sur un derivé du thiophène de couleur rouge: le dinaphtylènethiophène).* Mémoire présenté par M. St. Niementowski m. c.

Nach der Veröffentlichung meiner ersten Arbeit[1]) über die Einwirkung von Schwefel auf Acenaphten teilte Herr P. Rehländer[2]) mit, dass er dasselbe Thema mit nahezu den gleichen Resultaten bearbeitet und als zweiten Teil seiner Inaugural-Dissertation veröffentlicht habe. Den ersten Teil seiner Dissertation „Über einige Azoline der Anissäurereihe", der mit dem Thema des zweiten Teiles in gar keiner Beziehung steht, hat H. Rehländer in den Berichten d. D. ch. Ges.[3]) abdrucken lassen, über den zweiten Teil ist aber weder in irgend einer Zeitschrift noch in einem Nachschlagewerk auch nur die geringste Andeutung zu finden. Unter diesen Umständen werden die Fachgenossen es erklärlich wie verzeihlich finden, dass auch mir die Dissertation des Herrn P. Rehländer unbekannt geblieben ist.

Über einige Derivate des Dinaphtylenthiophens und des Dekacyclens (Trinaphtylenbenzols).

Durch die Einwirkung von konz. Salpetersäure und Brom auf das Dinaphtylenthiophen erhält man entsprehende Substitutionsprodukte desselben, die durch Oxydation in α-Nitro-oder Brom-Derivate der Naphtalsäure übergeführt werden. Diese Nitro-und Brom-naphtalsäuren erwiesen sich als vollkommen identisch mit denen, die durch Oxydation der entsprechenden Acenaphtenderi-

[1]) Bull. de l'Académie des sciences de Cracovie. Février 1903, S. 77.

[2]) Berichte d. D. chem. Ges. B. XXXVI. 962.

[3]) Berichte d. D. chem. Ges. XXXVI. 1583.

vate bekommen werden und deren Konstitution neuerdings von K. Graebe[1]) gründlich erforscht wurde. Es ergab sich also als sichere Tatsache, dass durch die von uns ausgeführte Einwirkung von Brom und Salpetersäure auf das Dinaphtylenthiophen entsprechende Substitutionsprodukte mit den Substituenten in α-Stellung des Naphtylenringes gebildet werden.

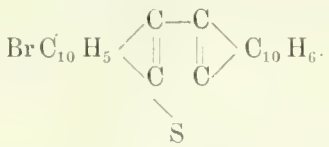
Es wurde auch die Einwirkung vom Brom, Chlor und Salpetersäure auf den gelben Kohlenwasserstoff (Dekacyclen) einem Studium unterzogen und entsprechende Derivate desselben erhalten. Die Oxydationsversuche jedoch, die zum Zweck der Ortsbestimmung der Substituenten unternommen wurden, sind bis jetzt ohne Erfolg geblieben.

(In Gemeinschaft mit Herrn Paul Bachmann).

Bromderivate des Dinaphtylenthiophens.

Lässt man Brom auf eine verdünnte Lösung von Dinaphtylenthiophen in Schwefelkohlenstoff einwirken, so entsteht eine Mischung des Mono-und Dibromproduktes, die sich durch Extraktion mit Chloroform bequem zerlegen lässt, indem das Monobromprodukt in Lösung geht und das Dibromprodukt als in Chloroform unlöslich im Rückstand bleibt.

α-Bromdinaphtylenthiophen $C_{24}H_{11}SBr$.

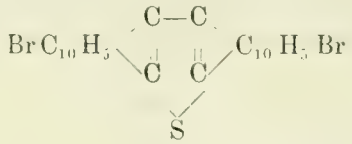


Aus der Lösung in Chloroform bekommt man einen amarantroten Körper, der einige Mal umkristallisiert in reinem Zustande in Form von hellroten Nädelchen erscheint. Die Analyse dieses Körpers hat ergeben, dass es ein Monobromdinaphtylenthiophen ist. Das Monobromdinaphtylenthiophen löst sich ziemlich schwer in Chloroform, Schwefelkohlenstoff, leichter in Toluol, Xylol etc. Es schmilzt bei 292°C.

Gefunden:	Br 19·68 20·02%	S 7·75%
Ber. für $C_{24}H_{11}SBr$	„ 19·46	„ 7·78.

[1]) Ann. der Ch. 327. 1903. S. 77.

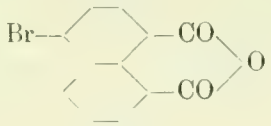
α-α-Dibromdinaphtylenthiophen $C_{24}H_{10}SBr_2$



Nach Behandlung des ursprünglich erhaltenen Gemisches der Bromprodukte mit Chloroform bleibt das Dibromprodukt im Rückstand zurück. Durch mehrmaliges Umkristallisiren desselben aus Nitrobenzol bekommt man einen karminroten Körper in Form von glänzenden kleinen Nadeln. Derselbe schmilzt bei 362 — 463° C, löst sich sehr schwer in Toluol, Xylol; leicht in Nitrobenzol. Die Ergebnisse der Analyse stimmen für die Formel des Dibromdinaphtylenthiophens:

Gef.	Br. 32·55	32·36%.	S 6·62%.
Ber. für $C_{24}H_{10}SBr_2$	„ 32·65		„ 6·53

α-Bromnaphtalsäureanhydrid.



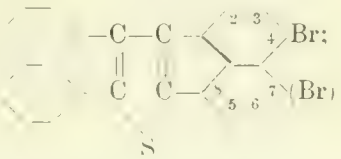
Durch Einwirkung einer essigsauren Lösung von Chromsäure oder von chromsauren Salzen auf Brom- sowie Dibromdinaphtylenthiophen erhält man ein Monobromnaphtalsäureanhydrid. Das bei der Oxydation erhaltene Produkt wird aus Essigsäure umkristallisiert und stellt einen Körper in Form von kleinen, weissen Nadeln vom Schmpt. 210°C vor. Die Analyse ergab Zahlen, die für die Formel eines Bromnaphtalsäureanhydrids stimmen:

Gef.	Br. 29·10	29,18%.	C 52·27.	52,08%
Ber. für $C_{12}H_5BrO_3$	„ 28·98		„ 51·98	
			H 1·89	2,00%
			„ 1·80	

Die Eigenschaften unseres Oxydationskörpers stimmen vollkommen mit denen des Produktes überein, das von Blumenthal [1]) durch Oxydation des Bromacenaphtens im J. 1874 erhalten und unrichti-

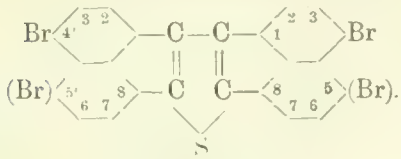
[1]) Ber. d. D. Chem. G. 7. 1902 [1874].

gerweise als Bromnaphtalsäure angesehen wurde. Neuerdings wurde von K. Graebe u. M. Guinsbourg[1]) die α-Stellung des Bromatomes im Naphtalinkern dieser Verbindung bewiesen. Daraus ergibt sich auch die Stellung des Bromatoms in unseren Bromprodukten, die durch Oxydation in dasselbe α-Bromnaphtalsäureanhydrid übergeführt werden. Es ergibt sich nämlich für das Monobromprodukt die Formel des α-Bromdinaphtylenthiophens:



für das Dibromprodukt dagegen diejenige des

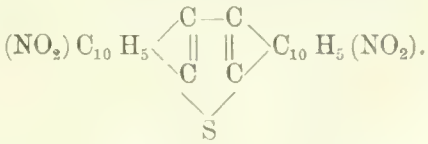
α-α-Dibromdinaphtylenthiophens:



Es war unmöglich, auf dem Wege der Oxydation noch zu entscheiden, ob die Bromatome die Stellung 4 oder 5 (bezw. 4′ oder 5′) in Naphtylenkernen der genannten Verbindungen einnehmen, da sowohl 4-wie 5-Bromdinaphtylenthiophene immer dieselbe α-Bromnaphtalsäure geben müssten.

(In Gemeinschaft mit Herrn Eligio Dotta).

α-α-Dinitrodinaphtylenthiophen



Bringt man das Dinaphtylentiophen in sehr gut gekühlte, abgerauchte Salpetersäure, so entsteht ein grauviolettes Nitroprodukt, welches durch Eingiessen der Nitrierungsmasse in eisgekühltes Wasser ausgeschieden wird. Wie die Analyse ergibt, stellt diese Sub-

[1]) Ann. der Chem. 1903. B. 327.

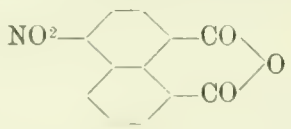
stanz ein Dinitroprodukt vor. Unsere Bemühungen, Nitrirungsbedingungen für ein Mononitroprodukt zu finden, sind bis jetzt erfolglos geblieben.

Das Dinitroprodukt ist schwer löslich im Xylol und Cumol, leichter löslich im Nitrobenzol. Aus demselbem Lösungsmittel umkristallisiert stellt das Dinitrodinaphtylenthiophen eine kristallinische, dunkelviolette, aus kleinen Nadeln bestehende Masse vor. Beim Erwärmen schmilzt der Körper nicht, höher erhitzt sublimiert er unter teilweiser Zersetzung. Die Resultate der Analyse waren folgende

Gef.	N	6·25 6·61%
Ber. für $C_{24}H_{10}S(NO_2)_2$	„	6·63

Um die Stellung der beiden Nitrogruppen in den Naphtylenkernen des Dinitrodinaftylenthiophens näher zu erforschen, wurde diese Verbindung der Oxydation unterworfen, wobei die α-Nitronaphtalsäure entstand.

α-Nitronaphtalsäureanhydrid.



Derselbe bildet sich, wenn man auf in kochenden Eisessig suspendiertes Dinitrodinaphtylenthiophen eine essigsaure Lösung von Chromsäure so lange einwirken lässt, bis die feste Substanz vollkommen in Lösung geht. Durch Ausfällen mit Wasser bekommt man ein gelbes Produkt, welches aus Essigsäure umkristallisiert wird. Dasselbe Oxydationsprodukt in Form von orangegelben Nadeln erhalten schmilzt bei 229—222°C. Aus der Analyse ergibt sich, dass es ein Nitronaphtalsäureanhydrid ist:

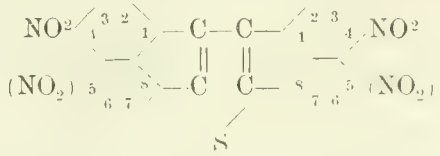
Gef.	N	5·79%
Ber. für $C_{24}H_{10}S(NO_2)^2$	„	5·76%.

Dieses Nitronaphtalsäureanhydrid erwies sich identisch mit demjenigen, welches zuerst von Quincke[1]) entdeckt und dann von K. Graebe u. N. Briones[2]) untersucht und als α-Nitroderivat der Naphtalsäure erklärt wurde.

[1]) Ber. d. D. chem. Ges. 21. 1455.

[2]) Ann. der Ch. 1903. Februar. 327.

Es ergibt sich also auch für unser Dinitroprodukt, welches bei der Oxydation dasselbe α-Nitronaphtalsäureanhydrid liefert, dass es ein α-α-Dinitroderivat des Dinaphtylenthiophens ist:



Es soll jedoch auch hier angedeutet werden, dass beide Nitrogruppen sowohl Stellung 4 wie 5 (bzw. 4′ wie 5′) der beiden Naphtylenringe einnehmen können und dadurch mehrere Isomere existieren sollten. Diese müssten natürlich durch Oxydation in dieselbe α- Nitronaphtalsäure übergeführt werden.

Trinitrodekacyclen. $C_{36}H_{15}(NO_2)^3$.

Diesen Körper haben wir beim Oxydationsversuch mittels verdünnter Salpetersäure bei höherer Temperatur und Druck erhalten. An Stelle der erwarteten Oxydation des Kohlenwasserstoffes fand hier eine Nitrierung statt. Die genannte Reaktion wird auf diese Weise ausgeführt, dass man Dekacyclen im geschlossen Rohr mit verdünnter Salpetersäure bis auf 200°C erhitzt. Das Produkt der Reaktion wird in Form von glänzenden, dunkelroten Nädelchen erhalten. Dasselbe wird durch Extraktion mit Nitrobenzol vollkommen gereinigt. Der nämliche Körper löst sich in gewöhnlichen Lösungsmitteln nur spurenweise. In Alkalien sowie in kalter konz. Schwefelsäure ist er unlöslich. Beim Erhitzen zerlegt er sich ohne zu schmelzen unter Verpuffen. Die Analyse ergab, dass es ein Trinitroderivat des Dekacyklens ist:

Gef.	C 73·59. 73·64%	H 2·80. 2·89%	N 7·25. 6·87%
Ber. für $C_{36}H_{15}(NO_2)_3$ „	73·84.	„ 2·56.	„ 7·17%

Tribromdekacyclen. $C_{36}H_{15}Br_3$.

Erhitzt man berechnete Mengen des Kohlenwasserstoffes mit Brom in Schwefelkohlenstoff bis zum Sieden des Lösungsmittels, so entsteht nach einiger Zeit eine voluminöse, amorphe, dunkelgelbe Masse, die durch Umkristallisieren aus Nitrobenzol ein hellgelben, mikrokristallinischen Körper ergibt, der sich als Tribromdekacy-

clen erwies. Es ist in gewöhnlichen Lösungsmitteln weniger löslich als der Kohlenwasserstoff selbst und schmilzt bei 397—400°C.

Die Resultate der Analyse beweisen, dass es ein Tribromdedekacyclen sei:

Gef.	Br 34·73; 34·94%
Ber. für $C_{36}H_{15}Br_3$	„ 34·93

Nonochlordekacyclen. $C_{36}H_9Cl_9$.

Lässt man einen Chlorstrom so lange durch eine Suspension von Dekacyclen in Schwefelkohlenstoff laufen, bis alle Substanz in Lösung geht, so erhält man einen Körper von hohem Chlorgehalte, nämlich Nonochlordekacyclen. Derselbe stellt eine gelbe, amorphe Masse vor, die durch fraktioniertes Ausfällen von Acetonlösung durch Wasser gereinigt wird. Auf diese Weise erhält man eine amorphe, hellgelbe Substanz, die in gewöhnlichen Lösungsmitteln leicht löslich ist und beim Erwärmen (bei 215—218°C) sich zersetzt.

Gef.	Cl 41·90. 42·04%
Ber. für $C_{36}H_9Cl_9$	„ 42·01

— —

Unsere Versuche, die Stellung der Substituenten in den Naphtylenringen der Substitutionsprodukte des Dekacyklens (Trinaphtylenbenzols) durch Oxydation zu bestimmen, sind bis jetzt ohne Erfolg geblieben.

Freiburg (Schweiz). II chemisches Universitätslaboratorium.

---

45. M. L. MARCHLEWSKI m t. **Filoerytryna, nowa pochodna chlorofilu.** ***(On phylloerythrine, a new derivative of chlorophyll).*** *(Sur la phylloérythrine).*

(Planche XVI.)

The changes undergone by chlorophyll in passing through the animal organism have been already several times the subject of more or less exhaustive studies, and the results hitherto obtained seemed to point out, that the products formed may be compared with those formed when acids act upon chlorophyll in vitro, viz. that the latter taken in the food by herbivora is transfered into phylloxanthin or phyllocyanin. Somewhat different results were

obtained E. Schunck[1]). This author isolated from faeces of a cow a substance, which he called scatocyanin, the chloroformic solution of which showed a spectrum identical with that of phyllocyanin, but whose solutions are crimson. With the same problem I myself have been occupied, hoping to find in the faeces of herbivora reduction products of chlorophyll. I expected to find there at least urobilin which might have been formed by spontaenous oxidation of haemopyrroline, which, as has been shown by Nencki and myself[2]), is the final reduction product of chlorophyll and its coloured derivatives. However various experiments gave a negative result in this respect, and instead I came across another body which at the first glance had much likeness to Schunck's scatocyanin and might at first be taken for the latter. but a more minute examination pointed with certainty to the conclusion that the two substances are quite different. The comparison of the substance obtained by myself, which I propose to call phylloerythrine, with Schunck's scatocyanin could have been carried out only on the basis of spestroscopic studies, as Schunck's substance, judging from the drawings given by this author, possesses very characteristic optical properties.

I obtained phylloerythrine in the following manner. Fresh faeces of a cow, fed on fresh grass only, was extracted in the cold with chloroform. The extract obtained possessed an olive green colour. After filtering from the undissolved substances the chloroform was distilled off. During the latter process, or after standing for some time of the residue. there were formed violet glittering crystalls. which represent the new substance, phylloerythrine. In order to purify it the crystalls were first treated with cold chloroform, which removes a great amount of impurities, leaving the crystalls already in a comparatively pure state. In order to remove the last traces of impurities. the crystalls were first boiled with alcohol in which they are scarcely soluble and then recrystallised twice from boiling chloroform. On account of the small solubility in the last named solvent the recrystallisation is done suitably in a Soxhlet extracting apparatus. The crystalls obtained in this way appear, when examined through a microscop, well developed. The following forms are found most frequently:

[1]) Proc. of. the Royal Society Vol. 69, p. 307.

[2]) This Bull. 1901 p. 277.

In mass the crystalls appear to be coloured dark brownish red violet, but single crystalls observed through a magnifying glass possess a brownish colour. The solution in chloroform shows a cherry red colour and does not fluoresc. Concentrated solutions cause in the spectrum three bands, and more diluted ones four, the position of which corresponds to the following wave lengths:

Band I: λ — 642 — 640
„ II: λ — 606 — 581
„ III: λ — 577 — 557
„ IV: λ — 536 — 515

The first band is very indistinct, faint and narrow and plainly visible only in more concentrated solutions. The second and third bands unite in concentrated solutions. in more diluted the second is placed on the D line and appears broader but fainter than the third band. Lastly the fourth, behind the E line is still fainter than the second band. According to their intensities these bands may be placed therefore in the following order:

III. II. IV. I.

Scatocyanin Schunck's causes in chloroformic solutions five bands „almost identical with those of phyllocyanin", and differs therefore very considerably from phylloerythrine.

The absorption spectrum of acetic acid solutions of phylloerythrine does not differ very considerably from that of chloroformic solutions. The first band however which appears already faint in the latter solutions is still fainter. scarcely noticeable in acetic acid solutions. The second and third bands occupy nearly the same positions in both cases, but they do not differ so markedly as regards the intensity, and the third band has a very distinct shadow on the more refrangible side. The fourth band in the green part of the spectrum differs but little from the corresponding band shown by the chloroformic solution. In wave lengths the positions of these bands may be expressed as follows:

Band I: λ — about 640
„ II: λ — 604 — 585
„ III: λ — 576 — 558
„ IV: λ — 531 — 518

Scatocyanin possesses according to Schunck a very different spectrum in acetic acid solutions. According to him the first band of scatocyanin is placed on the D line, the fourth just behind E and between them are still two, more or less well marked, bands, a spectrum distinctly different from that of phylloerythrine.

Under the influence of hydrochloric acid the spectrum and colour of an acetic acid solution of phylloerythrine undergoes a very characteristic change. The colour turns bluish violet and if sufficiently diluted, the solution causes four bands in positions which differ widely from those occupied by the original bands. In the orange we have now two narrow faint bands, behind the sodium line a broad dark band and finally in the green a badly defined faint band, The positions of these bands are:

Band I: λ — 625 — 615
„ II: λ — 615 — 606
„ III: λ — 584 — 556
„ IV: λ — about 536 the less refrangible side.

In concentrated solutions the two first bands unite into one. the second draws closer towards the Na line and the fourth appears more distinct.

Concentrated sulphuric acid dissolves phylloerythrine with a grass green colour and the solution causes several badly defined bands, except the first in the red which is well developed. In this respect phylloerythrine reminds one of scatocyanin. As regards the absorption of light of shorter wave length, I found that very dilute chloroformic solutions of phylloerythrine cause two bands, one in front of k_β, the other behind the latter line and on diluting still more this second band in the more refrangible part disappears altogether. (Plate XVI).

The chemical properties of phylloerythrine unfortunately could not be investigated closely for want of a sufficient quantity of the substance. I have only been able to ascertain that despite its insolubitity in alkalies phylloerythrine forms compounds with salts of

certain metals such as copper and zinc. We have here either a case of formation of ordinary salts or double compounds similar to those formed by phyllocyanin, which have been studied so thoroughly by E. Schunck. The acetic acid solution of phylloerythrine treated with zinc acetate turns green, red by transmitted light. In the spectrum it causes three bands:

Band I: λ — 628 — 603
„ II: λ — 575 — 559
„ III: λ — 533 — 517

An analogous compound is formed by copper acetate.

Phylloerythrine possesses also basic properties as shown by the changes caused in its spectrum by mineral acids.

Taking into account all the properties of phylloerythrine as described above, the conclusion may be drawn that this substance is related closely to phylloporphyrin, obtained from chlorophyll by the action of alkalies at high temperatures, and that therefore the change undergone by chlorophyll, when passing through the animal body, is far more energetic than was supposed hitherto to be the case. A further study of this new and interesting substance I hope to be able to undertake later on.

Faeces of cows fed on materials not containing chlorophyll do not yield phylloerythrine, a proof that the latter substance is really a derivative of chlorophyll and not of the red colouring matter of the blood.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Leona Marchlewskiego.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

21 Listopada 1903.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise
(Spółka wydawnicza polska)
à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to. vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXXIII (vol. I épuisé) — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 10 k. — Vol. V, VII. Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Iagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI. XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 6 k. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 k. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski 4 k. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed V Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674. ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674—1683 ed. Waliszewski 30 k. — Vol IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed Zakrzewski et Hipler. 30 k. Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo, 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol. I. II. IV. V. épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo. 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—0. — 15 k. 00 h. Dickstein S., »Hoene Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoene Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

N° 9. NOVEMBRE 1903.

12.229

BULLETIN INTERNATIONAL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1903.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE :

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR : S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de M. Léon Marchlewski,
Mebre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 9. **Novembre** **1903.**

Sommaire: 47. M. C. RUSSJAN. Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1-er ordre.
48. M. W. STEKLOFF. Sur la théorie des séries trigonométriques.
49. M. L. K. GLIŃSKI. Les glandes à pepsine dans la partie supérieure de l'oesophage.
50. M. A. WRZOSEK. Recherches sur les voies de passage des microbes du tube digestif dans les organes internes à l'état normal.

Séance du lundi 9 Novembre 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

47. M. C. RUSSJAN. **Metoda Pfaffa całkowania równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Część druga.** ***(Die Pfaffsche Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. Zweite Mitteilung).*** *(Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1-er ordre).* Mémoire présenté par M. K. Żorawski m. c. à la Séance du 12 Octobre.

§ 1.

Wir verdanken Herrn G. Morera die ersten Untersuchungen über die Pfaffsche Methode der Integration des Systems der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \Theta_i\left((x_1 \ldots x_n \frac{\partial z}{\partial x_{i+1}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad (i = 1, 2 \ldots m) \tag{I}$$

in Involution. Dieser Autor hat den Zusammenhang zwischen der Integration dieser Gleichungen und derjenigen des ersten Pfaffschen Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen für den Differentialausdruck

$$dz - \Theta_1 dx_1 - \ldots - \Theta_m dx_m - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots - p_n dx_n :$$

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+j} &= -\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} dx_\beta \text{ [1]} \\ dp_{m+j} &= \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} dx_\beta . \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2 \ldots n - m \tag{II}$$

[1]) Es fehlt in diesem Systeme noch die Gleichung, die dz bestimmt.

gezeigt und mit Hilfe der Mayerschen Transformation die neue Liesche Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen (I) in der Mayerschen Form gegeben (Rendic. de l'Instit. R. Lomb., 1883).

Saltikow hat neuerdings (Comp. Rend., 1899) die Gleichungen (II) verallgemeinert. Ich beabsichtige in dieser Abhandlung die Pfaffsche Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichunhen in ihrer allgemeinsten Form darzustellen. Sie enthält, wie schon bemerkt ist[1]), die analytisch-geometrischen Untersuchungen von S. Lie (M. Ann., Bd. 9) und gibt seiner neuen Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen die analytische Form, die ihr am meisten entspricht. Sie enthält auch die Theorie der verallgemeinerten Hamiltonschen Differentialgleichungen und den Zusammenhang zwischen der Integration derselben und derjenigen der partiellen Differentialgleichungen.

Ich benutze die möglichst kleinste Anzahl der Hilfssätze über den Pfaffschen Differentialausdruck, nämlich nur die zwei, die im § 1 der ersten Mitteilung erwähnt sind.

§ 2.

1. Es sei ein System von $k \leqslant n+1$ partiellen Differentialgleichungen 1. O.

$$(1) \qquad F_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots k),$$

welche in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ unabhängig sind, vorgelegt.

Wenn ihr gemeinsames Integral

$$z = f(x_1 \ldots x_n)$$

ist, so sehen wir, wenn wir $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ durch resp. p_i, f_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ bezeichnen, dass $n+1$ Gleichungen

$$(a) \qquad z = f(x_1 \ldots x_n), \quad p_i = f_i(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

den Gleichungen

$$(1') \qquad F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots k)$$

[1]) Erste Mitteilung, Bull. intern. l'Acad. des Sc. de Cracovie für Juli 1903.

und der Gleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

genüge leisten. $n+1$ Gleichungen (a) bilden also ein System von $n+1$ Integralen der Gleichung

$$\Omega = 0$$

von der Beschaffenheit, dass es den gegebenen Gleichungen (1′) genüge leistet und in Bezug auf p_i $(=1, 2 \ldots . n)$ sich auflösen lässt. Wenn man umgekehrt die Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

durch die kleinste Anzahl $n+1$ der Integrale integriert, die die gegebenen Gleichungen (1′) erfüllen und in Bezug auf p_i $(i=1, 2 \ldots n)$ unabhängig sind, so bekommt man daraus durch Elimination dieser Variablen eine Gleichung

$$z = f(x_1 \ldots x_n),$$

die offenbar ein gemeinsames Integral der gegebenen Differentialgleichungen (1) bildet. Wenn das System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$, die die gegebenen Gleichungen (1′) erfüllen, sich in Bezug auf p_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ nicht auflösen lässt, so dass man nach Elimination dieser Variablen mehr als eine Relation zwischen z, x_i bekommt, so bildet ein solches System kein gemeinsames Integral der Differentialgleichungen (1) im gewöhnlichen Sinne. Wenn man aber die Definition des gemeinsamen Integrals der gegebenen Differentialgleichungen (1) verallgemeinert, so nennt man mit S. Lie ein solches System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ immer ein gemeinsames Integral der gegebenen Differentislgleichungen (I). Die Integration der Differentialgleichungen (I) im allgemeinsten Sinne besteht also in der Bestimmung des Systems (A) der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$, die die gegebenen Gleichungen (1′) erfüllen. Da wir dieses Problem in der allgemeinsten Form betrachten werden, so setzen wir voraus, dass die gegebenen Differentialgleichungen (1) überhaupt in Bezug auf irgend welche k Grössen $x_i, z, \frac{\partial z}{\partial x_i}$ unabhängig sind.

2. Wir wollen vor allem die notwendigen Bedingungen für die Existenz des gemeinsamen Integrals der gegebenen Differential-

gleichungen (1) suchen. Wir können hierbei immer voraussetzen, dass jede der gegebenen Gleichungen (1′) die Variablen p_i enthält. Das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (1) bildet gleichzeitig ein Integral jeder von diesen Gleichungen z. B. der Gleichung

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0.$$

Das nichtsinguläre Integral dieser letzten lässt sich in folgender Weise (Satz II, erste Mitteilung) bestimmen: Man soll die Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n+2$ Integrale

$$\Phi_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n), \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$

wo $\varphi(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ kein Integral des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F_i}{\partial p_1}} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F_i}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum p \frac{\partial F_i}{\partial p}} =$$

$$\text{(B}_1\text{)} \qquad = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F_i}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_i}{\partial z}} = \ldots\ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F_i}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F_i}{\partial z}}$$

bildet, integrieren und dann die Grössen x_i^0, z_0, p_i^0 aus den Gleichungen (b) und aus den Gleichungen

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad i = 1, 2 \ldots n \\ z &= z\,(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \ldots p_n^0) \quad i = 1, 2 \ldots n, \end{aligned} \qquad \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_1} \neq 0\right)$$

die das System der Hauptintegrale des Systems (B_1) darstellen, eliminieren. Die erhaltenen $n+1$ Gleichungen

$$\text{(d)} \qquad \vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n), \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0,$$

stellen ein nichtsinguläres Integral der Differentialgleichung

$$F_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z, \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

dar. Die Gleichungen (d) sind offenbar ein System der $n+1$ Integrale des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen (B_1).

Wir können dieses System (d) noch in folgender Weise erhalten. Wir können aus den Gleichungen (c) $n+2$ der Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ mit Hilfe der Gleichungen (b) eliminieren. Mann bekommt dann das System

$$\begin{aligned} x_i &= x_i'(x_1 a_1 \ldots a_{n-1}) \quad i = 1, 2 \ldots n \\ z &= z'(x_1 a_1 \ldots a_{n-1}) \\ p_i &= p_i'(x_1 a_1 \ldots a_{n-1}) \quad i = 1, 2 \ldots n, \end{aligned} \tag{c'}$$

wo $a_1 \ldots a_{n-1}$ die $n-1$ übrig gebliebenen Grössen der Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ bedeuten. Diese Gleichungen stellen offenbar ein System der Integrale des Systems (B_1) dar.

Wenn wir aus diesen letzten Gleichungen die Grössen $a_1 \ldots a_{n-1}$ eliminieren, so bekommen wir dann die Gleichungen (d). Wir können also das Integral (d) der Differentialgleichung

$$F_i\left(x_1 \ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

in der Form (c') darstellen, wo $a_1 \ldots a_{n-1}$ die Parameter sind.

Es folgt daraus, dass jedes gemeinsame Integral der gegebenen Differentialgleichungen (1), das kein singuläres Integral der Differentialgleichung

$$F_i\left(x_1 \ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

ist, die Gestalt (c') besitzen soll. Da das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (1) der Differentialgleichung

$$F\left(x_1 \ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

genügt, so sollen die Gleichungen (c') der Gleichung

$$F_j(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$$

genüge leisten. Es folgt daraus, das infolge derselben Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \sum_2^n{}_\alpha \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x_1} = 0 \tag{f}$$

ist; da aber die Gleichungen (c'), wo $a_1 \ldots a_{n-1}$ konstant sind, die Integrale des Systems (B_1) sind, so ist infolge dieser Gleichungen und der Gleichung (f)

$$\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_j}{\partial z}\right)\frac{\partial F_i}{\partial p_\alpha}-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha}=0 \quad (i, j=1, 2 \ldots k).$$

Wir haben also den Satz I: Das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (1)

$$F_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0 \quad (i=1, 2 \ldots k)$$

erfüllt die Differentialgleichungen

$$[F_j, F_i]=\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\frac{\partial F_i}{\partial p_\alpha}-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha}=0$$
$$(j, i=1, 2 \ldots k).$$

Jede der neuen Gleichungen

$$[F_j, F_i]=0 \quad (j, i=1, 2 \ldots q),$$

wo p_α durch $\frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ ersetzt ist, stellt die Differentialgleichung dar, die das gemeinsame Integral der gegebenen Differentialgleichungen (1) besitzt. Wenn man die unabhängigen aus diesen Gleichungen und die unabhängigen von den Gleichungen (1) zu diesen letzten hinzufügt, so reduciert sich unser Problem auf die Integration der $k_1 \geqslant k$ Differentialgleichungen. Wir verfahren mit diesem letzten Systeme in derselben Weise, wie mit der gegebenen. Wir kommen in dieser Weise zu einem der folgenden drei Fälle: Wenn die erhaltenen k_1 Differentialgleichungen unverträglich sind, so haben die vorgelegten Differentialgleichungen (1) kein gemeinsames Integral. Wenn zweitens die Anzahl der so erhaltenen unabhängigen Differentialgleichungen, die das gemeinsame Integral des Systems (1) besitzen, grösser als $n+1$ ist, so schliessen wir wiederum daraus, dass die gegebenen Differentialgleichungen (1) infolge der Definition ihres gemeinsamen Integrals kein solches Integral haben.

Im dritten Falle überschreitet die Anzahl der so erhaltenen Gleichungen eine gewisse Zahl $m \leqslant n+1$ nicht, wenn man dieses Verfahren fortsetzt, d. h. in diesem Falle erhalten wir $m \leqslant n+1$ Differentialgleichungen

$$(1) \qquad F_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0 \quad i=1, 2 \ldots m.$$

von der Beschaffenheit, dass die Gleichungen

$$[F_j, F_i] = 0 \quad (i, j = 1, 2 \ldots m),$$

wo $p_\alpha = \frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ ist, die Folge der ersten sind.

Die m erhaltenen Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m), \tag{I'}$$

stellen in der grössten Anzahl m die Integrale aus dem Systeme (A) der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ dar, die ohne die Integration erhalten werden können, da, wie wir uns später überzeugen werden, die übrigen $n+1-m$ Integrale aus diesem Systeme (A) nur durch die Integration erhalten werden können. Wir sehen daraus, dass die notwendige Bedingung dafür, dass die gegebenen k Differentialgleichungen ein gemeinsames Integral haben, darin besteht, dass die Anzahl m der so erhaltenen Differentialgleichungen (I) die Zahl $n+1$ nicht überschreite. Wir werden sehen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist.

3. Wollen wir jetzt übergehen zur Bestimmung der übrigen $n+1-m$ Integrale aus dem Systeme (A) im Falle $m < n+1$, und zum Beweise, dass die Gleichungen (I') im Falle $m = n+1$ schon das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (1) bilden.

Wir sehen, dass die Integration der gegebenen Differentialgleichungen (1) auf die Integration der m $(k \leqslant m \leqslant n+1)$ Differentialgleichungen (I) von der Beschaffenheit, dass die Gleichungen

$$[F_j, F_i] = 0 \quad (j, i = 1, 2 \ldots m),$$

wo $p_\alpha = \frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ ist, die Folge der Gleichungen (I) sind, hinauskommt.

Das System der Differentialgleichungen (I) von dieser Beschaffenheit heisst ein vollständiges. Jedes System der Differentialgleichungen (1) kann nur dann ein gemeinsames Integral haben, wenn es ein vollständiges ist oder wenn es sich auf ein solches in der oben gezeigten Weise reducieren lässt

Wir werden zuerst einige Eigenschaften des vollständigen Systems (I) angeben. Wir werden dabei immer voraussetzen, dass die in Betracht kommenden Lösungen des Systems (I) einfach sind.

a) Das vollständige System (I') geht nach der Auflösung in Bezug auf irgend welche m der Grössen x_i, z, p_i wiederum in ein voll-

ständiges System über. Es sei das vorgelegte System (I′) in der aufgelösten Form:

$$\text{(f)} \qquad x_i - \varphi_i = 0 \quad p_j - \psi_j = 0 \quad (i = \alpha \ldots \beta,\ j = \gamma \ldots \delta)$$

wo z durch x_{n+1} ersetzt ist. Wir können die Gleichungen (I′) in der Form

$$F_i(x_1 \ldots \varphi_\alpha + y_\alpha, \ldots \varphi_\beta + y_\beta, \ldots p_1 \ldots \psi_\gamma + u_\gamma, \ldots \psi_\delta + u_\delta, \ldots p_n) =$$
$$= F_i'(x_1 \ldots y_\alpha \ldots u_\delta \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1,\ 2 \ldots m)$$

darstellen, wo

$$y_\alpha = x_\alpha - \varphi_\alpha, \ldots y_\beta = x_\beta - \varphi_\beta,\ u_\gamma = p_\gamma - \psi_\gamma, \ldots u_\delta = p_\delta - \psi_\delta \text{ ist.}$$

Wenn wir der Bequemlichkeit halber $y_\alpha \ldots y_\beta$, $u_\gamma \ldots u_\delta$ durch $v_1 \ldots v_m$ bezeichnen, so ist

$$[F_i,\ F_k] = [F_i',\ F_k'] = [(F_i'),\ (F_k')] +$$
$$\sum_s \frac{\partial F_i'}{\partial v_s}[v_s, (F_k')] + \sum_\sigma \frac{\partial F_k'}{\partial v_\sigma}[(F_i'), v_\sigma] + \sum_s \sum_\sigma \frac{\partial F_i'}{\partial v_s}\frac{\partial F_k'}{\partial v_\sigma}[v_s, v_\sigma],$$

wo das Zeichen (F') bedeutet, dass die Funktionen v als Konstanten zu betrachten sind. Setzen wir jetzt statt $x_\alpha \ldots x_\beta$, $p_\gamma \ldots p_\delta$ ihre Werte aus den Gleichungen (f) ein. Die linke Seite verschwindet, da das System (I′) ein vollständiges ist; was die rechte Seite betrifft, so reduciert sich diese Substitution in den Funktionen F' auf die Substitution $v = 0$ und kann diese letztere in den Klammerausdrücken vor der Differentiation ausgeführt sein, wodurch die Funktionen (F') identisch gleich Null werden.

Wir erhalten also

$$\sum_{s,\sigma}\left(\frac{\partial F_i'}{\partial v_s}\frac{\partial F_k'}{\partial v_\sigma} - \frac{\partial F_i'}{\partial v_\sigma}\cdot\frac{\partial F_k'}{\partial v_s}\right)\Big[v_s,\ v_\sigma\Big]_{x_\alpha = \varphi_\alpha, \ldots p_\delta = \psi_\delta} = 0$$
$$i, k = 1, 2 \ldots m).$$

Wir haben $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen, welche linear, homogen in Bezug auf $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ Unbekannten $[v_s, v_\sigma]$ sind. Die Determinante dieser Gleichungen

$$\left|\frac{\partial(F_1'\ldots F_m')}{\partial(v_1\ldots v_m)}\right|_{v=0}^{\frac{(m-1)(m-2}{1.2}} = \left|\frac{\partial(F_1\ldots F_m)}{\partial(x_\alpha\ldots x_\beta\, p_\gamma\ldots p_\delta)}\right|_{x_\alpha=\varphi_\alpha,\ldots p_\delta=\psi_\delta}^{\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}}$$

ist von Null verschieden. Wir erhalten also

$$\left[v_S,\ v_\sigma\right]_{x_\alpha=\varphi_\alpha,\ldots p_\delta=\psi_\delta} = 0 \quad (S,\ \sigma = 1,\ 2\ldots m),$$

d. h. die Gleichungen (f) bilden ein vollständiges System.

b) Wenn die Gleichungen des vollständigen Systems (I′) sich in Bezug auf m der Grössen p_i nicht auflösen lassen, so lassen sie sich in Bezug auf $x_\alpha\ldots x_\beta$, $p_\gamma\ldots p_\delta$ auflösen, wo $z = x_{n+1}$ ist und wo $\alpha,\ldots\beta$, $\gamma,\ldots\delta$ m verschiedene Zahlen der Reihe $1.2\ldots n+1$ sind.

Es folgen nämlich aus den Gleichungen (I′) q Relationen zwischen $x_1\ldots x_{n+1}$. Wir können aus den übrigen $m-q$ Gleichungen (I′) $m-q$ der Grössen p_i z. B. $p_\gamma\ldots p_\delta$ bestimmen. Man kann beweisen, dass die erwähnten q Relationen zwischen $x_1\ldots x_{n+1}$ sich in Bezug auf q der Grössen $x_\alpha\ldots x_\omega$ auflösen lassen, wo $\alpha\ldots\omega$ und $\gamma\ldots\delta$ $n+1$ verschiedene Zahlen der Reihe $1.2\ldots n+1$ sind. Wenn nämlich das nicht der Fall ist, so müssen wir voraussetzen, dass aus diesen q Relationen zwischen $x_1\ldots x_{n+1}$ eine oder mehrere Relationen zwischen $x_\gamma\ldots x_\delta$ allein folgen. Wenn wir eine derselben in der Form, z. B.

$$x_\gamma - \varphi(x_\varepsilon\ldots x_\delta) = 0$$

darstellen und wenn der Wert von p_γ

$$p_\gamma = \psi(x_1\ldots x_{n+1}\, p_\alpha\ldots p_\omega)$$

ist, so soll die Gleichung

$$[x_\gamma - \varphi,\ p_\gamma - \psi] = 0$$

infolge der Gleichungen (I′) erfüllt werden; was aber unmöglich ist, da die linke Seite dieser Gleichung 1 ist. Also lassen sich q Relationen zwischen $x_1\ldots x_{n+1}$ in Bezug auf q der Grössen $x_\alpha,\ldots x_\omega$ z. B. in Bezug auf $x_\alpha\ldots\ldots x_\beta$ auflösen und die gegebenen Gleichungen (I′) des vollständigen Systems bestimmen die Grössen $x_\alpha\ldots x_\beta$, $p_\gamma\ldots p_\delta$, wo $\alpha\ldots\beta$, $\gamma\ldots\delta$ m verschiedene Zahlen der Reihe $1.2\ldots n+1$ sind [1]).

[1]) S. Lie, M. Ann. Bd. 9, p. 277.

c) Die Gleichungen des vollständigen Systems (I') ($m \leqq n$) können durch ein aequivalentes System der Gleichungen

$$\Phi_i(x_1 \ldots x_n z\, p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

von der Beschaffenheit, dass

$$[\Phi_i, \Phi_k] \equiv 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

identisch ist, ersetzt werden. Man nennt mit S. Lie dieses letzte System ein System in Involution Wir werden zu diesem Zwecke eine gewisse Transformation benutzen. Es seien k partielle Differentialgleichungen

$$(a) \qquad f_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots k)$$

gegeben. Die Integration dieses Systems reduciert sich auf die Integration der Differentialgleichung $\Omega = 0$ durch $n + 1$ Integrale, die die gegebenen Gleichungen erfüllen. Wir wollen nun die Gleichung $\Omega = 0$ und die gegebenen Gleichungen auf die neuen Variablen mit Hilfe der Formel

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q, \quad x_i = p_i', \quad p_i = -x_i' \quad (i = 1, 2 \ldots q)$$

transformieren. Wir werden die Gleichungen

$$\Omega = dH - p_1' dx_1' - \ldots\ldots - p_q' dx_q' - p_{q+1} dx_{q+1} - \ldots\ldots - p_n dx_n = 0,$$

$$a' \qquad f_i'\left((x_1' \ldots x_q' x_{q+1} \ldots x_n, H, \frac{\partial H}{\partial x_1'} \ldots \frac{\partial H}{\partial x_q'} \frac{\partial H}{\partial x_{q+1}} \ldots \frac{\partial H}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots k)$$

erhalten. Wir sehen daraus, dass die Integration der gegebenen Differentialgleichungen (a) sich auf die Integration der Differentialgleichungen (a') reduciert. Es erhellt weiter aus den Formeln der Transformation, dssa

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_i'}{\partial p_\alpha'}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_\alpha} = -\left(\frac{\partial f_i'}{\partial x_\alpha'} + p_\alpha' \frac{\partial f_i'}{\partial H}\right), \quad (\alpha = 1, 2 \ldots q)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{q+j}} = \frac{\partial f_i'}{\partial x_{q+j}}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_{q+j}} = \frac{\partial f_i'}{\partial p_{q+j}} \quad (j = 1, 2 \ldots n - q)$$

ist, woraus folgt, dass

$$[f_i, f_j] = [f_i', f_j']$$

ist, d. h., dass das neue System vollständig oder in Involution ist, wenn das ursprüngliche ein solches ist.

Wir wollen uns jetzt zu den Gleichungen (I') wenden.

Wir setzen zuerst voraus, dass diese Gleichungen in Bezug auf m der Grössen p_i z. B. in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ auflösbar sind, und transformieren mit Hilfe der Formel:

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m, \quad x_i = p_i', \quad p_i = -x_i' \quad (i = 1, 2 \ldots m).$$

So erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_i(p_1' \ldots p_m', x_{m+1} \ldots x_n, H - x_1' p_1' - \ldots - x_m' p_m', -x_1' \ldots - x_m', p_{m+1} \ldots p_n) \\ = F_i'(x_1' \ldots x_m' x_{m+1} \ldots x_n, H, p_1' \ldots p_m' p_{m+1} \ldots p_n) = 0 \qquad (\mathrm{I}'') \\ (i = 1, 2 \ldots m), \end{aligned}$$

die ein vollständiges System bilden. Da die Determinante

$$\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_m)} = (-1)^m \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1'}{\partial x_1'} + p_1' \frac{\partial F_1'}{\partial H} & \ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial x_1'} + p_1' \frac{\partial F_m'}{\partial H} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1'}{\partial x_m'} + p_m' \frac{\partial F_1'}{\partial H} & \ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial x_m'} + p_m' \frac{\partial F_m'}{\partial H} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so erhalten wir durch die Entwickelung derselben

$$\frac{\partial(F_1' \ldots F_m')}{\partial(x_1' \ldots x_m')} + \sum_1^m{}_\alpha\, p_\alpha' \frac{\partial(F_1' \ldots F_m')}{\partial(x_1' \ldots x'_{\alpha-1}, H, x'_{\alpha+1} \ldots x_m')} \neq 0.$$

Es folgt daraus, dass nicht alle Determinanten

$$\frac{\partial(F'_1 \ldots F'_m)}{\partial(x_1' \ldots x_m')}, \quad \frac{\partial(F_1' \ldots F_m')}{\partial(x_1' \ldots x'_{\alpha-1}, H, x'_{\alpha+1} \ldots x_m')}$$

gleich Null sind. Setzen wir zuerst voraus, dass

$$\frac{\partial(F_1' \ldots F'_m)}{\partial(x_1' \ldots x_m')} \neq 0$$

ist. Die Gleichungen (I'') lösen sich in Bezug auf $x_1' \ldots x_m'$ in der Form z. B.

$$x_i' = \varphi_i(x_{m+1} \ldots x_n, H, p_1' \ldots p_m' p_{m+1} \ldots p_n) \quad (i = 1, 2 \ldots m). \quad (\mathrm{I}''')$$

Dieses letztes System ist ein vollständiges und die Gleichungen

$$[x_i' - \varphi_i, x_k' - \varphi_k] = 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

sind durch die Gleichungen (I''') erfüllt. Diese letzten Gleichungen enthalten keine der Veränderlichen $x_1' \ldots x_m'$. Sie sind die blossen Identitäten und das System (I''') ist in Involution. Wenn

wir das auf die ursprünglichen Variablen $x_i z p_i$ transformieren, so bekommen wir das System

$$p_i + \varphi_i(x_{m+1} \ldots x_n,\ z - p_1 x_1 - \ldots - p_m x_m,\quad x_1 \ldots x_m p_{m+1} \ldots p_n) = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots m),$$

wo $[p_i + \varphi_i,\ p_k + \varphi_k] = [x_i' - \varphi_i,\ x_k' - \varphi_k] \equiv 0$ ist. Das System

$$p_i + \varphi_i(x_{m+1} \ldots x_n,\ z - p_1 x_1 - \ldots - p_m x_m,\quad x_1 \ldots x_m p_{m+1} \ldots p_n) = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots m),$$

dass mit dem gegebenen (I') aequivalent ist, ist in Involution.

Setzen wir jetzt voraus, dass

$$\frac{\partial(F_1' \ldots F_m')}{\partial(x_\alpha' \ldots x_{\alpha-1}',\ H,\ x_{\alpha+1}' \ldots x_m')} \neq 0$$

ist. Die Gleichungen (I'') lassen sich in Bezug auf $x_\alpha', \ldots x_{\alpha-1}'$, H, $x_{\alpha+1}, \ldots x_m'$ auflösen. Seien sie in der aufgelösten Form

$$x_i' - \psi_i(x_\alpha',\ x_{m+1}, \ldots x_n,\ p_1', \ldots p_m',\quad p_{m+1}, \ldots p_n) = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots \alpha - 1,\ \alpha + 1, \ldots m),$$
$$H - \varphi(x_\alpha',\ x_{m+1}, \ldots x_n,\ p_1', \ldots p_m',\ p_{m+1}, \ldots p_n) = 0. \qquad (\mathrm{I}''')$$

Das letzte System ist wiederum ein vollständiges und die Gleichungen

$$[x_i' - \varphi_i,\ x_k' - \varphi_k] = 0,$$
$$[x_i' - \varphi_i,\ H - \varphi] \quad (i,\ k = 1, 2 \ldots \alpha - 1,\ \alpha + 1 \ldots m)$$

sind durch die Gleichungen (I''') erfüllt; da aber diese Gleichungen die Variablen $x_1, \ldots x_{\alpha-1}$, $x_{\alpha-1} \ldots x_m$, H nicht enthalten, so sind sie blosse Identitäten und ist das System (I''') in Involution.

Wenn wir das auf die ursprünglichen Variablen transformieren, so bekommen wir das System

$$p_i + \varphi_i(-p_\alpha,\quad x_{m+1} \ldots x_n,\quad x_1 \ldots x_m,\quad p_{m+1}, \ldots p_n) = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots \alpha - 1,\ \alpha + 1 \ldots m),$$
$$z - x_1 p_1 - \ldots - x_m p_m - \varphi(-p_\alpha,\ x_{m+1}, \ldots x_n,$$
$$x_1, \ldots x_m,\ p_{m+1} \ldots p_n) = 0.$$

Da

$$[p_i + \varphi_i,\ p_k + \varphi_k] = [x_i' - \varphi_i,\ x_k' - \varphi_k] \equiv 0,$$
$$[p_i + \varphi_i,\ z - x_1 p_1 - \ldots - x_m p_m - \varphi] = [x_i' - \varphi_i,\ H - \varphi] \equiv 0$$

ist, so ist dieses System in Involution. Wenn man diese zwei Fälle zusammennimmt, so hat man solchen Satz II: Um das vollständige System der m Gleichungen (I'), die in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ unab-

hängig sind, durch ein aequivalentes System in Involution zu ersetzen, soll man in diesen letzten z durch $H + x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m$ ersetzen. Die erhaltenen Gleichungen lösen sich immer in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$, oder in Bezug auf $p_1 \ldots p_{\alpha-1}, H, p_{\alpha+1} \ldots p_m$. Wenn man diese Gleichungen in dieser Weise auflöst, und H durch $z - x_1 p_1 - \ldots - x_m p_m$ ersetzt, so bekommt man ein aequivalentes System in Involution [1]).

Gehen wir jetzt zu dem Falle über, wenn die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf m der Grössen p_i sich nicht auflösen lassen.

Man kann beweisen, dass das vollständige System (I′) sich auf ein vollständiges System von der Eigenschaft reducieren lässt, dass seine Gleichungen in Bezug auf m der Grössen p_i sich auflösen, so dass es auch in diesem Falle durch ein aequivalentes System in Involution ersetzt werden kann.

Wir wissen, dass man in diesem Falle das System (I′) in Bezug auf $x_\alpha \ldots x_\beta, p_\gamma \ldots p_\delta$ auflösen kann, wo $\alpha \ldots \beta\, \gamma \ldots \delta$ m verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots n+1$ sind, und $x_{n+1} = z$ is

Setzen wir voraus, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf $x_1 \ldots x_q p_{q+1} \ldots p_m$ sich lösen, d. h. dass

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_q,\ p_{q+1} \ldots p_m)} \neq 0$$

ist. Es seien diese Gleichungen in der aufgelösten Form

$$x_i = \varphi_i (x_{q+1} \ldots x_n,\ z) \quad (i = 1,\ 2 \ldots q),$$

$$p_{q+j} = \psi_{q+j} (x_{q+1} \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_q,\ p_{m+1} \ldots p_n) \quad (j = 1,\ 2 \ldots m - q).$$

Man kann beweisen, dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_q} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_q} + p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_{q+1}}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_{q+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

[1]) Im Falle, wenn die Gleichungen (I′) z nicht enthalten, so geht dieses Verfahren in die Auflösung der Gleichungen (I′) in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ über, was wolbekannt ist.

von Null verschieden ist. Setzen wir voraus, dass sie gleich Null ist. Wir haben nach der Entwickelung

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_q\, p_{q+1} \ldots p_m)} + \sum_1^q{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_{\alpha-1}\, z\, x_{\alpha+1} \ldots x_q\, p_{q+1} \ldots p_m)} \equiv 0.$$

Wenn wir durch die erste Determinante dividieren und $x_1 \ldots x_q$ $p_{q+1} \ldots p_m$ durch ihre Werte ersetzen, so bekommen wir

$$1 - \sum_1^q{}_\alpha\, p_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial z} \quad 0.$$

Diese Identität ist offenbar unmöglich.

Wir wollen jetzt das System (I′) auf die neuen Variablen mit Hilfe der Formel

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q, \; x_i = p_i', \; p_i = -x_i' \quad (i = 1, 2 \ldots q)$$

transformieren. Wir bekommen die Gleichungen

$$F_i'(x_1' \ldots x_q'\, x_{q+1} \ldots x_n,\; H,\; p_1' \ldots p_q',\; p_{q+1} \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m) \quad (\mathrm{I}'')$$

des vollständiges Systems. Wir erhalten infolge der Formel der Transformation

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1'}{\partial p_1'} & \cdots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_1'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_q'} & \cdots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_q'} \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_{q+1}} & \cdots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_{q+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

und die Gleichungen (I″) sind in Bezug auf $p_1 \ldots p_q'\, p_{q+1} \ldots p_m$ auflösbar. Wir können dieses System durch ein System in Involution ersetzen, und wenn man dieses letzte auf die ursprünglichen Variablen transformiert, so erhält man ein System in Involution, dass das gegebene vollständige System (I′) ersetzen kann.

Setzen wir jetzt voraus, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf z, $x_\alpha \ldots x_\beta$, $p_\gamma \ldots p_\delta$ auflösbar sind. Es seien diese

Gleichungen z. B. in Bezug auf $z, x_1, \ldots x_q, p_{q+2}, \ldots p_m$ auflösbar, so dass

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_q z p_{q+2} \ldots p_m)} \neq 0$$

ist, und seien die Werte dieser Variablen

$$z = \varphi (x_{q+1}, \ldots x_n), \quad x_\alpha = \varphi_\alpha (x_{q+1} \ldots x_n) \quad (\alpha = 1, 2 \ldots q),$$
$$p_{q+j} = \psi_{q+j} (x_{q+1} \ldots x_n p_1 \ldots p_q \ldots p_n) \quad (j = 2, 3 \ldots m - q).$$

Die Determinante

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_q} + p_q \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_q} + p_q \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_{q+2}}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_{q+2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix} \quad (S = q + 1, m + 1 \ldots n)$$

ist von Null verschieden, da wir sonst

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_q x_S p_{q+2} \ldots p_m)} + \sum_1 p_\alpha \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_{\alpha-1} z x_{\alpha+1} \ldots p_m)} +$$
$$+ p \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_q z p_{q+2} \ldots p_m)} = 0$$

hätten. Wenn man durch die letzte Determinante dividiert und statt $z, x_1 \ldots x_q p_{q+2} \ldots p_m$ ihre Werte einsetzt, so bekommt man

$$p + \sum_1 p_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_S} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_S} = 0.$$

Diese letzte Identität ist offenbar unmöglich. Wir erhalten also z. B. $\Delta_{q+1} \neq 0$. Wir wollen jetzt die gegebenen Gleichungen (I') auf die neuen Variablen mit Hilfe der Formel

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_{q+1} p_{q+1}, \quad x_i = p_i', \quad p_i = -x_i'$$
$$(i = 1, 2 \ldots q + 1)$$

transformieren. Wir werden ein vollständiges System

$$(\mathrm{I}'') \quad F_i'(x_1' \ldots x'_{q+1} x_{q+2} \ldots x_n, H, p_1' \ldots p'_{q+1} p_{q+2} \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

erhalten. Es folgt aus der Formeln der Transformation, dass

$$\Delta_{q+1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1'}{\partial p_1'}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_1'} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p'_{q+1}}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p'_{q+1}} \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_{q+2}}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_{q+2}} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1'}{\partial p_m}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial F_m'}{\partial p_m} \end{vmatrix} = 0$$

ist und also die Gleichungen (I'') in Bezug auf $p_1' \ldots p_{q+1}' p_{q+2} \ldots p_m$ auflösbar sind. Man kann dieses System und also auch das gegebene System (I') in der oben gezeigten Weise durch ein System in Involution ersetzen.

§ 3.

1. Wir wollen jetzt zur Integration des vollständigen Systems der Differentialgleichungen (I)

$$(\mathrm{I}) \qquad F_i\left(x_1 \ldots\ldots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

übergehen; die Integration dieses Systems reduciert sich auf die Integration der Differentialgleichung $\Omega = 0$ mit Hilfe der $n+1$ Integrale (A), die den gegebenen Gleichungen

$$(\mathrm{I}') \qquad F_i(x_1 \ldots x_n z\, p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

genüge leisten. Wenn $m = n+1$ ist so stellen die $n+1$ gegebenen Gleichungen (I') schon das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (I) dar. Man soll zu diesem Zwecke nur beweisen, dass das System der Gleichungen (I') der Differentialgleichung $\Omega = 0$ genüge leistet.

Setzen wir voraus, dass die Gleichungen (I') im allgemeinen in Bezug auf $z, x_\alpha \ldots x_\beta, p_\gamma, \ldots p_\delta$ auflösbar sind, wo $\alpha \ldots \beta, \gamma \ldots \delta$

die Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots n$ sind, und wo die Anzahl der Veränderlichen $x_\alpha \ldots x_\delta$ auch Null sein kann. Wenn wir die Gleichungen (I′) mit Hilfe der Formeln

$$z = H - x_\alpha p_\alpha - \ldots - x_\delta p_\delta, \quad x_i' = p_i', \quad p_i = -x_i' \quad (i = \alpha, \ldots \beta)$$

transformieren, so bekommen wir die Gleichungen

$$F_k'(x_\alpha' \ldots x'_\beta x_\gamma \ldots x_\delta, H, p_\alpha' \ldots p'_\beta p_\gamma \ldots p_\delta) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots n+1), \quad (\mathrm{I}'')$$

die in Bezug auf $H, p_\alpha', \ldots p'_\beta, p_\gamma, \ldots p_\delta$ auflösbar sind, da

$$\frac{\partial(F_1 \ldots F_{n+1})}{\partial(z x_\alpha \ldots x_\beta p_\gamma \ldots p_\delta)} = \frac{\partial(F_1' \ldots F'_{n+1})}{\partial(H, p_\alpha' \ldots p'_\beta p_\gamma \ldots p_\delta)} \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Wenn wir der Bequemlichkeit halber die Grössen $x_\alpha' \ldots x'_\beta$, $x_\gamma \ldots x_\delta$ und $p_\alpha' \ldots p'_\beta$, $p_\gamma \ldots p_\delta$ durch resp. y_i, q_i bezeichnen, so haben die Gleichungen (I″) in der aufgelösten Form die Gestalt

$$H = \varphi(y_1 \ldots y_n), \quad q_i = \varphi_i(y_1 \ldots y_n) \quad i = 1, 2 \ldots n, \qquad (\mathrm{I}''')$$

und stellen ein vollständiges System dar, so, dass die Gleichungen

$$[H - \varphi, q_i - \varphi_i] = 0, \quad [q_i - \varphi_i, q_k - \varphi_k] = 0,$$

infolge der Gleichungen (I‴) erfüllt sind. Da aber φ_i, φ_k die Grössen H, q_i nicht enthalten, so ist

$$[q_i - \varphi_i, q_k - \varphi_k] = 0$$

identisch, oder ist

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}.$$

Es folgt weiter aus der Gleichung

$$[H - \varphi, q_i - \varphi_i] = 0,$$

dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - q_i = 0,$$

infolge der Gleichungen (I‴) ist, oder dass

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \quad \text{ist.}$$

Es folgt daraus, dass

$$H = \varphi, \quad q_i = \varphi_i$$

der Differentialgleichung

$$\Omega = dH - q_1 dy_1 - \ldots - q_n dy_n = 0$$

genügen, und die Gleichungen (I″) das System der $n+1$ Integrale dieser letzten Gleichung darstellen. Wenn man diese letzten auf die ursprünglichen Variablen transformiert, so erhält man, dass die Gleichungen (I′) $n+1$ Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

darstellen. Wir werden daher im folgenden immer voraussetzen, dass $m \leqq n$ ist.

Da wir m gegebene Gleichungen (I′) als m Integrale des Systems (A) betrachten können, so können wir die Aufgabe in folgender anderer Form ausdrücken: wir sollen die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots p_n dx_n = 0.$$

wo die Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ durch m gegebenen Relationen (I′) schon verbunden sind, durch die kleinste Anzahl $n+1-m$ der Integrale integrieren. Wir können nach dem oben bewiesenen immer voraussetzen, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf m der Grössen p_i z. B. in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ auflösbar sind.

Wenn diese letzten in der aufgelösten Form die Gestalt

$$p_i - \Theta_i (x_1 \ldots x_n\, z\, p_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

haben, so hat die Differentialgleichung $\Omega' = 0$ die Gestalt

$$\Omega' = dz - \Theta_1 dx_1 - \ldots - \Theta_m dx_m - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots p_n dx_n = 0.$$

wo

$$\Big[p_i - \Theta_i,\ p_k - \Theta_k\Big]_{\substack{p_i = \Theta_i \\ p_k = \Theta_k}} = 0$$

ist. Wir können den Differentialausdruck Ω' auf die neuen Veränderlichen so transformieren, dass m der neuen Variablen höchstens im gemeinschaftlischen Faktor μ der Koeffizienten eintreten werden. Es seien die Formel dieser Transformation

$$x_i = \varphi_i (y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad z = \varphi (y_1 \ldots y_{2n+1-m}),$$
$$p_{m+j} = \psi_{m+j} (y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad j = 1, 2 \ldots n - m.$$

Setzen wir voraus, dass nämlich die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ nach dieser Transformation nur im gemeinschaftlichen Faktor μ enthalten sind ($j = 1, 2 \ldots n - m$).

Es ist klar, dass diese Transformation die Pfaffsche Transformation ist, nach der die Veränderliche y_i $(i = 1, 2 \ldots m)$ nur im gemeinschaftlichen Faktor μ bleibt. Wenn wir die Gleichungen (A) der ersten Mitteilung, denen die Formel der Pfaffschen Transformation genügen, auf den Differentialausdruck Ω' anwenden, indem wir der Reihe nach statt y_1 y_i $(i = 1, 2 \ldots m)$, und statt λ, λ_i, wo $\lambda_i = \frac{\partial l g \mu}{\partial y_i}$ ist, setzen, so bekommen wir m Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen, denen die Formeln dieser Transformation genügen:

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} - \Theta_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_i} - \ldots - \Theta_m \frac{\partial x_m}{\partial y_i} - p_{m+1} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial y_i} - \ldots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial y_i} = 0,$$

$$\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} = \lambda_i,$$

$$\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} + \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} + \sum_1^{n-m}{}_j \frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial x_{m+j}}{\partial y_i} +$$

$$+ \sum_1^{n-m}{}_j \frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i} - \lambda_i \Theta_\alpha = 0 \quad \alpha = 1, 2 \ldots m,$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} + \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial p_{m+\beta}}{\partial p_{m+\beta}} \frac{\partial p_{m+\beta}}{\partial y_i} - \lambda_i p_{m+j} = 0 \\ &\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} - \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial p_{m+\beta}}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial x_{m+\beta}}{\partial y_i} = 0 \end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots n - m.$$

Da aber $\frac{\partial p_{m+j}}{\partial p_{m+\beta}} = 0$ $(j \neq \beta)$, $\frac{\partial p_{m+j}}{\partial p_{m+\beta}} = 1$ $(j = \beta)$ ist, so haben die $2(n - m)$ letzten Gleichungen die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i} &= \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} + \lambda_i p_{m+j} \\ \frac{\partial x_{m+j}}{\partial y_i} &= - \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} \end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots n - m$$

oder nach Einsetzung des Wertes von λ_i aus der zweiten Gleichung, die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i} &= \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right)\\ \frac{\partial x_{m+j}}{\partial y_i} &= -\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots n - m.$$

Wenn wir die Werte $\frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i}$, $\frac{\partial x_{m+j}}{\partial y_i}$, λ_i in die übrigen Gleichungen einsetzen, so bekommen wir das ganze System in der Form

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^m{}_\beta \left((\Theta)_\beta - \sum_1^m{}_j p_{m+j} \frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial p_{m+j}} \right) \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} = 0,$$

$$\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial z} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} = \lambda_i,$$

$$\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i} \left[\frac{\partial (\Theta)_\alpha}{\partial x_\beta} - (\Theta)_\beta \frac{\partial (\Theta)_\alpha}{\partial z} - \left(\frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial x_\alpha} - (\Theta)_\alpha \frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_1^{m-n}{}_j \left(\frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial x_{m+j}} - p_{m+j} \frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial z} \right) \frac{\partial (\Theta)_\alpha}{\partial p_{m+j}} - \left(\frac{\partial (\Theta)_\alpha}{\partial x_{m+j}} - p_{m+j} \frac{\partial (\Theta)_\alpha}{\partial z} \right) \frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial p_{m+j}} \right] = 0$$

(A') $\qquad \alpha = 1, 2 \ldots m.$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_{m+j}}{\partial y_i} &= \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right)\\ \frac{x_{m+j}}{\partial y_i} &= -\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial y_i}\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots n - m.$$

Es ist klar, dass

$$\frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial x_\beta} + \Theta_\beta \frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial z} - \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_\alpha} + \Theta_\alpha \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) +$$

$$+ \sum_1^{m-n}{}_j \left(\frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial z} \right) \frac{\partial (\Theta)_\alpha}{\partial p_{m+j}} -$$

$$- \left(\frac{\partial (\Theta)_\alpha}{\partial x_{m+j}} - p_{m+j} \frac{\partial (\Theta)_\alpha}{\partial z} \right) \frac{\partial (\Theta)_\beta}{\partial p_{m+j}} = \left[p_\beta - (\Theta)_\beta, \quad p_\alpha - (\Theta)_\alpha \right]_{\substack{p_\alpha = (\Theta)_\alpha \\ p_\beta = (\Theta)_\beta}} = 0$$

ist. Die dritte Gleichung ($\alpha = 1, 2 \ldots m$) ist also eine Identität.

Diese m Systeme ($i = 1, 2 \ldots m$) der gewöhnlichen Differentialgleichungen können durch ein einziges System dargestellt werden, indem wir alle Gleichungen durch dy_i ($i = 1, 2 \ldots m$) multiplicieren und addieren.

So bekommen wir das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} dz &= \sum_1^m{}_\beta \left(\Theta_\beta - \sum_1^{n-m}{}_j\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \right) dx_\beta \\ dx_{m+j} &= - \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\, dx_\beta \\ dp_{m+j} &= \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta \end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots n - m. \qquad \text{(A)}$$

$$d\,lg\,\mu = \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\, dx_\beta \text{ [1]}$$

denen die Formel der gesuchten Transformation bei den konstanten $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ genügen sollen, oder besser: denen die Relationen zwischen x_i, z, p_{m+j}, welche man nach Elimination der $y_1 \ldots y_m$ erhält, genügen sollen. Die Anzahl dieser Relationen ist $2n + 2 - 2m$ und ist derjenigen der Gleichungen (A) gleich. Also mus das System (A) der gewöhnlichen Differentialgleichungen ein unbeschränkt integrables sein. Wenn wir das beweisen, so wird damit bewiesen, dass die Formel der Transformation, die den Gleichungen des Systems (A) genügen, diejenigen der gesuchten Transformation sind. Wenn in der Tat das System (A) ein unbeschränkt integrables ist, so bestimmt es die Veränderlichen z, x_{m+j}, p_{m+j}, μ, als Funktionen der $x_1 \ldots x_m$. Wenn wir jetzt diese letzten als die beliebigen Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, die in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ unabhängig sind, betrachten, so zerfällt das System (A) infolge der Willkürlichkeit der $dy_1 \ldots dy_m$ in m Systeme (A'), woraus folgt, dass die Formel der Transformation, die den Gleichungen (A) genügen, diejenigen der gesuchten Transformation sind.

Wir sollen also beweisen, dass das System (A) ein unbeschränkt integrables ist. Wir geben zu diesem Zwecke einige Hilfsformeln.

[1]) G. Morera (l. c.) hat dieses System, die erste und letzte Gleichungen ausgenommen, als das erste Pfaffsche des Ausdruckes Ω' gefunden.

a) Es sei $F(x_1 \ldots x_n z\, p_{m+1} \ldots p_n)$ eine beliebige Funktion der $x_1 \ldots z, p_{m+j}$.

Wenn wir durch $\frac{dF}{dx_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2 \ldots m)$ den Koeffizienten bei dx_λ im Differentialausdrucke dF, wo dx_{m+j}, dz, dp_{m+j} durch ihre Werte aus den Gleichungen (A) eingesetzt sind, bezeichnen, so erhalten wir:

$$\text{a)}\quad \frac{dF}{dx_\lambda} = \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} - \sum_1^{n-m}{}_j \frac{\partial F}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial \Theta_\lambda}{dp_{m+j}} + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\Theta_\lambda - \sum_1^{n-m}{}_j\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{dp_{m+j}}\right) +$$

$$+ \sum_1^{n-m}{}_j \frac{\partial F}{\partial p_{m+j}}\left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} + \Theta_\lambda \frac{\partial F}{\partial z} +$$

$$+ \sum_1^{n-m}{}_j \left[\frac{\partial F}{\partial p_{m+j}}\left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\right) - \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \Big[F,\ p_\lambda - \Theta_\lambda\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda}.$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial}{\partial x_{m+j}}\Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} = \frac{\partial}{\partial x_{m+j}}\left[\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_\lambda} + \Theta_\lambda \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} -\right.$$

$$- \left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_\mu} + \Theta_\mu \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\right) + \sum_1^{n-m}{}_j \left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\right) \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}} -$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z}\right) \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}}\right] - \left[-\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}},\ p_\mu - \Theta_\mu\right]_{p_\mu = \Theta_\mu} +$$

$$+ \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, -\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}}\right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} + \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} - \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}.$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial}{\partial p_{m+j}}\Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} = \left[-\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}},\ p_\mu - \Theta_\mu\right] +$$

$$+ \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, -\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}}\right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} = \left[-\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z},\ p_\mu - \Theta_\mu\right]_{p_\mu = \Theta_\mu} +$$

$$\text{d)}\qquad + \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, -\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z}\right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda}.$$

Wir werden jetzt zum Beweise übergehen. Was die erste Gleichung

$$dz = \sum_{1}^{m} {}_{\beta} \left(\Theta_{\beta} - \sum_{1}^{n-m} {}_{j}\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_{\beta}}{\partial p_{m+j}} \right) dx_{\beta}$$

betrifft, haben wir, dass infolge der Formel (a)

$$A_{\lambda\mu} = \frac{d}{dx_{\lambda}} \left(\Theta_{\mu} - \sum_{1}^{n-m} {}_{j}\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_{\mu}}{\partial p_{m+j}} \right) - \frac{d}{dx_{\mu}} \left(\Theta_{\lambda} - \sum_{1}^{n-m} {}_{j}\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial p_{m+j}} \right) =$$

$$= \left[p_{\mu} - \Theta_{\mu},\ \Theta_{\lambda} - \sum_{1}^{n-m} {}_{j}\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_{\mu} = \Theta_{\mu}} -$$

$$- \left[p_{\lambda} - \Theta_{\lambda},\ \Theta_{\mu} - \sum_{1}^{n-m} {}_{j}\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_{\mu}}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_{\lambda} = \Theta_{\lambda}} =$$

$$= \left[p_{\lambda} - \Theta_{\lambda},\ p_{\mu} - \Theta_{\mu} \right]_{\substack{p_{\lambda} = \Theta_{\lambda} \\ p_{\mu} = \Theta_{\mu}}} + \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \Theta_{\mu} \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial z} +$$

$$+ \left[p_{\lambda} - \Theta_{\lambda},\ p_{\mu} - \Theta_{\mu} \right]_{\substack{p_{\lambda} = \Theta_{\lambda} \\ p_{\mu} = \Theta_{\mu}}} - \left(\frac{\partial \Theta_{\mu}}{\partial x_{\lambda}} + \Theta_{\lambda} \frac{\partial \Theta_{\mu}}{\partial z} \right) +$$

$$+ \sum_{1}^{n-m} {}_{j}\, p_{m+j} \left\{ \left[p_{\lambda} - \Theta_{\lambda},\ \frac{\partial \Theta_{\mu}}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_{\lambda} = \Theta_{\lambda}} - \right.$$

$$\left. - \left[p_{\mu} - \Theta_{\mu},\ \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_{\mu} = \Theta_{\mu}} \right\} + \sum_{1}^{n-m} {}_{j} \left\{ \frac{\partial \Theta_{\mu}}{\partial p_{m+j}} \left(\frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial z} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial p_{m+j}} \left(\frac{\partial \Theta_{\mu}}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial z} \right) \right\} = \left[p_{\lambda} - \Theta_{\lambda},\ p_{\mu} - \Theta_{\mu} \right]_{\substack{p_{\lambda} = \Theta_{\lambda} \\ p_{\mu} = \Theta_{\mu}}} -$$

$$- \sum_{1}^{n-m} {}_{j}\, p_{m+j} \left\{ \left[p_{\lambda} - \Theta_{\lambda},\ - \frac{\partial \Theta_{\mu}}{\partial p_{m+j}} \right]_{p_{\lambda} = \Theta_{\lambda}} + \right.$$

$$\left. + \left[- \frac{\partial \Theta_{\lambda}}{\partial p_{m+j}},\ p_{\mu} - \Theta_{\mu} \right]_{p_{\mu} = \Theta_{\mu}} \right\}.$$

Woraus infolge der Formel (d) sich ergibt

$$A_{\lambda\mu} = \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} -$$

$$- \sum_1^j p_{m+j} \frac{\partial}{\partial p_{m+j}} \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu.}}$$

Wir wollen jetzt die Gleichung

$$dx_{m+j} = - \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} dx_\beta \quad (j = 1, 2 \ldots n - m)$$

betrachten. Infolge der Formel (a) ist

$$B_{\lambda\mu} = \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} - \frac{d}{dx_\lambda} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} = - \Big[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial p_{m+j}}\Big]_{p_\mu = \Theta_\mu} +$$

$$+ \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial p_{m+j}}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda.}$$

Infolge der Formel (c) ist

$$B_{\lambda\mu} = - \frac{\partial}{\partial p_{m+j}} \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda,\ p_\mu - \Theta_\mu\Big]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu.}}$$

Wenn wir weiter die Gleichung

$$dp_{m+j} = \sum_1^m {}_\beta \Big(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} \Big) dx_\beta \quad (j = 1, 2 \ldots n - m)$$

betrachten, so erhalten wir

$$C_{\lambda\mu} = \frac{d}{dx_\lambda} \Big(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} \Big) - \frac{d}{dx_\mu} \Big(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z} \Big) =$$

$$= \Big[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}\Big]_{p_\mu = \Theta_\mu} -$$

$$- \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} =$$

$$- \Big[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}}\Big]_{p_\mu = \Theta_\mu} - \Big[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}}\Big]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} -$$

$$- p_{m+j} \left\{ \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} \right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda} - \left[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z} \right]_{p_\mu = \Theta_\mu} \right\} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z} \right) \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} - \left(\frac{\partial \Theta_\mu}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} \right) \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z}.$$

Infolge der Formel (b) ist

$$C_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{m+j}} \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, p_\mu - \Theta_\mu \right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} +$$

$$+ p_{m+j} \frac{\partial}{\partial z} \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \quad p_\mu - \Theta_\mu \right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}}.$$

Es bleibt endlich die Gleichung

$$d \lg \mu = \sum_{1}^{m} {}_\beta \frac{\partial \Theta^\beta}{\partial z} \, dx_\beta.$$

Infolge der Formel (a) ist

$$D_{\lambda\mu} = \frac{d}{dx_\lambda} \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} - \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z} = \left[p_\mu - \Theta_\mu, \frac{\partial \Theta_\lambda}{\partial z} \right]_{p_\mu = \Theta_\mu} -$$

$$\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial z} \right]_{p_\lambda = \Theta_\lambda}.$$

Infolge der Formel (d) ist

$$D_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \quad p_\mu - \Theta_\mu \right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}}.$$

Da aber das System (I′) ein vollständiges und

$$\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \quad p_\mu - \Theta_\mu \right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} \equiv 0$$

ist, so erhalten wir

$$A_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu} = C_{\lambda\mu} = D_{\lambda\mu} = 0$$

und das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (A) ist ein unbeschränkt integrables. Die Formeln der Transformation

$$x_i = \varphi_i(y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad z = \varphi(y_1 \ldots y_{2n+1-m}),$$
$$p_{m+j} = \psi_{m+j}(y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad (j = 1, 2 \ldots n - m),$$

die diesen Gleichungen bei den konstanten Werten der $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ genügen, haben die Eigenschaft, dass der Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - \Theta_1 dx_1 - \ldots - \Theta_m dx_m - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots - p_n dx_n,$$

wo

$$\left[p_\lambda - \Theta_\lambda, \quad p_\mu - \Theta_\mu \right]_{\substack{p_\lambda = \Theta_\lambda \\ p_\mu = \Theta_\mu}} = 0$$

ist, nach dieser Transformation die Variablen $y_1 \ldots y_m$ höchstens im gemeinschaftlichen Faktor μ der Koeffizienten enthält.

Wir werden diese Transformation die Pfaffsche Transformation für den Differentialausdruck Ω' nennen.

Wir werden der grösseren Symmetrie halber noch diejenigen m Gleichungen hinzufügen, denen die Grössen $p_1 \ldots p_m$ genügen, die mit Hilfe der Gleichungen

$$p_i - \Theta_i(x_1 \ldots x_n z p_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

als Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$ ausgedrückt sind, vorausgesetzt, dass $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ als Konstanten zu betrachten sind.

Wir sehen, dass

$$dp_i = \sum_1^m{}_\beta \frac{d\Theta_i}{dx_\beta} dx_\beta \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

ist, wenn wir die Bezeichnung der Formel (a) benutzen.

Wir erhalten infolge dieser letzten, dass

$$dp_i = \sum_1^m{}_\beta \left[p_\beta - \Theta_\beta, \; - \Theta_i \right]_{p_\beta = \Theta_\beta} dx_\beta =$$

$$= \sum_1^m{}_\beta \left[p_\beta - \Theta_\beta, \; p_i - \Theta_i \right]_{\substack{p_\beta = \Theta_\beta \\ p_i = \Theta_i}} dx_\beta + \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + \Theta_i \frac{\partial \Theta_\beta}{dz} \right) dz_\beta$$

ist. Da aber $\left[p_\beta - \Theta_\beta,\ p_i - \Theta_i\right]_{\substack{p_\beta = \Theta_\beta \\ p_i = \Theta_i}} = 0$, und $p_i = \Theta_i$ ist, so ist

$$dp_i = \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta \quad (i = 1,\ 2 \ldots . m)$$

Das ganze System (A) nimmt jetzt die folgende Form an:

$$\begin{aligned}
dz &= \sum_1^m{}_\beta \left(\Theta_\beta - \sum_1^{n-m}{}_j\, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} \right) dx_\beta \\
dx_{m+j} &= - \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\, dx_\beta \quad (j = 1,\ 2 \ldots n - m) \\
dp_i &= \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta \quad (i = 1,\ 2 \ldots n) \\
d\,lg\,\mu &= \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\, dx_\beta .
\end{aligned} \tag{A_0}$$

Die Formel der gesuchten Transformation

$$x_i = \varphi_i (y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad z = \varphi (y_1 \ldots y_{2n+1-m}),$$
$$p_i = \psi_i (y_1 \ldots y_{2n+1-m}) \quad (i = 1, 2 \ldots n).$$

wo $p_i - \Theta_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, sollen diesen Gleichungen (A_0) genügen. Dieses System ist auch ein unbeschränkt integrables. Wir werden zu diesem Zwecke nur beweisen, dass die Gleichungen

$$dp_i = \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta \quad (i = 1,\ 2 \ldots m)$$

erfüllt sind, wenn man $p_i = \Theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ setzt, wo x_{m+j}, p_{n+j}, z durch ihre Werthe aus den übrigen $2(n-m)+1$ Gleichungen des Systems (A_0), d. h. des unbeschränkt integrablen Systems (A), ersetzt sind. Wir erhalten nach der Einsetzung

$$d\Theta_i = \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + \Theta_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta .$$

woraus infolge der Gleichungen (A_0) oder (A)

$$\sum_1^m{}_\beta \frac{d\Theta_i}{dx_\beta}\, dx_\beta = \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_i} + \Theta_i \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} \right) dx_\beta .$$

oder infolge der Formel (a)

$$\sum_{1}^{m}{}^{\beta} [\Theta_i, p_\beta^\beta - \Theta_\beta^\beta]_{p_\beta^\beta = \Theta_\beta^\beta} dx_\beta^\beta = \sum_{1}^{m}{}^{\beta} \left(\frac{\partial \Theta_\beta^\beta}{\partial x_i} + \Theta_i \frac{\partial \Theta_\beta^\beta}{\partial z} \right) dx_\beta^\beta.$$

oder endlich

$$\sum_{1}^{m}{}^{\beta} [p_i - \Theta_i, p_\beta^\beta - \Theta_\beta^\beta]_{\substack{p_i = \Theta_i \\ p_\beta^\beta = \Theta_\beta^\beta}} dx_\beta^\beta = 0 \text{ ist.}$$

Da aber

$$[p_i - \Theta_i, p_\beta^\beta - \Theta_\beta^\beta]_{\substack{p_i = \Theta_i \\ p_\beta^\beta = \Theta_\beta^\beta}} = 0$$

ist, so haben wir die Identität erhalten.

Es folgt daraus, dass das System A_0 nach der Einsetzung $p_i = \Theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ins System (A) übergeht.

Wenn wir also solche Formel der Transformation der Grösse x_i, z, p_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ auf die neuen $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, die den Gleichungen (A_0) und den Gleichungen $p_i - \Theta_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ bei den konstanten Werten der $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ genügen, bestimmen, so erhalten wir die Formel der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck Ω'.

2. Die Gleichungen (A_0) haben die Unbequemlichkeit, dass man bei der Bildung derselben nicht nur voraussetzt, dass die gegebenen Gleichungen (I') in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ auflösbar sind, sondern auch die Werte derselben einführen soll. Wir wollen uns jetzt von dieser Unbequemlichkeit frei machen. Wir wissen dass

$$\frac{\partial \Theta_\beta^\beta}{\partial x_i} = - \left| \frac{\dfrac{\partial F_1 \ldots F_m}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} x_i p_{\beta+1} \ldots p_m)}}{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}} \right|_{p_\lambda = \Theta_\lambda \quad \lambda = 1, 2 \ldots m;}$$

$$\frac{\partial \Theta_\beta^\beta}{\partial p_{m+j}} = - \left| \frac{\dfrac{\partial F_1 \ldots F}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} p_{m+j} p_{\beta+1} \ldots p_m)}}{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}} \right|_{p_\lambda = \Theta_\lambda \quad \lambda = 1, 2 \ldots m;}$$

$$\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} = -\left| \frac{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)}}{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)}} \right|_{p_\lambda = \Theta_\lambda \quad \lambda = 1, 2 \ldots m}$$

$$(i = 1, 2 \ldots n, \quad j = 1, 2 \ldots n - m).$$

Das System (A_0) hat also die Gestalt

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} dz =$$

$$\sum_1^m {}_\beta \left\{ \Theta_\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} + \sum_1^{n-m} {}_j\, p_{m+j} \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} p_{m+j} p_{\beta+1} \ldots p_m)} \right\} dx_\beta$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} dx_{m+j} = \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} p_{m+j} p_{\beta+1} \ldots p_m)} dx_\beta$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} dp_i$$

$$\sum_1^m {}_\beta \left\{ \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} x_i p_{\beta+1} \ldots p_m)} + p_i \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} p_i p_{\beta+1} \ldots p_m)} \right\} dx_\beta$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} d\, l\, g\, \mu = -\sum_1^m {}_\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)} dx_\beta,$$

wo in den Determinanten statt p_i ihre Werte Θ_i $(i = 1, 2 \ldots m)$ eingesetzt sein sollen.

Wir schliessen daraus, dass die Formel der gesuchten Transformation den Gleichungen $p_i = \Theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ und den Gleichungen

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} dz =$$

$$= \sum_1^m {}_\beta \left(p_\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} + \sum_1^{n-m} {}_j\, p_{m+j} \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} p_{m+j} p_{\beta+1} \ldots p_m)} \right) dx_\beta,$$

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_m)} dx_{m+j} = \sum_1^m {}_\beta \frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (p_1 \ldots p_{\beta-1} p_{m+j} p_{\beta+1} \ldots p_m)} dx_\beta,$$

$$(\mathrm{A}_1)\qquad \frac{\partial(F_1\ldots F_m)}{\partial(p_1\ldots p_m)}\,dp_i =$$

$$-\sum_1^m{}_\beta\left\{\frac{\partial(F_1\ldots F_m)}{\partial(p_1\ldots p_{\beta-1}x_i p_{\beta+1}\ldots p_m)}+p_i\frac{\partial(F_1\ldots F_m)}{\partial(p_1\ldots p_{\beta-1}p_i p_{\beta+1}\ldots p_m)}\right\}dx_\beta.$$

$$\frac{\partial(F_1\ldots F_m)}{\partial(p_1\ldots p_m)}\,d\lg\mu = -\sum_1^m{}_\beta\frac{\partial(F_1\ldots F_m)}{\partial(p_1\ldots p_{\beta-1}z\,p_{\beta+1}\ldots p_m)}\,dx_\beta$$

genügen sollen.

Dieses System geht nach der Einsetzung $p_i=\Theta_i$ $(i=1.\,2\ldots m)$ ins System (A_0) mit derselben Einsetzung und also ins System (A) über. Dieses System ist also ein unbeschränkt integrables, und die Formeln der Transformation der Grössen $x_i\,z\,p_i$ $(i=1.\,2\ldots n)$ auf die neuen $y_1\ldots\ldots y_{2n+1-m}$, die diesen Gleichungen und den Gleichungen $p_i=\Theta_i$ $(i=1.\,2\ldots\ldots m)$ bei den konstanten Werten der $y_{m+1}\ldots y_{2n+1-m}$ genügen, sind die Formel der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck Ω'.

Wir können diese Gleichungen in der folgenden bequemeren Form darstellen. Wir wollen nämlich die Matrix

$$(\mathrm{B})\qquad \left\|\begin{matrix}
dx_1 & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
dx_n & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_n}\\
dz & \sum_1^n{}_i\,p_i\frac{\partial F_1}{\partial p_i} & \ldots\ldots & \sum_1^n{}_i\,p_i\frac{\partial F_m}{\partial p_i}\\
dp_1, & -\left(\frac{\partial F_1}{dx_1}+p_1\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) & \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F_m}{\partial z}\right)\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
dp_n, & -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) & \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F_m}{\partial z}\right)\\
d\lg\mu, & -\frac{\partial F_1}{\partial z} & \ldots\ldots & -\frac{\partial F_m}{\partial z}
\end{matrix}\right\|$$

betrachten.

Setzen wir voraus, dass wir alle Determinanten $m+1$ Grades dieser Matrix gleich Null setzen. Wir erhalten dann eine Reihe der

gewöhnlichen Differentialgleichungen. Unabhängig von einander sind nur diejenigen zwischen ihnen, die durch Hinzufügung zur Matrix der von Null verschiedenen Determinante $\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_m)}$ der ersten Kolonne und je einer der übrigen Reihen gebildet sind. Diese Gleichungen sind, wie man leicht ersieht, mit den Gleichungen (A_1) identisch. Wir werden diese Gleichungen die Gleichungen der Matrix (B) nennen. Die Formeln der Transformation der Grössen x_i, z, p_i $(i = 1, 2 \ldots m)$ auf die neuen $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, die den Gleichungen der Matrix (B), wo $\left|\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_m)}\right| = 0$ ist, bei den konstanten Werten der $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ und wo $p_1 \ldots p_m$ den Gleichungen (I′)

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

des vollständigen Systems genügen, sind diejenigen der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n,$$

wo $p_1 \ldots p_m$ den Gleichungen (I′) genügen.

Um noch ein allgemeineres Ergebnis zu erhalten, wollen wir uns noch von dieser Voraussetzung frei machen, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ unabhängig sind.

Wir setzen nämlich voraus, dass die Gleichungen des vollständigen Systems (I′) in Bezug auf z. B. $x_1 \ldots x_q p_{q+1} \ldots p_m$ unabhängig sind. Wir transformieren die Gleichungen (I′) mit Hilfe der Formel

$$z = H + x_1 p_1 + \ldots + x_q p_q, \quad x_i = p_i', \quad p_i = -x_i' \quad (i = 1, 2 \ldots q)$$

auf die neuen

$$F_i'(x_1' \ldots x_q' x_{q+1} \ldots x_n, H, p_1' \ldots p_q' p_{q+1}, \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m), \qquad (\mathrm{I}'')$$

die in Bezug auf $p_1' \ldots p_q' p_{q+1} \ldots p_m$ auflösbar sind, und auch den Differentialausdruck Ω', wo $x_1 \ldots x_q p_{q+1} \ldots p_m$ den Gleichungen (I′) genügen, auf den neuen

$$\Omega'' = dH - p_1' dx_1' - \ldots - p_q' dx_q' - p_{q+1} dx_{q+1} - \ldots - p_n dx_n,$$

wo die Veränderlichen $p_1' \ldots p_q' p_{q+1} \ldots p_m$ den neuen Gleichungen (I″) genügen. Da die Gleichungen (I″) ein vollständiges System

bilden, so können wir zum Ausdruck Ω'' den vorigen Schluss anwenden.

Die Matrix (B′) hat in diesem Falle dieselbe Gestallt, wie (B), nur müssen wir statt $F_i, x_j\, p_j$ $(i = 1, 2 \ldots m,\ j = 1, 2 \ldots q)$ $F_i'\, x_j'\, p_i'$ setzen.

Die Gleichungen dieser Matrix bestimmen die Formeln der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck Ω''. Wenn wir diese letzten auf die ursprünglichen Variablen transformieren, so erhalten wir offenbar die Gleichungen für die Formeln dieser Transformation für den Differentialausdruck Ω'. Wir wollen jetzt sehen, wie die Gleichungen der Matrix (B′) in den ursprünglichen Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ sich darstellen. Offenbar ist

$$\frac{\partial F'}{\partial p'_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial F}{\partial z}; \qquad \left(\frac{\partial F'}{\partial x'_\alpha} + p'_\alpha \frac{\partial F'}{\partial H}\right) = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \qquad \alpha = 1, 2 \ldots q$$

$$\frac{\partial F'}{\partial x_{q+j}} = \frac{\partial F}{\partial x_{q+j}}, \quad \frac{\partial F'}{\partial p_{q+j}} = \frac{\partial F}{\partial p_{q+j}}, \quad \frac{\partial F'}{\partial H} = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Also ist die Matrix (B′):

$$
\left\|\begin{array}{lll}
dp_1, & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial F_1}{\partial z} & \cdots\cdots \quad \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial F_m}{\partial z} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
-dp_q; & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_q}+p_q\dfrac{\partial F_1}{\partial z} & \cdots\cdots \quad \dfrac{\partial F_m}{\partial x_q}+p_q\dfrac{\partial F_m}{\partial z} \\
dx_{q+1}, & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_{q+1}} & \cdots\cdots \quad \dfrac{\partial F_m}{\partial p_{q+1}} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
dx_n, & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n} & \cdots\cdots \quad \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n}
\end{array}\right\|
$$

$$
dz = d(x_1p_1+\cdots\cdots+x_qp_q) = \sum_1^q{}_\alpha\, x_\alpha\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)+\sum p_{q+\beta}\frac{\partial F_1}{\partial p_{q+\beta}} \cdots \sum{}_\alpha\, p_\alpha\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_\alpha}+p_\alpha\frac{\partial F_m}{\partial z}\right)+\sum p_{q+\beta}\frac{\partial F_1}{\partial p_{q+\beta}}
$$

$$
\left\|\begin{array}{lll}
dx_1, & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1} & \cdots\cdots \quad \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
dx_q, & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_q} & \cdots\cdots \quad \dfrac{\partial F_m}{\partial p_q} \\
dp_{q+1} & \cdots\cdots -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_{q+1}}+p_{q+1}\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right) & \cdots\cdots -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_{q+1}}+p_{q+1}\dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
dp_n, & \cdots\cdots -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}+p_n\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right) & \cdots\cdots -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}+p_n\dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
dlg\mu. & -\dfrac{\partial F_1}{\partial z} & \cdots\cdots -\dfrac{\partial F_m}{\partial z}
\end{array}\right\|
$$

oder nach der einfachen Umformung

$$
\left\|\begin{array}{lcc}
dp_1, & -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
dp_q, & -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_q}+p_q\frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_q}+p_q\frac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
dx_{q+1}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_{q+1}}, \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_{q+1}} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
dx_n, & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_n} \\
dz, & \sum_1^n p_i\frac{\partial F_1}{\partial p_i} \ldots\ldots & \sum_1^n p_i\frac{\partial F_m}{\partial p_i} \\
dx_1, & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
dx_q, & \frac{\partial F_1}{\partial p_q} \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_q} \\
dp_{q+1}, & -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_{q+1}}+p_{q+1}\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) \ldots\ldots & \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_{q+1}}+p_{q+1}\frac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
dp_n, & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) \ldots\ldots & -\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
d\lg\mu, & -\frac{\partial F_1}{\partial z} \ldots\ldots & -\frac{\partial F_m}{\partial z}.
\end{array}\right\|
$$

Wir sehen, dass die Matrix (B′) in den Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ mit der Matrix (B) identisch ist; der Unterschied besteht darin, dass die nicht verschwindende Determinante m^{es} Grades ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_q} + p_q \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_q} + p_q \frac{\partial F_m}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_{q+1}} & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_{q+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

wie es sein soll, da

$$\frac{\partial (F_1 \ldots F_m)}{\partial (x_1 \ldots x_q p_{q+1} \ldots p_m)} = \Big| = 0$$

ist (§ 2, 3). Wir können den folgenden allgemeinen Satz III aussprechen: Man kann den Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n,$$

wo die Variablen $x_i z p_i$ durch m Relationen

$$F_i (x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0, \qquad (\mathrm{I}')$$

die ein vollständiges System bilden, verbunden sind, immer auf die neuen Variablen $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$ so transformieren, dass m der neuen Variablen z. B. $y_1 \ldots y_m$ höchstens im gemeinschaftlichen Faktor μ der Koeffizienten enthalten sein werden. Die notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass die Formeln der Transformation zusammen mit μ den Differentialgleichungen der Matrix (B) bei den konstanten Werten der $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ und den Gleichungen (I′) genüge leisten.

3. Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Formeln der Pfaffschen Transformation über.

Wir setzen von jetzt ab voraus, dass das gegebene System der Differentialgleichungen in Involution ist. Die Differentialgleichungen der Matrix (B_1)

$$
(B_1)\quad \left\| \begin{array}{lccc}
dx_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
dx_n & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n} \\
dz & \sum_1^n p_i \dfrac{\partial F_1}{\partial p_i} & \cdots\cdots & \sum_1^n p_i \dfrac{\partial F_m}{\partial p_i} \\
dp_1 & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right), & \cdots\cdots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
dp_n & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right), & \cdots\cdots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right)
\end{array} \right\|
$$

und folglich der Matrix (B) haben m Integrale der Form

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = C_i \quad (i = 1, 2 \ldots m).$$

In der Tat es folgen aus den Gleichungen der Matrix (B_1), die Gleichungen der Matrix

$$
\left\| \begin{array}{lccc}
dx_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
dx_n & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n} \\
dz & \sum p_i \dfrac{\partial F_1}{\partial p_i} & \cdots\cdots & \sum p_i \dfrac{\partial F_m}{\partial p_i} \\
dp_1 & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right), & \cdots\cdots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
dp_n & -\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\right), & \cdots\cdots & -\left(\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial F_m}{\partial z}\right) \\
dF_\alpha & [F_\alpha, F_1] & \cdots\cdots & [F_\alpha, F_m].
\end{array} \right\|
$$

Es folgt daraus, dass

$$dF_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad F_\alpha = C_\alpha$$

ist, da

$$[F_\alpha F_i] \equiv 0 \quad (\alpha, i = 1, 2 \ldots m)$$

ist und nicht alle Determinanten m^{ten} Grades der Matrix (B_1) gleich Null sind.

Wir wissen, dass die Formel der Pfaffschen Transformation des Differentialausdrucks

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n,$$

wo $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, oder vielmehr die Relationen zwischen $x_i z p_i$, die aus ihnen nach der Elimination der Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ sich ergeben, den Differentialgleichungen der Matrix (B) zusammen mit der Funktion μ genügen sollen. Da die Gleichungen der Matrix (B) von den Gleichungen der Matrix (B_1) nur durch eine Gleichung, die die Funktion μ enthält, sich unterscheiden, so sollen die Formeln dieser Transformation nur den Gleichungen der Matrix (B_1) genügen. Da die oben erwähnten Relationen zwischen $x_i z p_i$ auch die Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

und keine andere, die von $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ frei sind, enthalten, so sind diese Relationen ein partikuläres System der Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1), das aus dem vollständigen System mit Hilfe der m gewissen Relationen zwischen den Integrationskonstanten sich ergibt. Setzen wir voraus, dass ein solches System der Integrale der Gleichungen der Matrix (B_1) gefunden ist. Diese Integrale bestimmen nur $2n + 1 - m$ der Variablen $x_i z p_i$ als die Funktionen der m übrigen; diese letzten bleiben also willkürliche Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, welche in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ unabhängig sind.

Wenn wir z. B. voraussetzen, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ unabhängig sind, so bestimmen die Gleichungen der Matrix (B_1) die Veränderlichen x_{m+j}, z, p_i als die Funktionen der $x_1 \ldots x_m$ und sind diese letzten willkürliche Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, welche in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ unabhängig sind. Was die Wahl dieser letzten betrifft, so werden wir sie in folgender Weise wählen: wir setzen voraus, dass wir auch diese Funktionen aus den gewöhnlichen unbeschränkt integrablen Differentialgleichungen

$$dx_k = A_k dy_1 + \ldots + B_k dy_m \quad (k = 1, 2 \ldots m)$$

bestimmen. Wir werden in dieser Weise zusammen mit den $2n+1-m$ Differentialgleichungen der Matrix (B_1) ein unbeschränkt integrables System der $2n+1$ Differentialgleichungen haben. Wir wollen jetzt ein System der Hauptintegrale desselben in Bezug auf $y_i = y_i^0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ wählen, wo y_i^0 die willkürlich gewählten Zahlen, die nur die Integrale des Systems nicht illusorisch machen, sind.

Es sei dieses System

$$\begin{aligned} x_i &= x_i'(y_1 \ldots y_m x_1^0 \ldots p_n^0) \quad i = 1, 2 \ldots n \\ p_i &= p_i'(y_1 \ldots y_m x_1^0 \ldots p_n^0) \\ z &= z'(y_1 \ldots y_m x_1^0 \ldots p_n^0), \end{aligned}$$

wo $x_1^0 \ldots p_n^0$ die Anfangswerte der Variablen $x_i\, p_i\, z$ sind. Wir können dieses System noch in der Form

$$\begin{aligned} & x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (j = 1, 2 \ldots n-m) \\ \text{(a)} \qquad & p_i = p_i(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots n) \\ & z = z(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0), \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \qquad x_i = x_i'(y_1 \ldots y_m x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

darstellen, wo $2n+1-m$ Gleichungen (a) die vollständigen Integrale der Gleichungen der Matrix (B_1) mit $2n+1$ Konstanten sind. Dieses System hat die Eigenschaft, dass es bei $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ die Form

$$x_{m+j} = x_{m+j}^0, \quad p_i = p_i^0, \quad z = z_0$$

annimmt. Wir können es ein System der Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) nennen. Die gesuchten Formeln der Pfaffschen Transformation haben diese Form, wo nur die Grössen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ gewisse Funktionen der $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ sind. Da die Anzahl der Grössen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ grösser, als die Anzahl der $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ um $2m$ Einheiten ist, so sollen zwischen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ $2m$ Relationen stattfinden. Da die Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ den Gleichungen

$$\text{(I')} \qquad F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

genügen sollen und da aus den Gleichungen (a) die Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = F_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sich ergeben, so muss

$$F_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sein. damit die Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ den Gleichungen (I′) genügen. Was aber die übrigen m Relationen zwischen $x_i^0\, z_0\, p_i$ betrifft, so bleiben diese letzten ganz willkürlich, nur sollen sie keine Relationen zwischen $x_i\, z\, p_i$ nach sich ziehen, da diese Veränderlichen nur den Relationen (I′) genügen sollen; mit anderen Worten diese m übrigen Relationen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sollen keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein. Wenn wir jetzt voraussetzen, dass die $2n + 1 - 2m$ unabhängigen von der Veränderlichen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ gerade $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ sind, so erhalten wir die Formeln der Pfaffschen Transformation

$$\begin{aligned} &x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m\, x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (j = 1, 2 \ldots n - m) \\ &p_i = p_i(x_1 \ldots x_m\, x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad \text{(a)} \\ &z = z(x_1 \ldots x_m\, x_1^0 \ldots p_n^0), \end{aligned}$$

$$x_i = x_i'(y_1 \ldots y_m\, x_1^0 \ldots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \ldots m), \qquad \text{(b)}$$

wo $F(x_1^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist.

Die Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ genügen in der Tat den Differentialgleichungen der Matrix (B_1), da die Gleichungen (a) ihre Integrale sind, und sie erfüllen die m gegebenen Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m).$$

Wenn wir jetzt die Funktion μ hinzufügen, die aus der Gleichung

$$\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_m)}\, d\lg\mu = -\sum_{1}^{m}{}_{\beta} \frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_{\beta-1}\, z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)}\, dx_\beta \qquad \text{(c)}$$

bestimmt ist, so werden wir alle Bedingungen des Satzes III erfüllen, und sind die Formeln (a), (b) diejenigen der Pfaffschen Transformation.

Was die Funktion μ betrifft, so erhalten wir, im Falle, dass

$$\frac{\partial(F_1 \ldots F_m)}{\partial(p_1 \ldots p_{\beta-1}\, z\, p_{\beta+1} \ldots p_m)} = 0 \quad (\beta = 1, 2 \ldots m)$$

ist und nur in diesem Fall, d. h. im Falle, dass $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist und nur in diesem Falle, $d\lg\mu = 0$, d. h. $\lg\mu$ enthält nicht die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ und diese Veränderlichen verschwinden nach der Pfaffschen Transformation des Ausdruckes Ω'.

Wenn aber nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ Null sind, so enthält $lg\,\mu$ die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ und folglich $x_1 \ldots x_m$.

Wir können in diesem Falle zwischen den m Differentialgleichungen

$$dx_k = A_k dy_1 + \ldots + B_k dy_m \quad (k = 1, 2 \ldots m)$$

die Gleichung (c) wählen. Wir können dann $lg\,\mu$ willkürlich wählen und die Gestalt der Funktionen $x_1 \ldots x_m$ hängt von der Gestalt des $lg\,\mu$ ab. Wir können z. B. $lg\,\mu = y_1$ wählen.

Wir haben also den allgemeinen Satz IV: Um die allgemeinsten Formeln der Transformation des Ausdruckes

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n$$

zu erhalten, wo $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$, $[F_i, F_k] = 0$ $(i, k = 1, 2 \ldots m)$ ist, nach der m der neuen Veränderlichen z. B. $y_1 \ldots y_m$ höchstens im gemeinschaftlichen Faktor μ der Koeffizienten des transformierten Ausdruckes bleiben, so soll man das System der $2n + 1 - m$ Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) bestimmen, und zwischen den Anfangswerten $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ der Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ $2m$ Relationen

$$F_i(x_1^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots m)$$

aufstellen, wo die m letzten Gleichungen nur keine Integrale der Gleichungen der Matrix (B_1) sein sollen. Wenn man die m unabhängigen der Veränderlichen $x_i\, z\, p_i$ als willkürliche Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, welche in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ unabhängig sind, und wenn man die $2n + 1 - 2m$ unabhängigen der Grössen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ für $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ nimmt, so bekommt man dann die Formeln der gesuchten Transformation auf die neuen Variablen $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$.

Im Falle wenn nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ verschwinden, so kann man die Wahl der willkürlichen Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$ so einrichten, dass $lg\,\mu$ eine von vornherein gegebene Funktion ist.

Wenn aber $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ sind, so verschwinden $y_1 \ldots y_m$ nach dieser Transformation.

Da die Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

fast willkürlich sind, so hat man unendlich viele Pfaffsche Transformationen. Es seien die Formeln zweier solchen Transformationen vorgelegt:

$$\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) & j &= 1, 2 \ldots n - m \\ p_i &= p_i(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) & i &= 1, 2 \ldots n \\ z &= z(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0). \end{aligned} \tag{a}$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0 p_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist und $x_1 \ldots x_m$ gewisse Funktionen der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$, unabhängige in Bezug auf $y_1 \ldots y_m$ sind; und

$$\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & j &= 1, 2 \ldots n - m \\ p_i &= p_i(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) & i &= 1, 2 \ldots n \\ z &= z(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}). \end{aligned} \tag{a'}$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, und $x_1 \ldots x_m$ gewisse Funktionen der $t_1 \ldots t_{2n+1-m}$ unabhängige in Bezug auf $t_1 \ldots t_m$ sind. Es ist klar, dass es die Formeln der Transformation der Veränderlichen $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$ auf die Variablen $t_1 \ldots t_{2n+1-m}$ gibt.

Die Gleichungen (a), wo nur $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$, und die Gleichungen (a′) wo nur $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, sind zwei Systeme der $2n + 1 - m$ vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1). Da das unbeschränkt integrable System der gewöhnlichen Differentialgleichungen nur ein System der vollständigen Integrale besitzt, so sind $2n + 1 - m$ unabhängigen der Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ die Funktionen der $2n + 1 - m$ unabhängigen der Grössen $x_i^{00} z_0 p_i^{00}$. Diese Relationen bleiben auch dann, wenn wir $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ setzen, da aus der Gleichungen $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ die Gleichungen $F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ und also $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ folgen. Es folgt daraus, dass $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$ die Funktionen nur $t_{m+1} \ldots t_{2n+1-m}$ sind.

§ 4.

1. Wir wollen jetzt den Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dz_1 - \ldots - p_n dx_n$$

wo $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$, $[F_i, F_k] = 0$ $(i, k = 1, 2 \ldots m)$ ist,

mit Hilfe der Formeln der Pfaffschen Transformation transformieren. Wir werden

$$\Omega' = \mu M$$

erhalten, wo der Differentialausdruck M die Variablen $y_1 \ldots y_m$ nicht enthält. Wir sehen, dass der Differentialausdruck

$$\frac{1}{\mu} \Omega'$$

nach der Pfaffschen Transformation die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ nicht enthält. Wir können also vor der Transformation in den Formeln der Transformation $y_i = y_i^0$ setzen. Wir bekommen dann, dass

$$\frac{1}{\mu} \Omega' = \frac{1}{\mu^0} \Omega'_0 = \frac{1}{\mu^0} (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0)$$

ist, wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Wir haben also, dass

$$\Omega' = \frac{\mu}{\mu^0} (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0)$$

ist, wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Wenn F_i $(i = 1, 2 \ldots m)$ z nicht enthalten, so enthält μ die Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$ nicht, und ist $\mu = \mu_0$, d. h. $\frac{\mu}{\mu_0} = 1$, so dass in diesem Falle

$$\Omega' = dz_0 - p_1^0 dz_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0$$

ist, wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist.

Um die Gleichung $\Omega' = 0$, wo $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, zu integrieren, so sollen wir entweder

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 0,$$

oder

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist, setzen. Wir können $\frac{\mu}{\mu_0} = 0$ nur dann setzen, wenn nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ verschwinden.

Wir wollen also

$$\Omega_0' = dz^0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, setzen. Wir sollen die Gleichung $\Omega' = 0$ und also die Gleichung $\Omega_0' = 0$ durch $n + 1 - m$ Integrale integrieren, oder anders gesagt, wir sollen die Gleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 1 + m$ Integrale

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$
$$F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m) \qquad \text{(f)}$$

integrieren, zwischen denen es m gegebenen Gleichungen

$$F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

die die Integrale der Gleichungen der Matrix (B_1) sind, und m Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

die nur keine Integrale der Gleichungen dieser Matrix sind, gibt. Wenn wir umgekehrt ein solches System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ finden, so können wir daraus $n + 1 - m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega' = 0$ und folglich $n + 1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$, d. h. das gemeinsame Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) und also der partiellen Differentialgleichungen (1) finden. In der Tat es sei

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$
$$F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m) \qquad \text{(f)}$$

ein solches System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$. Es ist unmöglich, dass es infolge dieser Gleichungen

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \infty$$

wäre. In der Tat, im Falle wenn $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, ist

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1.$$

Wenn aber nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ verschwinden, so können wir die Formel der Transformation (b) so wählen, dass

$lg\,\mu$ eine von vornherein gegebene Form z. B. $lg\,\mu = y_1$ haben wird. Dann wird

$$\frac{\mu}{\mu_0} = e^{y_1 - y_1^0}$$

sein und infolge der Unabhängigkeit der Veränderlichen $y_1 \ldots$ y_{2n+1-m} einen ganz willkürlichen Wert haben. Wenn wir also die Gleichungen

$$\Theta_\alpha (x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

wo $F_i (x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i (x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$ ist, mit Hilfe der Formel der Pfaffschen Transformation auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_i$ transformieren, so bekommen wir $n + 1 - m$ Gleichungen

$$\vartheta_\alpha (x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

wo $F_i (x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$ ist, die $n + 1 - m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega' = 0$ sind. Die $n + 1$ Gleichungen

$$\vartheta_\alpha (x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$
$$F_i (x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sind also ein gemeinsames Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) und (1). Wenn wir noch darauf aufmerksam machen, dass wir bei der Transformation nur die Formel (a), die das System der Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, benutzen, so können wir den Satz V aussprechen, indem wir das in dieser Weise erhaltene gemeinsame Integral nichtsingulär nennen:

Satz V. Um das gemeinsame nichtsinguläre Integral der $m < n + 1$ partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution zu erhalten, bestimme man ein System $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0:$$
$$\Theta_\alpha (x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

(f) $\quad F_i (x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i (x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$

das m gegebenen Gleichungen (I′)

$$F_i (x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m).$$

und m Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

die nur keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält. Wenn man aus diesen $n+1+m$ Gleichungen (f) und aus den $2n+1-m$ Hauptintegralen der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) die Grössen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ eliminiert, so bekommt man $n+1$ Gleichungen, die das gemeinsame nichtsinguläre Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) bilden.

Wenn aus diesen $n+1$ Gleichungen nur eine Relation zwischen $x_i\, z$ folgt, so stellen diese das gemeinsame nichtsinguläre Integral im gewöhnlichen Sinne dar; sie stellen im entgegengesetzten Falle ein gemeinsames nichtsinguläres Integral im erweiterten Sinne von S. Lie dar.

Was solches System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ betrifft, das m gegebene Gleichungen (I′) und m Gleichungen, die nur keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält, so bestimmen wir, offenbar ein solches ohne die Integration in folgender Weise: Wir bestimmen ein System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$, das $k\,(0 \leqslant k \leqslant m)$ von der gegebenen Gleichungen $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ und $m - q\,(q \leqslant k)$ Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält. Wenn wir noch die $m-k$ übrigen der Gleichungen (I′) und $k\,(\geqslant q)$ willkürliche Gleichungen, die q Gleichungen erhalten, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, hinzufügen, so bekommen wir das gewünschte System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$. Jedes solches System der Integrale kann in dieser Weise erhalten werden.

Man kann beweisen, dass alle gemeinsamen nichtsingulären Integrale der gegebenen partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution aus denjenigen Systemen der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$ erhalten werden können, die dieselben m Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthalten. Es sei das gemeinsame nichtsinguläre Integral

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$
$$F_i(x_1 \ldots p_n, z\, p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

der Differentialgleichungen (I) vorgelegt. Wir setzen voraus, dass wir dasselbe aus dem System der $n+1+m$ Integrale

$$\Theta_\alpha'(x^{00}, \ldots p_n^{00}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$
$$F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0, \quad \psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

der Differentialgleichung $\Omega_{00} = 0$, erhalten haben. Wenn wir also die Gleichungen

$$\Theta_\alpha'(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m)$$

wo $F_i x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, mit Hilfe der Formel der Pfaffschen Transformation z. B.

$$\begin{array}{ll} & x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \quad j = 1, 2 \ldots n-m \\ & p_i = p_i(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \qquad i = 1, 2 \ldots n \\ (\mathrm{a}') & z = z(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \end{array}$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, auf Variable $x_i\, z\, p_i$ transformieren, so bekommen wir die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$

wo $F_i(x_1 \ldots p_n)$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Wir können dieses Integral aus dem System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0\, dx_1^0 - \ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0\,;$$
$$\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$
$$F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

erhalten, das die von vornherein gegebenen Gleichungen

$$\varphi_i(x_1'' \ldots p_n'') = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält. In der Tat sind die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} & x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \quad j = 1, 2 \ldots n-m \\ (\mathrm{a}') & p_i = p_i(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \qquad i = 1, 2 \ldots n \\ & z = z(x_1 \ldots x_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \\ (\mathrm{b}') & x_i = x_i''(t_1 \ldots t_m x_1^{00} \ldots p_n^{00}) \qquad i = 1, 2 \ldots m \end{array}$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, und die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} & x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) \quad j = 1, 2 \ldots n-m \\ (\mathrm{a}) & p_i = p_i(x_1 \ldots x_m x_1^0 \ldots p_n^0) \qquad i = 1, 2 \ldots n \\ & z = z(x_1 \ldots x_m x_1'' \ldots p_n'') \\ (\mathrm{b}) & x_i = x_i'(y_1 \ldots y_m x_1'' \ldots p_n'') \qquad i = 1, 2 \ldots m \end{array}$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $\varphi_i(x_1^0 \ldots = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist zwei Systeme der Formeln der Pfaffschen Transformation des Differentialausdruckes Ω', so dass

$$\Omega' = \frac{\nu}{\nu_{00}} (dz_{00} - p_1^{00} dx_1^{00} - \ldots - p_n^{00} dx_n^{00})$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, und

$$\Omega' = \frac{\mu}{\mu_0} (dz_0 - p_1^0 dx^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0),$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$. $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, ist. Es existieren offenbar die Formeln der Transformation der neuen Variablen des einen Systems auf die neuen Variablen des anderen. Wenn wir mit $t_{m+1} \ldots t_{2n+1-m}$ die unabhängigen Grössen aus den $x_i^{00} z_{00} p_i^{00}$ und mit $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ diejenigen aus den $x_i^0 z_0 p_i^0$ bezeichnen, so wissen wir, dass $t_{m+1}, \ldots t_{2n+1-m}$ die Funktionen der $y_{m+1}, \ldots y_{2n+1-m}$ sind. Diese letzten Formeln transformiren die Gleichung

$$dz_{00} - p_1^{00} dx_1^{00} - \ldots - p_n^{00} dx_n^{00} = 0.$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, auf die neue

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Es folgt daraus, dass $n + 1 - m$ Integrale

$$\Theta_\alpha'(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m)$$

wo $F_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$, $\psi_i(x_1^{00} \ldots p_n^{00}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, der ersten in die $n + 1 - m$ Integrale $\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$. $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, der zweiten mit Hilfe dieser Formel übergehen. Es ist klar, dass wenn wir diese letzten auf die ursprünglichen Variablen $x_i z p_i$ transformieren, so bekommen wir die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m).$$

wo $F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ ist, die $n + 1 - m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega' = 0$ bilden. Wir schliessen daraus, dass das nichtsinguläre Integral der partiellen Differentialgleichungen (I)

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0, \; F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

aus demjenigen Systeme der $n+1+m$ Integrale

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n+1-m),$$
$$F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad \varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$, das die m gegebenen Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ enthält, erhalten werden kann. Wir können diesen Schluss auch in anderer Weise aussprechen: Die Nichtsingularität des Integrales der partiellen Differentialgleichungen (I) ist eine invariante Eigenschaft hinsichtlich auf alle Pfaffsche Transformationen.

2. Wir wollen jetzt eine Bemerkung über den Zusammenhang zwischen den Gleichungen

$$\text{(f)} \qquad \Theta_\alpha(x_1 \dots p_n) = 0, \quad F_i(x_1 \dots p_n) = 0,$$
$$\varphi_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n+1-m, \; i = 1, 2 \dots m)$$

und den Gleichungen

$$\text{(g)} \quad \vartheta_\alpha(x_1 \dots p_n) = 0 \quad F_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n+1-m \quad i = 1, 2 \dots m)$$

machen. Wir erhalten das gemeinsame nichtsinguläre Integral (g) der Differentialgleichungen (I) durch Elimination der Grössen $x_i^0 \, z_0 \, p_i^0$ aus den Gleichungen

$$\text{(f')} \qquad \Theta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0,$$
$$\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n+1-m, \; i = 1, 2 \dots m)$$

die $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$ bilden, und aus den $2n+1-m$ Hauptintegralen der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) z. B.

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} &x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) && j = 1, 2 \dots n-m \\ &p_i = p_i(x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) && i = 1, 2 \dots n \\ &z = z(x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0), \end{aligned}$$

oder anders gesagt: wir erhalten das gemeinsame Integral (g) der Differentialgleichungen (I) durch die Transformation der Gleichungen

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad \alpha = 1, 2 \dots n+1-m, \; i = 1, 2 \dots m),$$

wo $\varphi_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \dots m)$ ist, auf die neuen Variablen $x_i \, z \, p_i$ mit Hilfe der Formeln

$$\text{(a')} \qquad \begin{aligned} &x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \\ &p_i = p_i(x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n^0) \\ &z = z(x_1 \dots x_m \, x_1^0 \dots p_n), \end{aligned}$$

wo $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Wenn wir umgekehrt in die Gleichungen (g) statt x_{m+j}, p_i, z ihre Werte (a′) einführen, so bekommen wir die Gleichungen (f′), wo $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ ist. Wir können diese letzte Transformation in folgender Weise ausführen: da die Gleichungen (g) nach der Transformation die Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ nicht enthalten, so können wir diesen letzten in den Gleichungen (g), sowie in den Formeln der Transformation (a′), willkürliche Werte beilegen. Wir wollen statt $x_1 \ldots x_m$ diese Werte der $x_1^0 \ldots x_m^0$ einsetzen, die den Gleichungen

$$\varphi_i(x_1^0 \ldots x^0_m\, x^0_{m+1} \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

genügen. Die Formel der Transformation gehen dann in

$$x_{m+j} = x^0_{m+j}, \quad p_i = p_i^0 \quad z = z_0$$

über. Wenn wir also in den Gleichungen (g) statt $x_1 \ldots p_n$ die Werte $x_1^0 \ldots p_n^0$, wo $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, einsetzen, so bekommen wir die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \qquad (g')$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

wo $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist. Wir sehen also, dass die Gleichungen (f′) und (g′) identisch sind. Dieser Schluss ist richtig, insofern wir die oben erwähnte Substitution der Werte von $x_1^0 \ldots p_m^0$ ausführen können, d. h. insofern die Gleichungen (g) und die Gleichungen

$$\varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

verträglich sind. Es folgt daraus, dass die Gleichungen

$$\Theta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad \varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (f)$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots m + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

und die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad \varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

identisch sind, insofern die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m)$$

infolge der Gleichungen $\varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ nicht illusorisch werden. Wir gehen nach dieser Bemerkung zu den Integralen im gewöhnlichen Sinne des Systems in Involution (I) über.

Wenn die Glechungen

$$(g) \qquad \vartheta_\alpha(x_1 \ldots p_n) = 0, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, \ldots m)$$

das gemeinsame Integral im gewöhnlichen Sinne des Systems (I) darstellen, so folgt aus ihnen nur eine Relation zwischen $x_i z$. Dieses Integral ist nur dann möglich, wenn aus den gegebenen Gleichungen (I′) höchsten eine Relation zwischen $x_i z$ folgt. Wenn es eine solche gibt und z den gegebenen Gleichungen genüge leistet, so ist diese ein einziges gemeinsames Integral im gewöhnlichen Sinne. Wir werden im folgenden voraussetzen, dass die gegebenen Gleichungen (I′) in Bezug auf m der p_i unabhängig sind. Das gemeinsame nichtsinguläre Integral im gewöhnlichen Sinne kann aus diesem System der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ erhalten werden, das nie mehr als $m + 1$ Relation zwischen $x_i z$ enthält. In der Tat wenn die Gleichungen $\varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind und wenn die Gleichungen (g) infolge dieser nicht illusorisch werden, so können wir das Integral im gewöhnlichen Sinne (g) aus dem Systeme der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$ erhalten, das die Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ enthält. Dieses System hat infolge der oben gemachten Bemerkung die Gestalt:

$$\vartheta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \ldots m).$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Da die $n + 1$ ersten Gleichungen die Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, so sehen wir, dass die in letzten Gleichungen, die keine Integrale dieser Differentialgleichungen sind, ohne diese Eigenschaft zu verlieren, frei von $p_1^0 \ldots p_m^0$ gemacht werden können.

Umgekehrt, man erhält mit Hilfe des Verfahrens des Satzes V ein gemeinsames Integral im gewöhnlichem Sinne aus dem Systeme (f) der $n + 1 + m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$, das nie mehr als $m + 1$ Relationen zwischen $x_i^0 z_0$, deren m keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, enthält. Vor allem sei noch bemerkt: wir können $n + 1$ Integrale des Systems (f)

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \tag{f}$$
$$(\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \dots m)$$

mit Hilfe der in letzten

$$\varphi_i(x_1^0 \dots x_n^0 z_0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

so umformen, dass sie die $n+1$ Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein werden. Wir wissen in der Tat, dass die Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ in die $2n+1-m$ Integrale dieser Gleichungen nur mit Hilfe der $2n+1-m$ unabhängigen Funktionen $C_i(x_1^0 \dots p_n^0)$ eintreten. Wir können also $2n+1-m$ dieser Grössen z. B. x^0_{m+j}, z_0, p_i^0 durch $C_1 \dots C_{2n+1-m}$ und durch die m übrigen dieser Grössen $x_1^0 \dots x^0_m$ bestimmen. Wenn man diese Werte ins System (f) der Integrale einsetzt, so ergibt sich, dass die m letzten Gleichungen $\varphi_i = 0$ $(i = 1, 2 \dots, m)$ die Grössen $x_1^0 \dots x_m$ enthalten und in Bezug auf dieselben unabhängig sind, da diese Gleichungen keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind. Wenn die übrigen $n+1$ Gleichungen des Systems (f) $x_1^0 \dots x^0_m$ enthalten werden, so können wir dieselben mit Hilfe der m letzten Gleichungen eliminieren, und werden diese $n+1$ Gleichungen nur C_1, C_{2n-1-m} enthalten, d. h. sie werden zu Integralen der Differentialgleichungen der Matrix (B_1). Es sei das System (f) in dieser neuen Form

$$\vartheta_\alpha(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad F_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \dots x_n^0 z_0) = 0 \tag{f'}$$
$$(\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \dots m)$$

dargestellt. Wenn wir jetzt die Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ aus den Gleichungen (f′) und den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \dots x_m x_1^0 \dots p_n^0) & j &= 1, 2 \dots n - m \\ p_i &= p_i(x_1 \dots x_m x_1^0 \dots p_n^0) & i &= 1, 2 \dots n \\ z &= z(x_1 \dots x_m x_1^0 \dots p_n^0) \end{aligned} \tag{a}$$

eliminieren, so bekommen wir offenbar die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha(x \dots p) = 0, \quad F_i(x \dots p) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \dots n + 1 - m, \; i = 1, 2 \dots m)$$

die das gemeinsame Integral im gewöhnlichen Sinne der partiellen Differentialgleichungen (I) darstellen, da die Gleichungen (f′) nur $m+1$ Relationen zwischen $x_i^0 z_0$ enthalten. Wir können das System (f′) noch in der Form

$$\vartheta'_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n - m), \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$
$$\varphi(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m) \qquad (\mathrm{f}'')$$

darstellen. Mann kann beweisen, dass die $m + 1$ letzten Gleichungen ganz willkürlich gewählt werden können, nur sollen m von ihnen keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix sein. Wenn wir in der Tat diese Gleichungen in dieser Weise wählen, und mit Hilfe derselben $m + 1$ der Grössen $x_i^0 z_0$ aus der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ eliminieren, so bekommen wir die Gleichung mit nur $n - m$ Differentialen. Wenn man die $n - m$ Koeffizienten derselben gleich Null setzt und noch die Gleichungen $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ hinzufügt, so bekommt man das gewünschte System der Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$. Wenn das Integral im gewöhnlichem Sinne der Differentialgleichungen (I), dass wir aus den $n + 1 + m$ Integralen des Systems (f'') erhalten, die Gestalt

$$z = f(x_1 \ldots x_n)$$

hat, und wenn diese infolge der Gleichungen $\varphi_i(x_1 \ldots x_n z) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, nicht illusorisch wird, so kann man das System (f'') noch in der Form

$$z = f(x_1^0 \ldots x_n^0), \quad p_\alpha^0 = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^0}, \quad \varphi(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n, \quad i = 1, 2 \ldots m)$$

darstellen. Es folgt daraus, dass die Gleichung $\varphi(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0$ die Folge der Gleichungen $z_0 = f(x_1^0 \ldots x_n^0)$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots x_n^0 z_0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, d. h. das Integral

$$z = f(x_1 \ldots x_n)$$

im gewöhnlichen Sinne genügt der von vornherein gegebenen Gleichung

$$\varphi(x_1 \ldots x_n z) = 0$$

infolge der m von vornherein gegebenen Relationen

$$\varphi_i(x_1 \ldots x_n z) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

die nur keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein sollen.

Wir können also den folgenden Satz VI aussprechen:

Um ein gemeinsames nichtsinguläres Integral im gewöhnlichen Sinne der partiellen Differentialgleichungen (I), die in Bezug auf m der Veränderlichen $p_1 \ldots p_n$ unabhängig sind zu bekommen, soll man ein solches System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ bestimmen, dass nie mehr als $m+1$ Relationen zwischen $x_i^0\, z_0$, die von vornherein gewählt werden können, und von denen m keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein sollen, enthält, und hiermit nach dem Satze V verfahren.

Man kann in dieser Weise alle gemeinsamen nicht singulären Integrale im gewöhnlichen Sinne bestimmen. Dieses Integral hat die Eigenschaft, dass es infolge der m Relationen zwischen $x_i\, z$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, der $m+1^{ten}$ Relation zwischen $x_i\, z$ genügt.

3. Wir nennen das gemeinsame nichtsinguläre Integral der Differentialgleichungen (I) ein vollständiges, wenn es die Form

$$\Theta_\alpha(x_1 \ldots p_n\, C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m, \quad i = 1, 2 \ldots m) \qquad \text{(g)}$$

hat, wo die $n+1-m$ ersten Gleichungen $n+1-m$ willkürliche Konstanten, von denen die gegebenen $F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ frei sind, enthalten und in Bezug auf dieselben unabhängig sind.

Jedes vollständige Integral kann aus diesem Systeme der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$:

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0\, C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0, \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0, \quad \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m, \quad i = 1, 2 \ldots m) \qquad \text{(f)}$$

erhalten werden, dessen $n+m-1$ ersten Gleichungen die $n+1-m$ willkürlichen Konstanten $C_1 \ldots C_{n+1-m}$, von denen die übrigen $2m$ Gleichungen frei sind, enthalten und in Bezug auf dieselben unabhängig sind. Es ist klar, dass die Gleichungen $\varphi_i = 0$, die keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind, keine willkürlichen Konstanten enthalten dürfen, da sie die Relationen zwischen den Integrationskonstanten $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ bilden. Setzen wir nun voraus, dass die Gleichungen (g) und $\varphi_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ verträglich sind. Das System der $n+1+m$ Integrale (f) der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$, das das System (g) gibt, hat die Form

$$\vartheta_\alpha(x_1^0 \ldots p_1^0 C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0,\ F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,\ \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m,\quad i = 1, 2 \ldots m),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wenn wir umgekehrt ein System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ mit den oben erwähnten Eigenschaften bestimmt haben, so erhalten wir daraus nach dem Satze V das vollständige Integral der partiellen Differentialgleichungen (I). Es sei dieses System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$:

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0 C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0,\ F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,\ \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m,\quad i = 1, 2 \ldots m). \tag{f}$$

Wir wissen, dass wir mit Hilfe der Gleichungen $\varphi_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ die ersten $n+1-m$ Gleichungen so umformen können, dass sie $n+1-m$ Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sein werden. Setzen wir nun voraus, dass das schon ausgeführt ist. Wenn wir also die Grössen $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ aus den Gleichungen (f) und aus dem Systeme der $2n+1-m$ Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) eliminieren, so erhalten wir offenbar die Gleichungen

$$\Theta_\alpha(x_1 \ldots p_n C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0,\quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m,\quad i = 1, 2 \ldots m),$$

die das vollständige gemeinsame Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) bilden.

Wir haben also den Satz VII.

Um das gemeinsame vollständige Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) zu erhalten, ist es hinreichend solches System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichungen $\Omega_0 = 0$:

$$\Theta_\alpha(x_1^0 \ldots p_n^0 C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0,\ F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0,\ \varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m,\quad i = 1, 2 \ldots m),$$

wo bei der Bezeichnung der vorigen Sätze nur $n+1-m$ ersten Gleichungen $n+1-m$ willkürlichen Konstanten, in Bezug auf welche sie unabhängig sind, enthalten, zu bestimmen und damit nach dem Satze V zu verfahren. Alle vollständigen Integrale können in dieser Weise erhalten werden.

Wenn das vollständige Integral es im gewöhnlichen Sinne sein soll, so soll das System der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ nicht nur den Bedingungen des Satzes VII,

sondern auch denjenigen des Satzes VI genüge leisten. Wir erhalten das vollständige Integral, wenn wir diesem Systeme der $n+1+m$ Integrale die Form

$$z_0 = C, \quad x_i^0 = C_i \quad (i = 1, 2 \ldots n), \quad F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

wo $f_k(z_0\, x_1^0 \ldots x_n^0) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots m)$ ist, geben vorausgesetzt, dass die Gleichungen $f_k(z_0\, x_1^0 \ldots x_n^0) = 0$ keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind.

4. Fassen wir nun noch den Fall ins Auge, wenn die gegebenen Gleichungen (I′) in Involution in Bezug auf m der Grössen p_i z. B. in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ unabhängig sind. Die Differentialgleichungen der Matrix (B_1) bestimmen in diesem Falle die Veränderlichen x_{m+j}, p_i, z und haben kein Integral der Form $x_i = \text{const.}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$. Wir können daher voraussetzen, dass die Gleichungen $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$ des Systems der $n+1+m$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ die Gestalt

$$x_i^0 = h_i \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

haben, wo h_i willkürlich gewählte Zahlen sind, die nur das System der Hauptintegrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) nicht illusorisch machen sollen. Alle vorigen Sätze lassen sich einfacher aussprechen:

Der Satz V hat die Form: Um das gemeinsame nichtsinguläre Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution, die in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m}$ unabhängig sind, zu bestimmen, soll man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}^0\, dx_{m+1}^0 - \ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0$$

durch $n+1-m$ Integrale

$$\Phi_\alpha(x_{m+1}^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_{m+1}^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m) \quad \text{(f)}$$

integrieren und die Grössen $x_{m+1}^0 \ldots x_n^0\, z_0\, p_{m+1}^0 \ldots p_n^0$ aus den Gleichungen (f) und den Gleichungen

$$F_i(h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

$$\left.\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \ldots x_m\, h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) \quad j = 1, 2 \ldots n-m \\ p_i &= p_i(x_1 \ldots x_m\, h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) \quad i = 1, 2 \ldots n \\ z &= z(x_1 \ldots x_m\, h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}^0 \ldots p_n^0). \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

wo die Gleichungen (a) das System der Hauptintegrale in Bezug auf $x_i = h_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) bilden, eliminieren.

Da die Gleichungen $x_i^0 = h_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ die Grössen p_j nicht enthalten, so enthält der Satz VI die Form: Wenn wir die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}^0 dx_{m+1}^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 1 - m$ Integrale

$$\text{(f)} \qquad \Phi_\alpha (x_{m+1}^0, \ldots p_n^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

die nur eine Relation zwischen $x_{m+j}^0 z_0$

$$\varphi (x_{m+1} \ldots x_n z_0) = 0,$$

die von vornherein gewählt werden kann enthalten, integrieren, und wenn wir die Grössen $x_{m+j}^0 z_0 p_i^0 p_i$ aus den Gleichungen (f) und den Gleichungen

$$F(h_1 \ldots h_m x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$
$$x_{m+j} = x_{m+j}(x_1 \ldots x_m h_1 \ldots h_m x_{m+1}^0 \ldots p_n^0), \; j = 1, 2 \ldots m$$
$$p_i = p_i (x_1 \ldots x_m h_1 \ldots h_m x_{m+1}^0 \ldots p_n^0) \; i = 1, 2 \ldots n$$
$$z = z (x_1 \ldots x_m h_1 \ldots h_m x_{m+1}^0 \ldots p_n^0)$$

eliminieren, so erhalten wir das gemeinsame nichtsinguläre Integral im gewöhnlichen Sinne der gegebenen Differentialgleichungen (I).

Sie hat die Eigenschaft bei den gegebenen Werten der Variablen $x_i = h_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ der gegebenen Gleichung

$$\varphi (x_{m+1} \ldots x_n z) = 0$$

zu genügen. Alle gemeinsamen Integrale im gewöhnlichen Sinne können in dieser Weise erhalten werden.

Endlich der Satz VII hat die Form: Wenn man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}^0 dx_{m+1}^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 1 - m$ Integrale

$$\Phi_\alpha (x_{m+1}^0 \ldots x_n^0 z_0 p_{m+1}^0 \ldots p_n^0, C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0$$
$$\text{(f)} \qquad (\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m),$$

die in Bezug auf die $n+1-m$ willkürlichen Konstanten $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ unabhängig sind, integriert und die Veränderlichen $x_{m+j}{}^0\, z_0\, p_{m+j}{}^0$ aus den Gleichungen

$$\Phi_\alpha\,(x_{m+1}{}^0 \ldots x_n{}^0\, z_0\, p_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0, \quad F_i\,(h_1 \ldots h_m\, x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m, \quad i = 1, 2 \ldots m)$$

und den $2n+1-m$ Hauptintegralen in Bezug auf $x_i = p_i\ (i = 1, 2 \ldots m)$ der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) eliminiert, so wird man das gemeinsame vollständige Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) erhalten. Alle vollständigen Integrale können in dieser Weise erhalten werden. Wenn dieses Integral es im gewöhnlichen Sinne sein soll, so soll aus den Gleichungen (f) nur eine Relation zwischen $x_i{}^0\, z_0$ folgen.

Diese Methode kann die Cauchysche Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen genannt werden.

5. Wir sehen, dass die Bedingung, dass $k\ (\leqslant n+1)$ partielle Differentialgleichungen (1) ein vollständiges System bilden oder zu einem solchen von $m \leqslant n+1$ Gleichungen sich reducieren lassen, nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, damit sie ein gemeinsames Integral besitzen; wobei das vollständige System der m partiellen Differentialgleichungen ein vollständiges Integral mit $n+1-m$ willkürlichen Konstanten besitzt. Diese Theorie zeigt, dass es bei der Integration der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

$m \leqslant n+1$ Integrale

$$F_i\,(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

willkürlich anzunehmen möglich ist, die nur die Bedingung erfüllen, dass sie ein vollständiges System bilden oder zu einem solchen von $m \leqslant n+1$ Gleichungen sich reducieren lassen. Es ist klar, dass $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ ein vollständiges System bilden. Es folgt leicht daraus die Jacobische Methode der Integration einer oder des Systems der partiellen Differentialgleichungen.

6. Diese Theorie enthält in der rein analytischen Form die Ergebnisse der analytisch-geometrischen Untersuchungen von S. Lie (M. Ann. Bd. 9). Wir werden uns beschränken, die hauptsächlichsten Sätze in der Form von S. Lie darzustellen.

Wir setzen voraus, dass die Definition des Elements des $n+1$ dimensionalen Raumes, des Elementvereins und der Integralmannigfaltigkeit M_q von q Dimensionen der gegebenen partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution bekannt sind.

Man nennt eine charakteristische Mannigfaltigkeit von m Dimensionen des gegebenen Systems (I′) in Involution eine solche m-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Elemente den $2n+1-m$ Integralen der Differentialgleichungen der Matrix (B_1), zwischen denen m gegebene Gleichungen (I′)

$$F_i(x_1 \ldots x_n z\, p_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sind, genügen. Das gegebene System (I′) in Involution besitzt $\infty^{2n+1-2m}$ charakteristische Mannigfaltigkeiten [1]).

Der Satz IV kann zweierlei geometrische Bedeutung haben:

a) Wenn $x_i^0\, z_0\, p_i^0$ konstant sind $(F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0 \;\; i = 1, 2 \ldots m)$, so ist dann

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = \frac{\mu}{\mu_0}(dz_0 - p_1^0\, dx_1^0 - \ldots - p_n^0\, dx_n^0) = 0$$

d. h. jedes Element der charakteristischen Mannigfaltigkeit liegt mit allen benachbarten derselben Mannigfaltigkeit vereinigt.

b) Wenn $(x_i^0\, z_0\, p_i^0)$, $(x_i^0 + dx_i^0,\; z_0 + dz_0,\; p_i^0 + dp_i^0)$ zwei benachbarte Elemente zweier benachbarten charakteristischen Mannigfaltigkeiten sind, so erhalten wir, dass wenn zwei benachbarte Elemente zweier charakteristischen Mannigfaltigkeiten vereinigt liegen, alle benachbarten Elemente derselben Mannigfaltigkeiten vereinigt liegen.

Satz V. Um die Integralmannigfaltigkeit M_n der gegebenen Gleichungen (I′) in Involution zu bestimmen, so soll man die Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} bestimmen und durch jedes Element derselben die charakteristische Mannigfaltigkeit führen, vorausgesetzt, dass diese Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} so gewählt ist, dass keine der oben erwähnten charakteristischen Mannigfaltigkeiten mit der Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} unendliche viele gemeinsame Elemente hat [2]).

[1]) S. Lie definirt (l. c.) die charakteristische Mannigfaltigkeit mit Hilfe des Systems der linearen Differentialgleichungen $[F, F_i] = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$, deren Integration zur Integration der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sich reduciert.

[2]) Solche geometrische Bedeutung hat der Umstand, dass m Gleichungen $\varphi_i = 0$ keine Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) sind.

Satz VI. Wenn mann die Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} des gegebenen Systems (I′) in Involution, die als Punktmannigfaltigkeit betrachtet $n-m$-dimensional ist, bestimmt hat und, wenn man durch jedes Element derselben die charakteristische Mannigfaltigkeit führt, so erhält man eine Integralmannigfaltigkeit M_n des gegebenen Systems (I′), die als Punktmannigfaltigkeit aufgefasst n-dimensional ist, vorausgesetzt, dass die Integralmannigfaltigkeit M_{n-m} so gewählt ist, dass keine der erwähnten charakteristischen Mannigfaltigkeiten mit der Mannigfaltigkeit M_{n-m} unendlich viele gemeinsame Punkte hat.

Der Inbegriff der ∞^{n+1-m} Integralmannigfaltigkeiten M_{n-m} heisst ein vollständiges Integral des Systems (I′) in Involution.

Man kann ein solches erhalten, indem man durch jeden Punkt der Punktmannigfaltigkeit von $n+1-m$ Dimensionen [1]) die charakteristischen Mannigfaltigkeiten führt, vorausgesetzt, dass diese Punktmannigfaltigkeit mit keiner der charakteristischen Mannigfaltigkeiten unendlich viele gemeine Punkte hat.

§ 5.

Wir wollen jetzt zur Theorie der singulären Integrale übergehen.

Wir haben die Differentialgleichung

$$\Omega' = \frac{\mu}{\mu_0}(dz_0 - p_1{}^0 dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0) = 0$$

wo $F_i(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$, $\varphi_i(x_1{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, durch die Null-Setzung des Ausdruckes

$$dz_0 - p_1{}^0 dx_1{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0$$

integriert. Wir können diese Gleichung, im Falle, wenn nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ Null sind, durch die Null-Setzung

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 0$$

integrieren. Wir haben gesehen, dass wir in diesem Falle die Wahl der Formel der Transformation so einrichten können, dass $lg\,\mu$

[1]) S. Lie hat beim Beweise dieses Satzes (nur für den Fall zweier Gleichungen) irthümlicherweise statt der $n-1$ dimensionalen Punktmannigfaltigkeit die n dimensionale genommen. (M. Ann., Bd. 9, p. 271).

eine von vornherein gewählte Function der $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$ z. B. $lg\,\mu = y_1$ sein wird. Wir werden dann

$$\frac{\mu}{\mu_0} = e^{y_1 - y_1^0} = 0$$

haben. Wenn wir diese Gleichung auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_i$ transformieren, so folgt aus derselben und aus den Formeln der Transformation infolge der Unabhängigkeit der Variablen $y_1 \ldots y_{2n+1-m}$ noch $n-m$ Gleichungen, die zusammen mit der Gleichung

$$e^{y_1 - y_1^0} = 0$$

und den Gleichungen $F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ein System der $n+1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ d. h. ein gemeinsames Integral des gegebenen Systems in Involution (I) bilden. Wenn dieses Integral durch die Null-Setzung

$$dz^0 - p_1^0\, dx_1^0 - \ldots - p_n^0\, dx_n^0 = 0,$$

wo $F_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$, $\varphi_i(x_1^0 \ldots p_n^0) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ nicht erhalten werden kann, so nennt man das singuläre Integral des Systems (I) in Involution. Das System (I) kann höchstens ein singuläres Integral besitzen. Die Eigenschaft der Singularität ist invariant gegen alle Pfaffschen Transformationen.

2. Alle gemeinsamen Integrale des gegebenen Systems in Involution (I) können aus einem vollständigen Integrale derselben erhalten werden. Es sei das vollständige Integral des Systems (I)

$$\vartheta_\alpha(x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n\, C_1 \ldots C_{n+1-m}) = 0, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$$

$$\text{(g)} \qquad (i = 1, 2 \ldots m, \quad \alpha = 1, 2 \ldots n+1-m)$$

vorgelegt. Es folgt aus diesen Gleichungen eine oder mehrere Relationen zwischen $x_i\, z$ z. B.

$$z = f(x_{k+1} \ldots x_n), \quad x_i = f_i(x_{k+1} \ldots x_n) \quad (i = 1, 2 \ldots k).$$

Wir können dann das Integral (g) in der Form

$$H = f - p_1 f_1 - \ldots - p_k f_k = z - x_1 p_1 - \ldots - x_k p_k,$$

$$\text{(g')} \qquad x_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_{k+j} = \frac{\partial H}{\partial x_{k+j}} \quad (i = 1, 2 \ldots k, \; j = 1, 2 \ldots n-k),$$

darstellen. Wenn wir $C_1 \ldots C_{n+1-m}$, als die neuen Veränderlichen betrachten, so bekommen wir

$$\Omega' = \frac{\partial H}{\partial C_1} dC_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial C_{n+1-m}} dC_{n+1-m}$$

oder

$$\Omega' = \frac{\partial H}{\partial C_1} (dC_1 + U_2 dC_2 + \ldots + U_{n+1-m} dC_{n+1-m}),$$

wo $U_i = \frac{\partial H}{\partial C_i} : \frac{\partial H}{\partial C_1}$ ist. Alle Veränderlichen $C_1 \ldots C_{n+1-m}$, $U_2 \ldots U_{n+1-m}$ sind unabhängig. Wir wissen in der Tat, dass die Gleichung

$$dC_1 + U_2 dC_2 + \ldots + U_{n+1-m} dC_{n+1-m} = 0$$

durch die kleinste Anzahl $n+1-m$ der Gleichungen sich integrieren lässt. Setzen wir nun voraus, dass zwischen den Variablen $C_1, \ldots U_{n+1-m}$ die Relation $\Theta = 0$ stattfindet. Wenn wir für einen Augenblick annehmen, dass diese Veränderlichen unabhängig sind, so kann man bei der Integration der Differentialgleichung

$$dC_1 + U_2 dC_2 + \ldots + U_{n+1-m} dC_{n+1-m} = 0$$

durch $n+1-m$ Integrale eines derselben willkürlich annehmen. Wenn wir diese letztes in der Form $\Theta = 0$ wählen und statt $C_1 \ldots U_{n+1-m}$ ihre Werte einsetzen, so sehen wir, dass die Gleichung

$$dC_1 + U_2 dC_2 + \ldots + U_{n+1-m} dC_{n+1-m}$$

durch $n-m$ Gleichungen integriert werden kann, was offenbar unmöglich ist.

Da der Differentialausdruck Ω' nach der Transformation auf die Variablen $C_1 \ldots C_{n+1-m}$, $U_2, \ldots U_{n+1-m}$ die Form

$$\Omega' = \frac{\partial H}{\partial C_1} (dC_1 + U_2 dC_2 + \ldots + U_{n+1-m} dC_{n+1-m})$$

annimmt, so ist diese die Pfaffsche Transformation. Wir bekommen die gemeinsamen nichtsingulären Integrale des gegebenen Systems (I) in Involution, indem wir die Gleichung

$$dC_1 + U_2 dC_2 + \ldots U_{n+1-m} dC_{n+1-m} = 0$$

durch $n+1-m$ Integrale integrieren, dieselben auf die ursprünglichen Variablen $x_i z p_i$ transformieren und die Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad i = 1, 2 \ldots m$$

hinzufügen. Man erhält das singuläre Integral im Falle, wenn ein solches existiert, wenn man

$$\frac{\partial H}{\partial C_1} = 0$$

setzt, vorausgesetzt, dass nicht alle $\frac{\partial F_i}{\partial z}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ verschwinden und also $\frac{\partial H}{\partial C_1}$, $C_1 \ldots C_{2n+1-m}$, $U_2, \ldots U_{2n+1-m}$ unabhängig sind. Es folgt aus den Formeln der Transformation

$$U_i = \frac{\partial H}{\partial C_i} : \frac{\partial H}{\partial C_1}$$

infolge der Unabhängigkeit der Variablen $\frac{\partial H}{\partial C_1}$, $C_1 \ldots\ldots C_{n+1-m}$ $U_2 \ldots U_{n+1-m}$, dass $\frac{\partial H}{\partial C_i} = 0$ $(i = 1, 2 \ldots n + 1 - m)$ ist. Das singuläre Integral des Systems (I) in Involution genügt den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n + 1 - m) \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

wo die Grössen $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ mit Hilfe der Gleichungen (g′) eliminiert sein sollen. Wenn das vollständige Integral ein im gewöhnlichen Sinne ist und die Form

$$z = f(x_1 \ldots x_n, C_1 \ldots C_{n+1-m}), \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

hat, so genügt das singuläre Integral den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \quad F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

wo $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ mit Hilfe der Gleichungen des vollständigen Integrals eliminiert sein sollen.

3. Da die Formeln

$$C_i = C_i(x_1 \ldots p_n), \quad \frac{\partial H}{\partial C_j} : \frac{\partial H}{\partial C_1} = U_j$$

$$(i = 1, 2 \ldots n + 1 - m, \quad j = 2, 3 \ldots n + 1 - m),$$

wo $F(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, diejenigen der Pfaffschen Transformation für den Differentialausdruck Ω' sind, so stellen die Gleichungen

$$C_i(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad \frac{\partial H}{\partial C_j} : \frac{\partial H}{\partial C_1} = \text{const.}$$

dar, wo $F_i(x_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist, ein System der $2n+1-2m$ Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1), wo

$$F_i(x_1 \ldots p_n) = 0 \quad \text{ist.}$$

Also stellen die Gleichungen

$$F_i(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad C_\alpha(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}; \quad \frac{\partial H}{\partial C_j} : \frac{\partial H}{\partial C_1} = \text{const.},$$

$$(i = 1, 2 \ldots m, \ \alpha = 1, 2 \ldots n+1-m, \ j = 2, 3 \ldots n+1-m) \qquad \text{(h)}$$

ein System der vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) dar. Wenn das vollständige Integral im gewöhnlichem Sinne ist, so hat dieses System die Form:

$$F_i(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad C_\alpha(x_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad \frac{\partial f}{\partial C_j} : \frac{\partial f}{\partial C_1} = \text{const.}$$

$$(i = 1, 2 \ldots m, \ \alpha = 1, 2 \ldots n+1-m, \ j = 2, 3 \ldots n+1-m).$$

Die Gleichungen $z = f$, $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ (α) genügen den Gleichungen $F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$. Wenn wir voraussetzen, dass diese letzten in Bezug auf $p_1 \ldots p_m$ auflösbar sind, so können wir das System (α) in der Form

$$z = f, \quad p_{m+j} = \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}}, \quad F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = 0$$

$$(i = 1, 2 \ldots n), \quad (j = 1, 2 \ldots n-m)$$

darstellen. Da weiter die Gleichungen (α) $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ bestimmen so schliessen wir, dass die Gleichungen

$$z = f, \quad p_{m+j} = \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}} \quad (j = 1, 2 \ldots n-m)$$

in Bezug auf $C_1 \ldots C_{n+1-m}$ unabhängig sind. Man kann also das vorige System (h) der vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Matrix (B_1) in der Form

$$F_i(x_1 \ldots x_n z p_1 \ldots p_n) = \text{const.}, \quad z = f, \quad p_{m+j} = \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}}, \qquad \text{(k)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial C_\alpha} : \frac{\partial f}{\partial C_1} = \text{const.}, \quad (i = 1, 2 \ldots m, \ j = 1, 2 \ldots n-m, \ \alpha = 2, 3 \ldots n+1-m)$$

darstellen[1]). Die Differentialgleichungen der Matrix (B_1) stellen die Verallgemeinerung der kanonischen Hamiltonschen Differentialgleichungen, und die Formeln (h), (k) stellen die Verallgemeinerung der bekannten Sätze von Jacobi über den Zusammenhang zwischen einer partiellen Differentialgleichung und dem Systeme der kanonischen Differentialgleichungen dar.

§ 6.

S. Lie hat eine neue Methode der Integration des Systems der partiellen Differentialgleichungen (I) in Involution gegeben, die darin besteht, dass man die Integration dieses Systems auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit nur $n+1-m$ unabhängigen Variablen reduziert. Wir wollen diese in der analytischen Form darstellen. Wir können immer voraussetzen, dass die gegebenen Gleichungen (I') in Bezug auf m der Grössen $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ z. B. in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m}$ aufgelöst sind:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \Theta_i\left(x_1, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \quad i = 1, 2 \ldots m$$

Die Integration dieses Systems besteht in der Integration der Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - \Theta_1 dx_1 - \ldots - \Theta_m dx_m - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots - p_n dx_n = 0$$

mit Hilfe $n+1-m$ Integrale. Die Formeln der Pfaffschen Transformation genügen dem Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dx_{m+j} = -\sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}} dx_\beta$$

$$\text{(M)} \qquad dp_{m+j} = \sum_1^m{}_\beta \left(\frac{\partial \Theta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z}\right) dx_\beta$$

$$dz = \sum_1^m{}_\beta \left(\Theta_\beta - \sum_1^{n-m}{}_j p_{m+j} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_{m+j}}\right) dx_\beta .$$

[1]) Diese Gleichungen für den Fall

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sind von Saltikow (l. c.) gegeben.

Das System der Hauptintegrale derselben in Bezug auf $x_i = h$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ist:

$$\left.\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \\ p_{m+j} &= p_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2 \ldots n - m \qquad (\alpha)$$
$$z = z(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0).$$

Wenn wir $x_{m+j}{}^0$, z_0, $p_{m+j}{}^0$ für die neuen Variablen $y_{m+1} \ldots y_{2n+1-m}$, nehmen und $x_i = y_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ setzen, so bekommen wir die Formel (α) der Pfaffschen Transformation des Ausdruckes Ω', nach der die Variablen $y_1 \ldots y_m$ höchstens im gemeinschaftlichen Faktor bleiben, so dass wir nach der Transformation

$$\Omega' = \frac{\mu}{\mu_0}(dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0)$$

haben, wo

$$d\,l\,g\,\mu = \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial z} dx_\beta$$

ist. Wenn wir die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

durch $n + 1 - m$ Integrale (c) integrieren, diese letzten auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_{m+j}$ transformieren und endlich zu den erhaltenen Gleichungen (D) die Gleichungen (I'), hinzufügen, so bekommen wir das System der $n + 1$ Gleichungen die das gemeinsame Integral des gegebenen Systems der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \Theta_i\left(x_1 \ldots x_n\, z\, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

darstellen.

Es ist klar, dass wenn wir mit denselben Formeln (α) den Differentialausdruck

$$\Omega'' = dz - \Theta_1 dx_1 - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots - p_n dx_n,$$

wo $x_2 \ldots x_m$ die Parameter sind, transformieren, so bekommen wir denselben Ausdruck

$$\frac{\mu}{\mu_0}(dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0).$$

wo nur $x_2 \ldots x_m$ die Parameter sind. Wenn wir die Gleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

mit denselben $n+1-m$ Integralen (c), wie im vorigen Falle, d. h. mit den $n+1-m$ Integralen, die die Parameter $x_2 \ldots . x_m$ nicht enthalten, integrieren und mit den Formeln der Pfaffschen Transformation (a), wo nur $x_2 \ldots . x_m$ Parameter sind, auf die ursprünglichen Variablen transformieren, so bekommen wir dieselben $n+1-m$ Gleichungen (D), wie im vorigen Falle, wo nur $x_2 \ldots x_m$ die Parameter sind, und diese $n+1-m$ Gleichungen sind die $n+1-m$ Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega'' = dz - \Theta_1 dx_1 - \ldots - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots - p_n dx_n = 0.$$

Wenn wir zu diesen $n+1-m$ Gleichungen noch die Gleichung

$$p_1 = \Theta_1$$

hinzufügen, so bekommen wir offenbar das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Theta_1 \left(x_1 \ldots . x_n \, z \, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} \ldots . \frac{\partial z}{\partial x_n} \right),$$

wo $x_2 \ldots x_m$ die Parameter sind, oder kurz gesagt, jedes gemeinsame Integral der partiellen Differentialgleichungen (I) gibt, wenn man $x_2 \ldots x_m$ als Parameter betrachtet, das Integral einer den Differentialgleichungen (I):

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Theta_1 \left(x_1 \ldots . x_n \, z \, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \ldots . \frac{\partial z}{\partial x_n} \right),$$

was selbstverständlich ist Das umgekehrte trifft aber im allgemeinen nicht zu d. h. wenn man die Formel der Pfaffschen Transformation der Differentialausdruck

$$\Omega'' = dz - \Theta_1 dx_1 - p_{m+1} dx_{m+1} - \ldots - p_n dx_n,$$

wo $x_2 \ldots x_m$ die Parameter sind, mit Hilfe der Integration des Systems der Differentialgleichungen

$$\frac{dx_{m+j}}{dx_1} = -\frac{\partial \Theta_1}{\partial p_{m+j}}, \quad \frac{dp_{m+j}}{dx_1} = \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j} \frac{d\Theta_1}{dz}.$$

(N) $$\frac{dz}{dx_1} = \Theta_1 - \sum_1^{n-m}{}_j \, p_{m+j} \frac{\partial \Theta_1}{\partial p_{m+j}}$$

in der Form

$$\begin{aligned} x'_{m+j} &= \alpha'_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \\ p'_{m+j} &= p'_{m+j}(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \\ z &= z'(x_1 \ldots x_m x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \end{aligned} \quad j = 1, 2 \ldots n - m \qquad (\alpha')$$

bestimmt hat, wo diese $2(n-m)+1$ Gleichungen die Hauptintegrale der Differentialgleichungen (N) in Bezug auf $x_1 = h_1$ und $x_2 \ldots x_m$ die Parameter sind, und wenn man nach der Transformation der Differentialgleichung $\Omega'' = 0$ in der Form

$$\Omega'' = \frac{\nu}{\nu_0}(dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0) = 0$$

die Gleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

mit $n+1-m$ Integralen integriert hat, so geben diese letzten nach der Transformation auf die ursprünglichen Variablen

$$x_1 x_{m+1} \ldots x_n z\, p_{m+1} \ldots p_n$$

und nach der Hinzufügung der Gleichungen (I'), wo überall $x_2 \ldots x_m$ als die Veränderlichen betrachtet sind, noch im Allgemeinen kein gemeinsames Integral der gegebenen Differentialgleichungen (I). Es soll ausser der Bedingung, dass die $n+1-m$ Integrale der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

keine Parameter $x_2 \ldots x_m$ enthalten, noch diese notwendige und hinreichende Bedingung erfüllt sein, dass die Gleichungen (α) und (α') identisch sind, d. h. das System der vollständigen Integrale des ersten Systems (N) der Differentialgleichungen (M), dass durch die Voraussetzung $x_2 = \text{const.}, x_m = \text{const.}$ entstanden ist, soll bei den Variablen $x_2 \ldots x_m$ dasjenige für das System (M) sein. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, aber wir können dies mit Hilfe der Transformation von A. Mayer[1]) immer erreichen, wenn wir nämlich

$$x_i = h_i + (x_1 - h_1)\, y_i, \quad q_1 = p_1 + y_2 p_2 + \ldots + y_m p_m, \qquad (P)$$
$$q_i = (x_1 - h_1)\, p_i \quad i = 2, 3 \ldots m$$

setzen.

[1]) M. Ann. Bd. V. („Ueber unbeschr. int. Syst.", § 5).

Die Gleichung $\Omega' = 0$ und die gegebenen Gleichungen (I') werden:

$$\Omega' = dz - \vartheta_1\, dx_1 - \vartheta_2\, dy_2 - \ldots - \vartheta_m\, dy_m - \\ - p_{m+1}\, dx_{m+1} - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

und

$$q_i = \vartheta_i\,(x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1} \ldots x_n\, z\, p_{m+1} \ldots p_n), \quad (i = 1, 2 \ldots m),$$

wo

$$\vartheta_1 = \Theta_1 + y_2'\,\Theta_2 + \ldots + y_m'\,\Theta_m,$$
$$\vartheta_i = (x_1 - h_1)\,\Theta_i \quad (i = 2, 3 \ldots m)$$

ist. Das System der Differentialgleichungen (M) ist:

$$dx_{m+j} = -\sum_2^m{}_\beta \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial p_{m+j}}\, dy_\beta - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_{m+j}}\, dx_1$$

$$dp_{m+j} = \sum_2^m{}_\beta \left(\frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial z}\right) dy_\beta + \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\right) dx_1$$

$$dz = \sum_2^m{}_\beta \left(\vartheta_\beta - \sum_1^{n-m} p_{m+j}\frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial p_{m+j}}\right) dy_\beta + \left(\vartheta_1 - \sum_1^{n-m} p_{m+j}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_{m+j}}\right) dx_1$$

und, wie es bekannt ist, ist das System der Hauptintegrale dieses Systems identisch mit demjenigen der Hauptintegrale für $x_1 = h_1$ des ersten Systems

$$dx_{m+j} = -\frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_{m+j}}\, dx_1$$

$$dp_{m+j} = \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_{m+j}} + p_{m+j}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\right) dx_1$$

$$dz = \left(\vartheta_1 - \sum p_{m+j}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_{m+j}}\right) dx_1 .$$

Wenn das System der Hauptintegrale für $x_1 = h_1$ des letzten die Form

$$\begin{aligned} x_{m+j} &= x_{m+j}\,(x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1}{}^0 \ldots p_n) \\ p_{m+j} &= p_{m+j}\,(x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \\ z &= z\,(x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) \end{aligned} \qquad (a'')$$

hat, wo $y_2 \ldots y_m$ die Parameter sind, so bekommt man nach der Integration der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

mit Hilfe der $n+1-m$ Integralen, die die Parameter $y_2, \ldots y_m$ nicht enthalten, und nach der Transformation mit den Formeln (α''), wenn man noch die Gleichung

$$q_1 = \vartheta_1$$

hinzufügt, das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Theta_1 + y_2 \Theta_2 + \cdot + y_m \Theta_m.$$

Wenn man darin $y_2 \ldots y_m$ als die Variablen betrachtet und noch die Gleichungen

$$q_i = \vartheta_i \quad (i = 2 \ldots m)$$

hinzufügt, so bekommt man das gemeinsame Integral des Systems

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \vartheta_1; \quad \frac{\partial z}{\partial y_i} = \vartheta_i \quad (i = 2 \ldots m).$$

Wenn man endlich das letzte auf die ursprünglichen Variablen $x_i\, z\, p_i$ mit Hilfe der Formel (P) transformiert, so bekommt man dann das gemeinsame Integral des Systems der partiellen Differentialgleichungen (I). Wenn das System der $n+1-m$ der Integrale der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_{m+1}{}^0 dx_{m+1}{}^0 - \ldots - p_n{}^0 dx_n{}^0 = 0$$

die Eorm

$$\Theta_\alpha (x_{m+1}{}^0 \ldots x_n{}^0\, z_0\, p_{m+1}{}^0 \ldots p_n{}^0) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m).$$

und das System der $n+1-m$ Integrale der Differentialgleichung

$$dz - \vartheta_1 dx_1 - p_{m+1} dx_{m+1} - \cdot - p_n dx_n = 0$$

die Form

$$\vartheta_\alpha (x_1\, y_2 \ldots y_m\, y_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m),$$

hat, so ist klar, dass die Gleichungen

$$\vartheta_\alpha (x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m)$$

bei $x_1 = h_1$ die Form

$$\Theta_\alpha (x_{m+1} \ldots x_n\, z,\, p_{m+1} \ldots p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n+1-m)$$

annehmen, und also die Parameter $y_2 \ldots y_m$ verschwinden. Wir können endlich den Satz aussprechen:

Wenn wir die partiellen Differentialgleichungen (I) auf die neuen Variablen mit Hilfe der Formel

$$x_i = h_i + (x_1 - h_1)\, y_i \quad (i = 2, 3 \ldots m)$$

transformieren, so dass sie die Form

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \Theta_1 + y_2\, \Theta_2 + \ldots + y_m\, \Theta_m \\ \frac{\partial z}{\partial x_i} &= (x_1 - h_1)\, \Theta_i \quad (i = 2 \ldots m) \end{aligned}$$

annehmen, und wenn wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Theta_1 + y_2\, \Theta_2 + \ldots + y_m\, \Theta_m$$

mit $n + 2 - m$ Gleichungen

$$\vartheta_\alpha\, (x_1\, y_2 \ldots y_m\, x_{m+1} \ldots p_n) = 0, \quad q_1 = \Theta_1 + y_2\, \Theta_2 + \ldots + \Theta_m\, y_m$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n + 1 - m).$$

die die Eigenschaft haben, dass die $n + 1 - m$ ersten Gleichungen bei $x_1 = h_1$ keine der Grössen $y_2 \ldots y_m$ enthalten, integrieren so bekommen wir bei den Veränderlichen $y_2 \ldots y_m$ und also nach der Hinzufügung der Gleichungen

$$q_i = (x_1 - h_1)\, \Theta_i \quad (i = 2, 3 \ldots m)$$

das gemeinsame Integral der Differentialgleichungen (I).

Wenn wir dasselbe auf die ursprünglichen Variablen mit Hilfe der Formel

$$\begin{aligned} x_i &= h_i + (x_1 - h_1)\, y_i \quad (i = 2, 3 \ldots m) \\ q_1 &= p_1 + y_2\, p_2 + \ldots + p_m\, y_m \\ q_i &= (x_1 - h_1)\, p_i \quad (i = 2, 3 \ldots m) \end{aligned}$$

transformieren, so bekommen wir das gemeinsame Integral des vorgelegten Systems in Involution der partiellen Differentialgleichungen (I).

48. M. W. STEKLOFF. **O teoryi szeregów trygonometrycznych.** *(Sur la théorie des séries trigonométriques).* Mémoire présenté par M. St. Zaremba m. c.

1. Le but principal des recherches qui vont suivre consiste à donner une démonstration nouvelle d'un théorème qui a été établi pour la première fois par M. Liapounoff en 1896, démontré ensuite par M. Hurwitz dans son Mémoire récent: „Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier“ [1]), et qui ne présente qu'un cas particulier du théorème beaucoup plus général énoncé dans ma Note du 6 mars 1903 (Comptes-rendus).

La méthode que nous allons développer peut présenter un intérêt non seulement parce qu'elle conduit à une démonstration nouvelle du théorème important, tout à l'heure mentionné, mais parce qu'elle permet en même temps d'établir d'une manière assez simple et directe d'autres propositions intéressantes, concernant la théorie des séries de Fourier. Je mentionnerai, par exemple, un théorème nouveau, analogue aux théorèmes connus de M. Picard et Weierstrass, et conduisant, comme ceux-ci, à des propositions importantes sur la représentation approchée des fonctions et sur le développement des fonctions continues en séries des polynômes.

C'est pourquoi je me permets de publier mes recherches.

2. Démontrons d'abord un lemme préliminaire.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, bornée et intégrable à l'intérieur d'un intervalle (a, b), a et b étant des nombres donnés.

Supposons, pour fixer les idées, que $b > a$.

Soit $\varphi(x, n)$ une autre fonction de deux variables x et n pouvant d'ailleurs contenir d'autres paramètres $\alpha, \beta, \ldots$.

Supposons que $\varphi(x, n)$ reste bornée et intégrable par rapport à x dans l'intervalle (a, b), quelle que soit la valeur réelle de n, et pour toutes les valeurs des variables réelles $\alpha, \beta, \ldots$ comprises respectivement dans certaines domaines $(A), (B), \ldots$, déterminés pour chacune de ces variables.

Supposons que $\varphi(x, n)$ tende vers une fonction $\varphi_0(x)$, bornée et intégrable par rapport à x dans l'intervalle (a, b), lorsque n croît indéfiniment, $\alpha, \beta, \ldots$ restant compris dans les domaines $(A), (B), \ldots$

[1]) Annales de l'Ecole Normale, T. XIX, 1902.

Supposons encore qu'on peut, le nombre positif ε étant donné à l'avance, trouver un nombre ν, ne dépendant ni de x, ni de $\alpha, \beta, \ldots$ assez grand et tel qu'on ait pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b) et de $\alpha, \beta, \ldots$, compris dans les domaines $(A), (B), \ldots$,

$$(1) \qquad |\varphi(x, n) - \varphi_0(x)| < \varepsilon \quad \text{pour } n \geqq \nu.$$

On dira dans ce cas que la fonction $\varphi(x, n)$ converge, pour $n = \infty$, uniformément vers sa limite $\varphi_0(x)$.

Décomposons maintenant l'intervalle (a, b) en intervalles partiels Δx_s dont le nombre soit égal à μ $(s = 1, 2, \ldots \mu)$, désignons par x_s une valeur quelconque de x dans l'intervalle Δx_s et formons la somme

$$(1) \qquad S_n^{(\mu)} = \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, \varphi(x_s, n)\, \Delta x_s.$$

Comme $f(x)$ et $\varphi(x, n)$ sont intégrables dans l'intervalle (a, b), le produit $f(x)\, \varphi(x, n)$ le sera aussi.

Supposant que μ croisse indéfiniment et en passant à la limite, on a

$$(2) \qquad \lim_{\mu=\infty} S_n^{(\mu)} = \lim_{\mu=\infty} \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, \varphi(x_s, n)\, \Delta x_s = \int_a^b f(x)\, \varphi(x, n)\, dx.$$

Formons ensuite la somme

$$S^{(\mu)} = \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, \varphi_0(x_s)\, \Delta x_s.$$

On aura, en passant, comme précédemment, à la limite

$$(3) \qquad \lim_{\mu=\infty} S^{(\mu)} = \int_a^b f(x)\, \varphi_0(x)\, dx = \int_a^b f(x) \lim_{n=\infty} \varphi(x, n)\, dx,$$

car

$$\varphi_0(x) = \lim_{n=\infty} \varphi(x, n).$$

Cela posé, considérons la différence

$$S_n^{(\mu)} - S^{(\mu)} = \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, [\varphi(x_s, n) - \varphi_0(x_s)]\, \Delta x_s.$$

Choisissant convenablement le nombre ν, on trouve, en vertu de (1),

$$\left| S_n^{(\mu)} - S^{(\mu)} \right| < \varepsilon \sum_{s=1}^{\mu} f(x_s)\, \Delta x_s \leqq \varepsilon M (b-a) \quad \text{pour } n \geqq \nu,$$

M désignant le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle (a, b).

Cette inégalité a lieu, quel que soit le nombre μ.

Supposant que μ croisse indéfiniment et en passant à la limite, on obtient, en tenant compte de (2) et de (3), l'inégalité suivante

$$\left| \int_a^b f(x)\, \varphi(x, n)\, dx - \int_a^b f(x) \lim_{n=\infty} \varphi(x, n)\, dx \right| < \varepsilon M (b-a) = \varepsilon',$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de n, plus grandes que ν.

On peut donc écrire

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x)\, \varphi(x, n)\, dx = \int_a^b f(x) \lim_{n=\infty} \varphi(x, n)\, dx,$$

ce qui démontre le lemme suivant:

Lemme. Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle quelconque (a, b); soit $\varphi(x, n)$ une autre fonction de x, de n et d'un certain nombre de paramètres $\alpha, \beta, \ldots$

La fonction $\varphi(x, n)$ satisfait aux conditions suivantes:

Elle reste bornée et intégrable par rapport à x dans l'intervalle (a, b) pour toutes les valeurs de n et pour les valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \ldots$, compris dans certains domaines $(A), (B), \ldots$, bien déterminés pour chacun de ces paramètres.

Elle tend uniformément, lorsque n croît indéfiniment, vers une fonction $\varphi_0(x)$, bornée et intégrable par rapport à x dans l'intervalle (a, b), les paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ étant compris dans les domaines $(A), (B)$,[1]...

[1]) La fonction $\varphi_0(x)$ peut dépendre, en général, de $\alpha, \beta, \ldots$.

Ces conditions étant remplies, on a toujours

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x)\, \varphi(x, n)\, dx = \int_a^b f(x) \lim_{n=\infty} \varphi(x, n)\, dx. \tag{4}$$

On peut ajouter que ce lemme reste vrai dans le cas beaucoup plus général, où la fonction $f(x)$ peut cesser d'être intégrable aux environs de certains points isolés. Pour que le lemme soit vrai, il suffit seulement que les intégrales

$$\int_a^b f(x)\, dx, \quad \int_a^b \left| f(x) \right| dx,$$

définies au sens général de M. Jordan (Cours d'Analyse, T. II, p. 49 etc. Paris, 1894), existent.

Mais ici je n'insiste pas sur ce point.

3. Posons maintenant

$$a = o, \; b = 2\pi.$$

Soit η_0 un nombre donné. positif, assez petit et nécessairement plus petit que π [2]).

Prenons un autre nombre positif η, plus petit que η_0. Désignons par x_0 une valeur quelconque de la variable x, prise dans l'intervalle $(\eta, 2\pi - \eta)$.

Considérons la fonction

$$\varphi(\xi, n) = \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)(x - \xi)}{2 \sin \frac{x - \xi}{2}}\, dx, \tag{5}$$

n étant un entier positif, ξ une variable variant entre les limites 0 et 2π.

On voit que $\varphi(\xi, n)$ est une fonction de ξ, de n et des paramètres x_0, η, bornée et intégrable par rapport à ξ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, quel que soit le nombre positif n et les valeurs des paramètres x_0, η, compris dans les ntervalles $(\eta, 2\pi - \eta)$, $(0, \eta_0)$.

Quelle que soit la position du point x_0 à l'intérieur de l'intervalle $(\eta, 2\pi - \eta)$, l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ ne sortira pas de l'intervalle $(0, 2\pi)$.

[2]) Pour que l'on ait $\eta_0 < 2\pi - \eta_0$.

Cinq cas différents peuvent se présenter, lorsque la variable ξ varie de $\xi = 0$ à $\xi = 2\pi$:

1^0 $\qquad 0 < \xi < x_0 - \eta,$

2^0 $\qquad \xi = x_0 - \eta,$

3^0 $\qquad x_0 - \eta < \xi < x_0 + \eta,$

4^0 $\qquad \xi = x_0 + \eta,$

5^0 $\qquad x_0 + \eta < \xi < 2\pi.$

Posons maintenant

$$\frac{x - \xi}{2} = z,$$

z étant une nouvelle variable, et

$$\alpha = \frac{x_0 - \eta - \xi}{2}, \quad \beta = \frac{x_0 + \eta - \xi}{2}.$$

On a toujours, quelle que soit la position de ξ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$,

$$\alpha < \pi, \quad \beta < \pi.$$

L'égalité (5) se réduit à

$$\varphi(\xi, n) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.$$

Supposons d'abord que ξ se trouve dans l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ [3-me cas]. On a $\alpha < 0$, $\beta > 0$, et

$$\varphi(\xi, n) = \int_{\alpha}^{0} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz + \int_{0}^{\beta} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz =$$

$$= \int_{0}^{-\alpha} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz + \int_{0}^{\beta} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.$$

Chacune de ces dernières intégrales n'est qu'un cas particulier de l'intégrale de Dirichlet

$$\int_{0}^{g} f(z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz, \qquad 0 < g \leqq \pi,$$

correspondant à

$$f(z) = 1.$$

En appliquant la méthode connue de Dirichlet, qui se simplifie essentiellement dans le cas considéré, nous démontrerons sans peine que $\varphi(\xi, n)$ tend uniformément vers la limite π, lorsque n croît indéfiniment[1]).

Supposons ensuite que ξ se trouve en dehors de l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ [cas 1° et 5°] et considérons, pour fixer les idées, le cas 1°.

On aura

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

$$\varphi(\xi, n) = \int_0^\beta \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz - \int_0^\alpha \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz,$$

d'où l'on conclut que $\varphi(\xi, n)$ tend uniformément vers zéro pour $n = \infty$, si

$$0 < \xi < x_0 - \eta.$$

On démontrera de la même manière que $\varphi(x, n)$ tend aussi vers zéro pour $n = \infty$, lorsque ξ se trouve dans l'intervalle $(x_0 + \eta, 2\pi)$ [cas 5°], et cela indépendamment de la position de ξ dans cet intervalle.

Il est aisé de s'assurer enfin que dans les cas 2° et 4° on a

$$\lim_{n=\infty} \varphi(\xi, n) = \frac{\pi}{2}.$$

On voit donc que la fonction $\varphi(\xi, n)$, définie par la relation (5), tend uniformément vers la fonction bien déterminée $\varphi_0(\xi)$, lorsque n croît indéfiniment.

Quant à la fonction limite $\varphi_0(\xi)$, on peut la définir par les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(\xi) = 0 && \text{pour} \quad 0 < \xi < x_0 - \eta, \\
&\varphi_0(\xi) = \frac{\pi}{2} && \text{pour} \quad \xi = x_0 - \eta, \\
(8) \qquad &\varphi_0(\xi) = \pi && \text{pour} \quad x_0 - \eta < \xi < x_0 + \eta, \\
&\varphi_0(\xi) = \frac{\pi}{2} && \text{pour} \quad \xi = x_0 + \eta, \\
&\varphi_0(\xi) = 0 && \text{pour} \quad x_0 + \eta < \xi < 2\pi.
\end{aligned}$$

[1]) Compar., par exemple, E. Picard: „Traité d'Analyse" Paris, 1901, T. I° p. 238 etc.

Ce résultat a lieu pour tout nombre donné $\eta < \eta_0$ et pour chaque valeur donnée de x_0, prise dans l'intervalle $(\eta, 2\pi - \eta)$.

4. Soit maintenant $F(x)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Envisageons l'identité connue, fondamentale dans la théorie des séries de Fourier,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-\xi) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2 \sin \frac{x-\xi}{2}},$$

n désignant un entier quelconque (positif).

Multiplions cette identité par $F(\xi)\,d\xi$ et intégrons-la, en étendant l'intégration à l'intervalle $(0, 2\pi)$.

On obtient l'égalité bien connue

$$(9) \quad \frac{\pi a_0}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \int_0^{2\pi} F(\xi) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2 \sin \frac{x-\xi}{2}} d\xi,$$

où l'on a posé

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \cos k\xi\, d\xi, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \sin k\xi\, d\xi \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Reprenons les nombres η et x_0, définis dans le n° précédent.

Multiplions (9) par dx et intégrons-la entre les limites $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$. On trouve

$$\frac{\pi a_0}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) =$$

$$= \frac{1}{2\eta} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left\{ \int_0^{2\pi} F(\xi) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2 \sin \frac{x-\xi}{2}} d\xi \right\}, \tag{10}$$

puisque

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx = 2\eta, \quad \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \cos kx\, dx = \frac{2 \sin k\eta}{k} \cos kx_0,$$

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \sin k x \, dx = \frac{2 \sin k \eta}{k} \sin k x_0 .$$

Remarquant maintenant que, d'après l'hypothèse faite au sujet de $F(\xi)$, on peut changer l'ordre des intégrations dans l'intégrale double du second membre de l'égalité (10), on obtient

$$(11) \quad \frac{\pi a_0}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k \eta}{k \eta} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0) = \frac{1}{2 \eta} \int_0^{2\pi} F(\xi) \varphi(\xi, n) \, d\xi.$$

où

$$\varphi(\xi, n) = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{2 \sin \frac{x-\xi}{2}} \, dx$$

est précisément la fonction $\varphi(\xi, n)$, que nous avons considérée dans le numéro précédent [l'égalité (5)].

L'égalité (11) a lieu, évidemment, quelle que soit la position du point $x = x_0$ dans l'intervalle $(\eta, 2\pi - \eta)$.

5. Posons maintenant

$$(12) \qquad S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k \eta}{k \eta} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0)$$

et considérons la série

$$(13) \qquad S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \eta}{k \eta} (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0).$$

Cette série sera convergente et sa somme sera égale à la limite de S_n pour $n = \infty$, si cette limite existe

On a, d'après (11),

$$S_n = \frac{1}{2 \pi \eta} \int_0^{2\pi} F(\xi) \varphi(\xi, n) \, d\xi.$$

Par conséquent,

$$(14) \qquad S = \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2 \pi \eta} \int_0^{2\pi} F(\xi) \varphi(\xi, n) \, d\xi.$$

Or, les fonctions $F(\xi)$ et $\varphi(\xi, n)$ satisfont à toutes les conditions du lemme du numéro 2, comme nous l'avons déjà montré dans le numéro 3.

En appliquant ce lemme au cas considéré, on trouve

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} F(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi = \int_0^{2\pi} F(\xi) \lim_{n=\infty} \varphi(\xi, n)\, dx = \\ = \int^{2\pi} F(\xi)\, \varphi_0(\xi)\, d\xi\,. \tag{15}$$

Désignant maintenant par ε, ε', ε'', ε''' quatre quantités infiniment petites, on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} F(\xi)\, \varphi_0(\xi)\, d\xi = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{x_0-\eta-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon', \varepsilon''=0} \int_{x_0-\eta+\varepsilon'}^{x_0+\eta-\varepsilon''} + \lim \int_{x_0+\eta+\varepsilon'''}^{2\pi} \cdot \tag{16}$$ [1]

Mais, en vertu de (8), on a

$$\int_0^{x_0-\eta-\varepsilon} = 0\,, \qquad \int_{x_0+\eta+\varepsilon'''}^{2\pi} = 0$$

pour toutes les valeurs positives de ε, ε''', quelque petites qu'elles soient. On a donc

$$\lim_{\varepsilon=0} \int = 0\,, \qquad \lim_{\varepsilon'''=0} \int = 0\,. \tag{17}$$

D'autre part, on trouve, en tenant compte de (8),

$$\int = \pi \int F(\xi)\, d\xi\,,$$

l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs infiniment petites de ε', ε''.

On a donc

$$\lim_{\varepsilon', \varepsilon''=0} \int_{x_0-\eta+\varepsilon'}^{x_0+\eta-\varepsilon''} = \pi \lim_{\varepsilon', \varepsilon''=0} \int_{x_0-\eta+\varepsilon'}^{x_0+\eta+\varepsilon''} F(\xi)\, d\xi = \pi \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(\xi)\, d\xi\,. \tag{18}$$

Les égalités (13), (14), (15), (16), (17) et (18) donnent

$$S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos k x_0 + b_k \cos k x_0) = \frac{1}{2\eta} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(\xi)\, d\xi\,. \tag{19}$$

[1]) Nous omettons l'expression $F(\xi)\, \varphi_0(\xi)$ sous le signe des intégrales, pour simplifier l'écriture.

Mais, quels que soient les nombres η et x_0, choisis de la manière indiquée plus haut (numéro 3), l'intégrale

$$(20) \qquad \frac{1}{2\eta}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(\xi)\,d\xi$$

a un sens bien déterminé, car $F(\xi)$ reste bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Il s'ensuit que la série (13) converge en tous les points de l'intervalle $(\eta, 2\pi-\eta)$ et que sa somme est égale à la valeur de l'intégrale (20).

6. Démontrons maintenant que la série (13) converge uniformément dans l'intervalle $(\eta, 2\pi-\eta)$.

Pour cela considérons la différence

$$S_n - S = \frac{1}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi} F(\xi)\left[\varphi(\xi, n) - \varphi_0(\xi)\right] d\xi.$$

En vertu des propriétés de la fonction $\varphi(\xi, n)$, indiquées dans le numéro 3, on peut affirmer qu'il existe un nombre r tel qu'on aura pour $n \geqq r$ et pour toutes les valeurs de ξ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$

$$\left|\varphi(\xi, n) - \varphi_0(\xi)\right| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

On aura donc

$$\left|S_n - S\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi}\left|F(\xi)\right| d\xi \leqq \varepsilon\,\frac{M}{\eta},$$

M désignant le maximum de $|F(\xi)|$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Pour chaque valeur de $\eta < \eta_0$, fixée d'une manière quelconque, on peut, par conséquent, donner à l'avance un nombre positif ε' et puis, choisir le nombre r de façon que l'on ait

$$(21) \qquad |S_n - S| < \varepsilon' \qquad \text{pour } n \geqq r.$$

et cela pour toute position du point x_0 dans l'intervalle $(\eta, 2\pi-\eta)$.

Cette inégalité démontre la proposition énoncée au début de ce n°.

7. On peut maintenant déduire de l'égalité (19) quelques conséquences intéressantes que nous allons indiquer avant de passer à la démonstration du théorème de MM. Liapounoff et Hurwitz.

Faisons une hypothèse particulière au sujet de la fonction $F(\xi)$:

supposons que pour un point x, pris à l'intérieur de l'intervalle $(0, 2\pi)$, l'expression

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)}{2} \tag{22}$$

tende vers une limite déterminée, lorsque la variable positive h tend vers zéro, n'importe de quelle manière.

Dans ce cas on peut donner à l'avance un nombre positif ε et puis, trouver un autre membre δ tel qu'on aura

$$\left| \frac{F(x+h)+F(x-h)}{2} - A \right| < \varepsilon \qquad \text{pour } h < \delta, \tag{23}$$

où A désigne la limite vers laquelle tend l'expression (22), lorsque h tend vers zéro, c'est-à-dire, selon les notations usuelles,

$$A = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}. \tag{24}$$

Considérons maintenant l'intégrale [voir l'égalité (19)]

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi.$$

Prenons pour nouvelle variable h en posant

$$\xi = x + h.$$

On trouve:

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi = \int_{-\eta}^{\eta} F(\xi+h)\, dh = \int_{-\eta}^{0} F(x+h)\, dh + \int_{0}^{\eta} F(x+h)\, dh =$$

$$= \int_{0}^{\eta} \Big[F(x+h) + F(x-h) \Big]\, dh.$$

Prenons pour η un nombre positif plus petit que δ; l'inégalité (23) aura lieu pour toutes les valeurs de h comprises dans l'intervalle $(0, \eta)$.

On peut donc poser

$$F(x+h)+F(x-h) = 2A + \vartheta,$$

où ϑ est une fonction de h satisfaisant à la condition

$$|\vartheta| < 2\varepsilon.$$

On a donc

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi = \int_0^{\eta} 2A\, dh + \int_0^{\eta} \vartheta\, dh,$$

d'où l'on tire aisément

$$\left| \frac{1}{2\eta} \int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi - A \right| < \varepsilon. \tag{25}$$

D'autre part, le nombre η étant fixé de la manière que nous venons d'indiquer, on peut trouver, en vertu de (21), un nombre ν, dépendant de η, tel qu'on ait

$$|S_\nu - S| < \varepsilon. \tag{26}$$

En rapprochant les inégalités (25) et (26) et en tenant compte de (19) et (24), on trouve

$$\left| S_\nu - \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2} \right| < 2\varepsilon, \tag{27}$$

où [l'égalité (12)]

$$S_\nu = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,^{1)}.$$

L'inégalité (27) démontre le théorème suivant:

Théorème. Pour chaque point x, intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$, où l'expression

$$\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2} \tag{28}$$

a une valeur déterminée, on peut trouver un nombre positif η, suffisamment petit et puis, un entier positif ν, suffisamment grand, et construire une suite trigonométrique finie de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

qui représentera la valeur approchée de l'expression (28) avec une approximation donnée à l'avance 2ε.

[1]) Nous remplaçons pour plus de simplicité, la variable x_0 par x.

8. Supposons maintenant que la fonction $F(x)$ soit continue en tous les points de l'intervalle $(0, 2\pi)$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif δ tel qu'on ait pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et pour toutes les valeurs de h dont le module reste inférieur à δ

$$F(x+h) - F(x) | < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

Appliquons le théorème précédent à ce cas particulier.

Dans l'hypothèse, faite par rapport à $F(x)$, on peut choisir le nombre η indépendamment de la position du point x dans un intervalle quelconque (α, β), intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$; il en sera de même, par conséquent, du nombre ν.

D'autre part, dans le cas considéré, on a

$$\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} = F(x).$$

L'inégalité (27) se réduit à

$$S_\nu - F(x) | < 2\varepsilon, \tag{29}$$

où le nombre positif η, assez petit, et le nombre ν, assez grand, restent les mêmes pour tous les points de l'intervalle (α, β).

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. Si $F(x)$ est une fonction continue en tous les points de l'intervalle $(0, 2\pi)$, on peut, le nombre positif ε étant donné à l'avance, trouver un autre nombre positif η, suffisamment petit, et un entier ν, suffisamment grand, et construire ensuite une série trigonométrique finie

$$S_\nu = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\sin k\eta}{k\eta} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

telle que la fonction $F(x)$ puisse être représentée par S_ν avec l'approximation donnée à l'avance 2ε en tous les points de tout intervalle (α, β), intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$.

C'est un théorème, analogue aux théorèmes de M. Picard et de Weierstrass.

Si nous remplaçons dans S_ν le facteur $\frac{\sin k\eta}{k\eta}$ par r^k $(0 < r < 1)$,

nous obtiendrons le théorème de M. Picard; si nous le remplaçons par $e^{-k^2 t}$ $(0 < t < 1)$, nous retrouvons le théorème de Weierstrass [1]).

9. Du théorème que nous venons d'établir, il résulte presque immédiatement le théorème sur la représentation approchée des fonctions continues à l'aide des polynômes.

En développant $\cos kx$ et $\sin kx$ en séries des puissances de x et s'arrêtant aux termes convenablement choisis, on trouve

$$|S_\nu - P_m(x)| < \varepsilon,$$

$P_m(x)$ étant un polynôme en x de degré m, m désignant un entier, convenablement choisi.

Cette inégalité et (29) donnent

$$|F(x) - P_m(x)| < 3\varepsilon,$$

ce qui démontre ce théorème, bien connu:

Théorème. Toute fonction $F(x)$, continue dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ peut être représentée à l'aide d'un polynôme $P_m(x)$, convenablement choisi, avec l'approximation donnée à l'avance 3ε en tous les points intérieurs à l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Nous n'avons considéré que l'intervalle $(0, 2\pi)$, mais il est évident que le théorème reste vrai pour tout intervalle (a, b), a et b étant des nombres quelconques.

De ce théorème se déduit immédiatement le théorème de M. Picard sur le développement d'une fonction continue en une série de polynômes. Il est inutile de reproduire la démonstration bien connue (Voir E. Picard: „Traité d'Analyse". T. I, p. 278, Paris, 1901).

10. Envisageons de nouveau l'égalité (19), en y remplaçant x_0 par x,

$$(19) \quad S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2\eta}\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi.$$

Soit x_0 une valeur quelconque de x dans l'intervalle $(\eta, 2\pi - \eta)$.

Multiplions l'égalité (19) par dx et intégrons-la entre les limites $x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta$.

On trouve [comparez le n° 4]

[1]) Comparez encore: Leopold Tejer, Comptes rendus, 1900.

$$(30)\quad S' = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sin^2 k\eta}{k^2\eta^2}(a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0) = \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi) d\xi\right),$$

car la série (19) converge uniformément [voir n° 6].

Supposons que la série de Fourier

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}{}' a_k \cos k x + b_k \sin k x)$$

converge pour $x = x_0$.

En employant la méthode de Riemann (Gesammelte Werke, Leipzig, 1876, p. 232), nous démontrons que dans le cas considéré

$$\lim_{\eta=0} S' = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}{}' (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0).$$

D'autre part, l'égalité (30) ayant lieu pour toutes les valeurs positives de η, plus petites qu'un nombre donné $\eta_0 < \pi$, donne

$$\lim_{\eta=0} S' = \lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi\right).$$

On a donc

$$\Phi(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}{}' (a_k \cos k x_0 + b_k \sin k x_0 = \lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi) d\xi\right).$$

ce qui nous permet d'énoncer ce théorème général:

Théorème. Pour que la série de Fourier, correspondant à une fonction $F(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, converge en un point quelconque x_0, intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$, il est nécessaire que l'expression

$$K = \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi\right) \tag{31}$$

ait une limite bien déterminée pour $\eta = 0$.

D'autre part, si cette limite existe et si la série de Fourier converge pour $x = x_0$, elle a

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi\right)$$

pour somme.

11. Considérons maintenant l'intégrale

$$I = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right).$$

Posons $\xi = x + h$, h étant une nouvelle variable; il viendra

$$I = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \left(\int_{-\eta}^{+\eta} F(x+h)\, dh \right) =$$

$$= \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{0}^{\eta} \Big[F(x+h) + F(x-h) \Big] dh,$$

d'où l'on tire, en changeant l'ordre des intégrations,

$$I = \int_{0}^{\eta} dh \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \Big[F(x+h) + F(x-h) \Big] dx. \tag{32}$$

Supposons maintenant que les expressions

$$F(x_0 + h) \text{ et } F(x_0 - h)$$

tendent vers les limites bien déterminées

$$F(x_0 + 0) \text{ et } F(x_0 - 0),$$

lorsque la variable positive h tend vers zéro.

On pourra alors trouver un nombre positif δ tel qu'on ait pour tous les points u de l'intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0)$

$$F(u) = F(x_0 - 0) + \varphi_1(u), \quad |\varphi_1(u)| < \varepsilon \tag{33}$$

et, pour tous les points de l'intervalle $(x_0,\ x_0 + \delta)$,

$$F(u) = F(x_0 + 0) + \varphi_2(u), \quad |\varphi_2(u)| < \varepsilon. \tag{34}$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

Considérons maintenant les intégrales

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x+h)\, dx \text{ et } \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x-h)\, dx.$$

On peut écrire

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x+h)\, dx = \int_{x_0-\eta+h}^{x_0+\eta+h} F(u)\, du = \int_{x_0-\eta+h}^{x_0} F(u)\, du + \int_{x_0}^{x_0+\eta+h} F(u)\, du.$$

Prenons pour η un nombre positif plus petit que $\frac{\delta}{2}$.

En remarquant que $h - \eta \leqq 0$, on trouve, en tenant compte de (33)

$$\int_{x_0-\eta+h}^{x_0} F(u)\,du = \int_{x_0-\eta+h}^{x_0} \Big[F(x_0-0)+\varphi_1(u)\Big]du = F(x_0-0)(\eta-h) + \int_{x_0-\eta+h}^{x_0} \varphi_1(u)\,du.$$

D'autre part, on a, en vertu de (34),

$$\int_{x_0}^{x_0+\eta+h} F(u)\,du = \int_{x_0}^{x_0+\eta+h} \Big[F(x_0+0)+\varphi_2(u)\Big]du = F(x_0+0)(\eta-h) + \int_{x_0}^{x_0+\eta+h} \varphi_2(u)\,du.$$

Par conséquent,

$$I_1 = \int_0^{\eta} dh \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x+h)\,dx =$$

$$= \int_0^{\eta} dh \Big[F(x_0-0)(\eta+h) + F(x_0+0)(\eta-h)\Big] + Q_1,$$

où

$$Q_1 = \int_0^{\eta} dh \left\{ \int_{x_0}^{x_0+\eta+h} \varphi_2(u)\,du + \int_{x_0-\eta+h}^{x_0} \varphi_1(u)\,du \right\}.$$

Il est évident que

$$|Q_1| < 3\varepsilon\eta^2, \quad \text{si} \quad \eta < \frac{\delta}{2}.$$

On a donc

$$I_1 = \frac{3}{2}\eta^2 F(x_0+0) + \frac{\eta^2}{2} F(x_0-0) + Q_1, \quad |Q_1| < 3\varepsilon\eta^2.$$

En appliquant les mêmes raisonnements à l'intégrale

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x-h)\,dx$$

et puis à l'intégrale

$$I_2 = \int_0^{\eta} dh \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} F(x-h)\,dx.$$

nous trouverons aisément, en tenant compte de (33) et (34),

$$I_2 = \frac{3}{2}\eta^2 F(x_0-0) + \frac{\eta^2}{2} F(x+0) + Q_2,$$

où

$$Q_2 = \int_0^{\eta} dh \left\{ \int_{x_0-\eta-h}^{x_0} \varphi_1(u)\, du + \int_{x_0}^{x_0+\eta-h} \varphi_2(u)\, du \right\}$$

et

$$|Q_2| < 3\varepsilon\eta^2, \quad \text{si} \quad \eta < \frac{\delta}{2}.$$

On trouve donc finalement

$$I = I_1 + I_2 = 2\eta^2 \left[F(x_0+0) + F(x_0-0) \right] + Q_1 + Q_2$$

avec la condition

$$(35) \qquad |Q_1 + Q_2| < 6\varepsilon\eta^2 \quad \text{pour} \quad \eta < \frac{\delta}{2}.$$

Formons maintenant l'expression K (31):

$$K = \frac{I}{4\eta^2} = \frac{F(x_0+0) + F(x_0-0)}{2} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\eta^2}.$$

De cette égalité on tire, en tenant compte de (35),

$$\left| K - \frac{F(x_0+0) + F(x_0-0)}{2} \right| < \frac{3}{2}\varepsilon \quad \text{pour} \quad \eta < \frac{\delta}{2}.$$

On voit donc que l'expression (31) tend vers une limite déterminée, lorsque η tend vers zéro, pour chaque point $x = x_0$ de l'intervalle $(0, 2\pi)$ où les expressions

$$F(x_0+0), \quad F(x_0-0)$$

ont des valeurs déterminées et cette limite est égale à

$$\frac{F(x_0+0) + F(x_0-0)}{2}.$$

Cette proposition combinée avec le théorème précédent, nous conduit au théorème suivant:

Théorème. Si la série de Fourier converge en un point $x = x_0$, intérieur à l'intervalle $(0, 2\pi)$, où les expressions

$$F(x+0), \quad F(x_0-0)$$

ont des valeurs déterminées[1]), elle convergera toujours vers

[1]) Nous pouvons remplacer cette condition par une condition plus générale que voici: „où l'expression $\frac{F(x_0+0) + F(x_0-0)}{2}$ a une valeur déterminée".

$$\frac{F(x_0+0)+F(x_0-0)}{2}.$$

C'est le théorème de Riemann [compar. A. Harnack, Bulletin des Sciences Mathém., 1882, p. 293].

12. Passons maintenant à la démonstration du théorème de M. Liapounoff.

Reprenons l'égalité (19) [en y remplaçant x_0 par x]

$$S=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{2\eta}\int_{x-\eta}^{x+\eta}F(\xi)\,d\xi. \qquad (19)$$

Soit η' un autre nombre positif satisfaisant aux conditions

$$\eta<\eta'<\pi.$$

et considérons l'intervalle $(\eta', 2\pi-\eta')$.

L'égalité (19) a lieu pour tous les points de cet intervalle.

Multiplions cette égalité par $F(x)\,dx$ et intégrons-la en étendant l'intégration à l'intervalle $(\eta', 2\pi-\eta')$.

On trouve, en se rappelant que la série S converge uniformément (n° 6).

$$\frac{\pi a_0 a'_0}{2}+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k a_k'+b_k b_k')=\frac{1}{2\eta}\int_{\eta'}^{2\pi-\eta'}F(x)\Big(\int_{x-\eta}^{x+\eta}F(\xi)\,d\xi\Big)dx. \qquad (36)$$

où l'on a posé

$$a_k'=\frac{1}{\pi}\int_{\eta'}^{2\pi-\eta'}F(x)\cos kx\,dx,\quad b_k'=\frac{1}{\pi}\int_{\eta'}^{2\pi-\eta'}F(x)\sin kx\,dx.$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots)$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction donnée, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Définissons la fonction $F(x)$, qui figure dans la formule (36), de la manière suivante:

$$\begin{aligned} F(x)&=0, && \text{si } -\eta<x<\eta',\\ F(x)&=f(x), && \text{si } \eta'\leqq x\leqq 2\pi-\eta',\\ F(x)&=0, && \text{si } 2\pi-\eta'<x<2\pi+\eta. \end{aligned} \qquad (37)$$

On a alors

$$a_k' = b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k' = a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin kx\,dx$$

et l'égalité (36) devient

$$(38)\qquad \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{2\eta}\int_0^{2\pi} F(x)\left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\,d\xi\right)dx.$$

Or, quelle que soit la fonction $F(x)$, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, la série de la forme

$$(39)\qquad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

est toujours convergente, comme l'a déjà remarqué M. A. Harnack (loc. cit., p. 274).

En posant, en effet,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) + \varrho_n,$$

on trouve aisément

$$\int_0^{2\pi}\varrho_n^2\,dx = \int_0^{2\pi}F^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

Cette égalité, ayant lieu quelle que soit le nombre entier n, démontre la proposition énoncée.

Ecrivons maintenant l'égalité (38) sous la forme

$$(40)\qquad \frac{1}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi}F(x)\left(\int_{x-\eta}^{x+\eta}F(\xi)\,d\xi\right)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k^2+b_k^2) + R_n,$$

où l'on a posé

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k\eta}{k\eta}(a_k^2+b_k^2).$$

Désignons par R_n' le reste de la série (39).

Il est évident qu'on a toujours, indépendamment du nombre η,

$$(41)\qquad |R_n| \leqq R_n' \geqq 0,$$

car

$$\left.\frac{\sin k\eta}{k\eta}\right| \leqq 1.$$

Or, la série (39) étant convergente, on peut trouver un nombre ν tel qu'on ait

$$R_n' < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq \nu,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

On aura donc, en vertu de (41),

$$|R_n| < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq \nu. \tag{42}$$

L'égalité (40) a lieu, quel que soit le nombre η, plus petit que η_0.

Supposant que η tend vers zéro et en passant à la limite, on trouve

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) - \lim_{\eta=0} R_n.$$

Or, l'intégralité (42), ayant lieu indépendamment de η, montre que

$$\lim_{\eta=0} |R_n| < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq \nu.$$

On obtient donc l'inégalité suivante

$$\left| \lim_{\eta=0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) \right| < \varepsilon,$$

qu'on peut remplacer par l'égalité

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \lim_{\eta=0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx. \tag{43}$$

13. Considérons maintenant le second membre de l'égalité obtenue. Posons

$$\xi = x + \zeta,$$

ζ étant une nouvelle variable.

On aura

$$\int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} F(\xi)\, d\xi \right) dx = \int_0^{2\pi} F(x) \left(\int_{-\eta}^{+\eta} F(x+\zeta)\, d\zeta \right) dx,$$

d'où, en changeant l'ordre des intégrations, on tire

$$(44)\quad \int_0^{2\pi} F(x)\Big(\int_{-\eta}^{+\eta} F(x+\zeta)\,d\zeta\Big)\,dx = \int_{-\eta}^{+\eta} d\zeta\Big(\int_0^{2\pi} F(x)\,F(x+\zeta)\,dx\Big).$$

Posons

$$\psi(\zeta) = \int_0^{2\pi} F(x)\,F(x+\zeta)\,dx.$$

Considérons la différence

$$\Delta = \psi(\zeta+h) - \psi(\zeta) = \int_0^{2\pi} F(x)\Big[F(x+\zeta+h) - F(x+\zeta)\Big]\,dx$$

qu'on peut présenter sous la forme suivante:

$$\Delta = \int_{\zeta}^{2\pi+\zeta} F(u-\zeta)\Big[F(u+h) - F(u)\Big]\,du.$$

Décomposons l'intervalle $(\zeta, 2\pi+\zeta)$ en intervalles élémentaires

$$e_1,\ e_2,\ e_3, \ldots,\ e_q,$$

q étant un entier quelconque.

Désignons par e_i ceux de ces éléments particuliers, où l'oscillation O_i de la fonction $F(u)$ est plus grande qu'un nombre positif ε, donné à l'avance, par e_k — ceux, où l'oscillation de $F(u)$ ne surpasse pas ε. Comme $F(u)$ reste intégrable dans l'intervalle $(\zeta, 2\pi+\zeta)$, on peut choisir une décomposition convenable telle que l'on ait

$$(45)\qquad \sum e_i < \varepsilon,$$

la somme étant étendue à tous les éléments e_i, où l'oscillation O_i surpasse le nombre ε.

Décomposons maintenant chacun des éléments e_k en trois parties e_k', e_k'' et e_k''' de façon que l'on ait [1])

$$(46)\qquad \sum e_k' < \varepsilon,\quad \sum e_k''' < \varepsilon,$$

ce qui est toujours possible.

[1]) Compar. A. Hurwitz, Annales de l'Ecole Normale, 3-e série, T. XIX, 1902, p. 362.

Désignons maintenant par δ un nombre positif plus petit que la plus petite des parties e_k' et e_k''', et supposons que

$$|h| \leqq \delta. \tag{47}$$

Dans ce cas on aura, pour tous les points de chacun des intervalles e_k''

$$|F(u+h) - F(u)| < \varepsilon, \tag{48}$$

car les points $u+h$ et u appartiennent tous les deux, en vertu de (47), à l'élément e_k, où l'oscillation de $F(u)$ ne surpasse pas ε.

Ecrivons Δ sous la forme suivante

$$\Delta = \sum \int_{e_k'} + \sum \int_{e_k''} + \sum \int_{e_k'''} + \sum \int_{e_i}, \tag{49}$$

en entendant par

$$\int_{\omega}$$

l'intégrale étendue à l'élément ω ($\omega = e_k', e_k'', e_k''', e_i$).

On a, en tenant compte de (46),

$$\left|\sum \int_{e_k'}\right| < \sum \left|\int_{e_k'}\right| < 2M^2 \sum e_k' < 2M^2 \varepsilon,$$

$$\left|\sum \int_{e_k'''}\right| < \sum \left|\int_{e_k'''}\right| < 2M^2 \sum e_k''' < 2M^2 \varepsilon,$$

M désignant le maximum de $|F(u)|$ dans l'intervalle $(\zeta, 2\pi + \zeta)$.

D'autre part, on trouve, en vertu de (48),

$$\left|\sum \int_{e_k''}\right| < M\varepsilon \sum e_k'' < 2\pi M \varepsilon,$$

et, en tenant compte de (45),

$$\left|\sum \int_{e_i}\right| < 2M^2 \sum e_i < 2M^2 \varepsilon.$$

On a donc, eu égard à (49),

$$\Delta < 6M^2\varepsilon + 2\pi M\varepsilon = 2M(3M + \pi)\varepsilon = \varepsilon'.$$

On en conclut qu'on peut trouver un nombre positif δ tel qu'on aura pour toutes les valeurs de h, dont le module est inférieur à δ, et pour toutes les valeurs de ζ dans l'intervalle $(-\eta, +\eta)$

$$\psi(\zeta+h)-\psi(\zeta)\,|<\varepsilon',$$

ε' étant un nombre positif, donné à l'avance.

La fonction $\psi(\zeta)$ est donc continue dans l'intervalle $(-\eta, +\eta)$.

14. Considérons maintenant l'intégrale

$$(50)\qquad \int_{-\eta}^{+\eta} d\zeta\Big(\int_0^{2\pi} F(x)\,F(x+\zeta)\,dx\Big)=\int_{-\eta}^{+\eta}\psi(\zeta)\,d\zeta.$$

Choisissons le nombre η de façon que l'on ait

$$\eta<\delta.$$

On a alors pour tous les points ζ de l'intervalle $(-\eta, +\eta)$

$$\psi(\zeta)=\psi(0)+\psi_1(\zeta),$$

où $\psi_1(\zeta)$ satisfait à la condition

$$(51)\qquad |\psi_1(\zeta)|<\varepsilon.$$

On trouve donc

$$\int_{-\eta}^{+\eta}\psi(\zeta)\,d\zeta=\psi(0)\int_{-\eta}^{+\eta}d\zeta+\int_{-\eta}^{+\eta}\psi_1(\zeta)\,d\zeta,$$

d'où, en tenant compte de (51), on tire

$$\Big|\int_{-\eta}^{+\eta}\psi(\zeta)\,d\zeta-2\,\eta\,\psi(0)\Big|<2\,\varepsilon\,\eta.$$

Or

$$\psi(0)=\int_0^{2\pi}F^2(x)\,dx.$$

Par conséquent [comp. les égalités (44) et (50)],

$$\Big|\frac{1}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi}F(x)\Big(\int_x^{x+\eta}F(\xi)\,d\xi\Big)\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F^2(x)\,dx\Big|<\varepsilon,$$

ou bien

$$(52)\qquad \lim_{\eta=0}\frac{1}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi}F(x)\Big(\int_{x-\eta}^{x+\eta}F(\xi)\,d\xi\Big)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F^2(x)\,dx.$$

Cette égalité a lieu pour toute fonction $F(x)$ satisfaisant aux conditions (37) qui se réduisent maintenant, pour $\eta = 0$, aux suivantes

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{pour } 0 < x < \eta', \\ F(x) &= f(x) && \text{pour } \eta' \leqq x \leqq 2\pi - \eta' \\ F(x) &= 0 && \text{pour } 2\pi - \eta' < x < 2\pi, \end{aligned}$$

où $f(x)$ est une fonction quelconque, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Quant à η' c'est un nombre positif arbitraire satisfaisant à une seule condition: $\eta' < \pi$.

Il s'ensuit immédiatement que l'égalité (52) a toujours lieu, pour toute fonction $f(x)$ bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

On peut donc écrire

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

en entendant par a_k et b_k les expressions suivantes

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Le théorème suivant est donc démontré:

Théorème. Quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, on a toujours

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2), \tag{53}$$

comme si l'égalité

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

qui peut n'avoir aucun sens sous les suppositions générales faites par rapport à $f(x)$, représentait le développement de la fonction $f(x)$ suivant la série de Fourier, laquelle serait ici uniformément convergente.

15. Posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \varrho_n. \tag{54}$$

On a

$$\int_0^{2\pi} \varrho^2\, dx = \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

On en conclut, en vertu de (53), que

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \varrho_n^2\, dx = 0.$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction telle que les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) f(x)\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos kx\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin kx\, dx$$

aient un sens bien déterminé et que

$$\int_0^{2\pi} \varphi^2(x)\, dx < Q^2,$$

Q désignant un nombre assignable.

Multiplions (54) par $\varphi(x)\, dx$ et intégrons-la entre les limites α et β, α et β étant des nombres quelconques, compris dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

On trouve

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\, dx = \frac{\pi a_0 a_0'}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k a_k' + b_k b_k') + \int_\alpha^\beta \varrho_n \varphi(x)\, dx,$$

où l'on a posé

$$a_k' = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \varphi(x) \cos kx\, dx, \quad b_k' = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \varphi(x) \sin kx\, dx.$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Or

$$\left|\int_\alpha^\beta \varrho_n\, \varphi(x)\, dx\right| \leqq \left(\int_\alpha^\beta \varrho_n^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^\beta \varphi^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left(\int_0^{2\pi} \varrho_n^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} Q.$$

Il s'ensuit, en vertu de (55), que

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varrho_n\, \varphi(x)\, dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, f(x)\, dx = \frac{\pi a_0 a_0'}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a_k' + b_k b_k').$$

En posant, en particulier,

$$\varphi(x) = f(x), \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2\pi,$$

nous retrouvons l'égalité (53).

Nous pouvons maintenant énoncer ce théorème général:

Thèorème. Soient $f(x)$ une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, $\varphi(x)$ une autre fonction pour laquelle les intégrales

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad \int_\alpha^\beta \varphi(x) \cos kx\, dx, \quad \int_\alpha^\beta \varphi(x) \sin kx\, dx, \quad \int_\alpha^\beta \varphi^2(x)\, dx,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

α et β étant deux nombres quelconques, compris dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, restent finies et bien déterminées

Ces conditions étant remplies, on a toujours

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, f(x)\, dx = \frac{\pi a_0 a_0'}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a_k' + b_k b_k'),$$

où

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

$$b_k' = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\cos kx\,dx,\quad b_k' = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin kx\,dx.$$

$$(k = 0, 1, 2 \ldots).$$

Les théorèmes démontrés sont susceptibles de diverses applications intéressantes que je me permettrai d'indiquer dans un autre travail.

Kharkow, le 1 Octobre 1903.

---

49. M. L. K. GLIŃSKI. **Gruczoły trawienne w górnej części przełyku u człowieka, oraz ich znaczenie.** ***(Die Labdrüsen im oberen Teile der menschlichen Speiseröhre und ihre Bedeutung).*** *(Les glandes à pepsine dans la partie supérieure de l'oesophage).* Mémoire présenté par M. T. Browicz m. t.

Labdrüsen sind im oberen Teile der menschlichen Speiseröhre zuerst im Jahre 1879 vom Rüdinger[1]) entdeckt worden. Diese Entdeckung geriet aber wieder in Vergessenheit, so dass diese Labdrüsen neuerdings im Jahre 1897 vom Schaffer[2]) nochmals entdeckt und unter dem Namen der oberen Cardiadrüsen genauer beschrieben wurden. Dieser von Schaffer eingeführte Namen erscheint mir unzutreffend, da er zu Verwechslungen Anlass geben kann; deshalb schlage ich vor, die im oberen Teile des Oesophagus auftretenden Rüdinger-Schafferschen Drüsen — einfach Labdrüsen der Speiseröhre zu benennen, was ebenso in dem mikroskopischen Bau wie auch aller Wahrscheinlichkeit nach in der verdauenden Wirkung ihres Sekretes gerechtfertigt sein dürfte. Mit denselben Drüsen befassten sich Krause, Lauteschläger, Eberth, Hildebrand,

[1]) Rüdinger. Beiträge zur Morphologie des Gaumensegels und des Verdauungsapparates. Stuttgart 1879.

[2]) Schaffer. *a)* Uber die Drüsen der menschl. Speiseröhre. Sitzungsber. der Wiener Akad. d. Wissensch. CVI. Bd. Abthlg. III. 1897.

b) Beiträge zur Histologie menschlicher Organe (VI. Oesophagus). Ibidem

c) Epithel und Drüsen der Speiseröhre. Wien. klinische Wochenschrift 1898 nr. 22.

d'Hardiviller und besonders Coffey und Hewlett. Trotzdem ist die Frage der Anwesenheit, Häufigkeit, des makroskopischen Aussehens, des mikroskopischen Baues und der pathologischen Bedeutung dieser Drüsen keineswegs erledigt und dies veranlasste mich eine Reihe exakter makro- wie auch mikroskopischer Untersuchungen anzustellen.

Die makroskopische Untersuchung stützte sich auf die genauere Besichtigung der ganzen Speiseröhre und besonders ihres oberen Teiles in 1144 Sektionsfällen. In 10 Fällen, wo makroskopisch keine Labdrüsen nachweisbar waren, habe ich bis 5 cm lange Abschnitte aus dem oberen Teile der Speiseröhre mikroskopisch auf Serienschnitten untersucht. Um den Bau dieser Drüsen mikroskopisch genauer festzustellen. habe ich 8 Fälle (zum grössten Teile in Serienschnitten) untersucht, wo die Drüsen schon makroskopisch sichtbar waren. Die Untersuchungen ergaben folgendes.

Unter 1144 Sektionsfällen sind im oberen Teile des Oesophagus die Labdrüsen in 34 Fällen, das ist in circa 3% sämtlicher sezierten Fälle makroskopisch nachgewiesen worden. Ich glaube jedoch, dass die Labdrüsen hier in der Gestalt schon makroskopisch nachweisbarer Herde viel häufiger vorkommen dürften, weil ich im ersten Semester 1903 unter 290 Sektionen die Labdrüsen im oberen Teile des Oesophagus in 17 Fällen. das heisst in circa 6% aller Sektionsfälle bereits makroskopisch festgestellt habe; in meiner ersten Untersuchungsreihe sind wohl manche Fälle unbeachtet geblieben, da man früher (vor diesen Untersuchungen) mit dem makroskopischen Aussehen dieser Drüsenherde nicht genügend vertraut war, die makroskopischen Merkmale derselben von niemandem genauer geschildert worden sind und ich mich deshalb erst auf Grund meiner eigenen Untersuchungen näher darüber unterrichten musste.

In sämtlichen 34 Fällen lagen die schon makroskopisch nachweisbaren Labdrüsenherde in den Seitenbuchten des oberen Teiles der Speiseröhre zwischen dem Niveau der Cartilago cricoidea und demjenigen des 4—5 (in einem Falle bei einem 3-jährigen Knaben des 7) Knorpelringes der Luftröhre. In 27 Fällen lag je ein Herd (oder Herdenaggregat) symmetrisch in jeder Seitenbucht; in einem Falle war auf der linken Seite ein einziger, auf der rechten dagegen waren 3 getrennte schon makroskopisch nachweisbare Labdrüsenherde vorhanden (Fig. 1). In den übrigbleibenden 6 Fäl-

len lagen die ziemlich ausgedehnten Labdrüsenherde nur in der rechten Seitenbucht, in der linken konnte trotz der genauesten Untersuchung kein Labdrüsenherd nachgewiesen werden.

Die Labdrüsen im oberen Teile des Oesophagus treten mit gleicher Häufigkeit in jedem Alter auf: sie sind z. B. bei einem

Fig. 1.

3-wöchentlichen Kinde und andererseits bei einem 73-jährigen Greise makroskopisch gefunden worden. Die Ausdehnung dieser Drüsenherde ist sehr verschieden und scheint mit dem Alter der betreffenden Individuen in keinem Zusammenhang zu stehen: in manchen Fällen habe ich bei kleinen Kindern sehr grosse (z. B. bei einem 3-jährigen Kinde 1,5 $\times$ 0,5 cm² grosse) Herde beobachtet, in anderen Fällen waren dagegen bei Erwachsenen nur kaum sichtbare (oder gar nur mikroskopisch nachweisbare) Drüsen vorhanden. Was das Geschlecht anbetrifft, so scheinen nach meinen Untersuchungen die Labdrüsen viel häufiger bei Männern als bei Frauen vorzukommen: unter den 34 Fällen betrafen 28 das männliche und nur 6 Fälle das weibliche Geschlecht.

Nach meinen Untersuchungen kommen die im oberen Teile des Oesophagus schon makroskopisch nachweisbaren Labdrüsenherde in zwei Typen vor. Es sind erstens längliche, linsenförmige Gebilde, die in einer Vertiefung der Oesophaguswand liegen und von einem vorragenden Rande begrenzt sind; während die Schleimhaut des Oesophagus sonst blass, glatt oder höchstens leicht gefaltet ist, zeigt sie in diesen Herden eine feinkörnige, rötlich graue Ober-

fläche; auf den ersten Blick ähnelt sie hier einer in der Vertiefung der Oesophaguswand liegenden, ganz oberflächlichen Erosion (Fig. 1 und 2). Solche Herde kommen immer getrennt vor und in den Fällen, wo auf einer Seite mehrere vorhanden sind, fliessen sie nicht zusammen. Zweitens können die Labdrüsenherde auch als kleine rundliche oder gar irreguläre über die Oberfläche der Oesophagus-

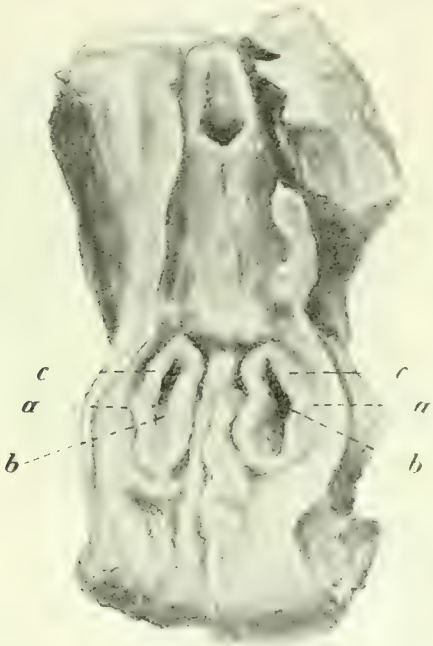


Fig. 2

schleimhaut hervorragende Gebilde erscheinen (Fig. 3, b); nur im Zentrum zeigen sie eine ganz oberflächliche, rötlichgraue, flache Vertiefung, die von ihrer Umgebung scharf abgegrenzt ist und auf den ersten Blick an eine oberflächliche auf einer kleinen Erhabenheit der Oesophagusschleimhaut liegende Erosion erinnert. Herde dieses zweiten Typus kommen nur selten vereinzelt vor, gewöhnlich sind sie in jeder der beiden Seitenbuchten in grösserer Zahl vorhanden und, da sie miteinander zusammenfliessen, bilden sie ziemlich ausgedehnte, sehr irregulär gestaltete und die Oberfläche der Speiseröhrenschleimhaut vorwölbende Gebilde (Fig. 3, a). An der Peripherie eines solchen Herdeaggregates können

öfters noch vereinzelte Herde unterschieden werden. Die Oberfläche eines solchen Aggregates ist uneben, an vielen Stellen sind scheinbare Erosionen vorhanden. Es gibt unmerkliche Übergänge vom ersten zum zweiten Typus dieser Drüsenherde, so dass das makroskopische Aussehen der Labdrüsenherde kein charakteristisches Merkmal derselben ist. Der einzige mikroskopisch feststellbare

Fig. 3

Unterschied zwischen den beiden makroskopischen Typen ist die Verschmälerung der Muscularis mucosae und manchmal ihre Ausbuchtung im ersten Typus. Ausserdem scheint das verschiedene makroskopische Aussehen der Labdrüsenherde durch die verschiedene Dicke des benachbarten mehrschichtigen Pflasterepithels, durch den tieferen oder oberflächlicheren Sitz dieser Herde u. s. w. verursacht zu sein.

Um die Angabe Schaffers, die Labdrüsen im oberen Teile

der Speiseröhre seien eine konstante Erscheinung bei jedem Menschen, zu prüfen, habe ich 10 Speiseröhren von Individuen verschiedenen Alters und Geschlechtes an Querschnittsserien mikroskopisch untersucht. Zu dieser Untersuchung wurden vom oberen Teile des Oesophagus je 2—5 cm lange Stücke (zwischen der hinteren Fläche der Cartilago cricoidea und der Höhe des 5., 6., 10. und auch in einem Falle — bei einem kleinen Kinde — des 16. Trachealringes) genommen. In 6 Fällen hat die mikroskopische Untersuchung überhaupt keine Labdrüsen nachgewiesen. Zu diesen 6 Fällen gehört auch der, wo das in lückenlosen Serienschnitten untersuchte Stück bis zur Höhe des 16. Trachealringes reichte. In 2 Fällen waren die Labdrüsenherde nur in der rechten Seitenbucht vorhanden; in einem Falle lag in jeder Seitenbucht je ein Herd; im letzten Falle lagen in beiden Seitenbuchten je 2 ziemlich weit von einander entfernte Labdrüsenherde.

Aus diesem Befunde ist zu schliessen, dass das Auftreten der Labdrüsen im oberen Teile des Oesophagus keine seltene Erscheinung ist. Mit Rücksicht darauf, dass für die mikroskopische Untersuchung absichtlich nur solche Fälle gewählt wurden, wo nach dem makroskopischen Aussehen die Existenz von Labdrüsen gar nicht vermutet werden konnte, darf wohl behauptet werden, dass diese Drüsen wohl bei jedem zweiten Individuum oder gar noch häufiger vorkommen. Die Häufigkeit dieser Drüsen genauer festzustellen wird wohl unausführbar sein, weil eine exakte mikroskopische Durchforschung schon eines einzigen etwas längeren Abschnittes der Speiseröhre höchst mühsam und zeitraubend ist. Dass aber die Labdrüsen im oberen Teile des Oesophagus bei allen Menschen vorkommen sollten, wie dies vom Schaffer behauptet wurde, muss entschieden verneint werden; insbesondere liefert der zitierte Fall, in welchem die Speiseröhre in exaktester Weise bis zum 16. Trachealringe untersucht worden ist, in dieser Hinsicht einen überzeugenden Beweis.

Aus den erwähnten mikroskopischen Untersuchungen geht auch hervor, dass die Labdrüsen (im Gegensatz zu Schaffer) auch asymmetrisch, nur unilateral im oberen Teile des Oesophagus vorkommen können; es sind nämlich unter den von mir untersuchten 10 Fällen 2 Fälle mit asymmetrischen, unilateralen Drüsenherden gefunden worden. Dieser Umstand kann wohl den Meinungsunterschied zwischen den beiden Entdeckern dieser Drüsen, Rüdinger

und Schaffer, erklären: während der erstere asymmetrischen. nur in einer Seitenbucht der Speiseröhre liegenden Drüsenherden begegnete, hat Schaffer lediglich symmetrisch im oberen Teile des Oesophagus liegende Drüsenherde angetroffen. Es verdient erwähnt zu werden, dass in den Fällen einer asymmetrischen Lage der Labdrüsen (6 makro- und 2 mikroskopische Fälle) die letzteren nur in der rechten Seitenbucht vorhanden waren.

Betreffs des mikroskopischen Baues dieser Drüsen, ihres Stromas und ihrer nächsten Umgebung konnte ich folgendes feststellen.

Ein charakteristisches Merkmal der Labdrüsen ist ihr Sitz in der Mucosa propria; nur selten reichen sie bis zur Muscularis mucosae, wo sie zwischen den Muskelbündeln liegen; in solchen Fällen könnten die Labdrüsen leicht mit den eigentlichen Schleimdrüsen der Speiseröhre verwechselt werden, da diese zwar meistens in der Submucosa, jedoch in einigen Fällen in der Muscularis mucosae oder gar, wenn auch nur teilweise in der Mucosa propria ihren Sitz haben [1]). Durch eine genauere Untersuchung des mikroskopischen Baues dieser Drüsen, wovon unten weiter die Rede sein wird, kann eine solche Verwechslung vermieden werden. An den den Labdrüsen entsprechenden Stellen ist die Muscularis mucosae (entgegen einer Behauptung Schaffers) nicht immer verdickt, im Gegenteil sah ich öfters, dass die Muscularis mucosae gerade an diesen Stellen viel schmäler als in den anderen Teilen desselben Oesophagusquerschnittes war. Diese relative Verschmälerung der Muscularis mucosae ist besonders oft bei dem früher erwähnten ersten makroskopischen Labdrüsenherdetypus beobachtet worden; in einigen solchen Fällen ist die Muscularis mucosae nicht nur verschmälert, sondern auch stark nach aussen ausgebuchtet (Fig. 4).

Die Oberfläche der Labdrüsenherde ist entweder wie die sonstigen Teile des Oesophagus mit einem mehrschichtigen Pflasterepithel oder auch mit einem einschichtigen, hohen, hellen Zylinderepithel, das dem Deckepithel der Magenschleimhaut gleicht, bedeckt (Fig. 5). An den mit dem Zylinderepithel bedeckten Stellen, besonders wenn dieselben etwas grösser sind, bildet die Mucosa zahl-

[1]) Eine solche Lokalisation der Schleimdrüsen soll nach Schaffer nur im untersten Teile des Oesophagus vorkommen; im Laufe meiner Untersuchungen war ich öfters im stande solche Lokalisation auch im oberen Teile der Speiseröhre festzustellen.

reiche Vertiefungen und Falten, die den Magenschleimhautfalten des Pylorusteiles oder gar den Darmzotten ähneln. In einigen Fäl-

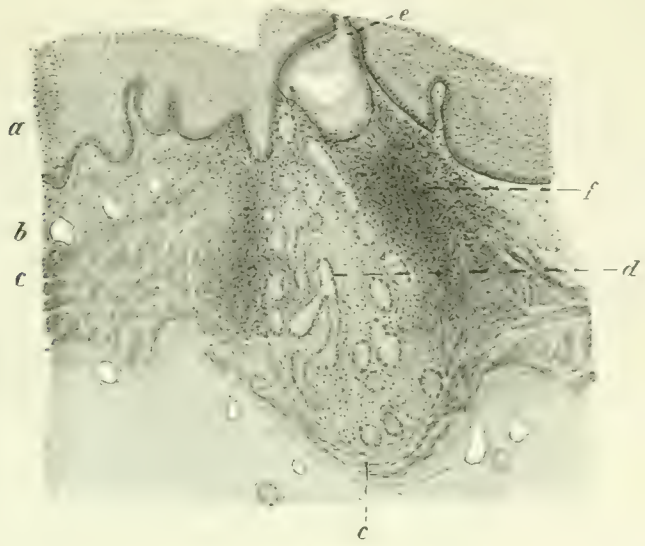


Fig. 4.

len war ein und derselbe Labdrüsenherd teilweise mit Pflaster-, theilweise mit Zylinderepithel bedeckt. Gegen dieses Zylinderepithel

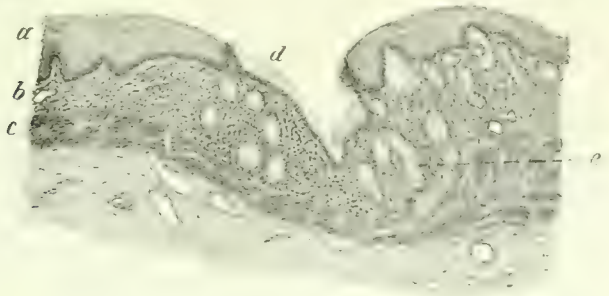


Fig. 5.

setzt sich das Pflasterepithel mit scharfem Rande ab. An der Grenze dieser 2 Epitelarthen konnte ich niemals einen unmittelbaren Übergang des Zylinderepithels in die basale Keimzellenlage des geschichteten Pflasterepithels nachweisen. Im Gegenteil hatte ich öfters

Gelegenheit festzustellen, dass das von einer kleinen Menge des Bindegewebes begleitete Zylinderepithel über das Pflasterepithel herüberwuchs. Manchmal schnürte das über die Oberfläche des Pflasterepithels wuchernde Zylinderepithel kleine Teile des Pflasterepithels ab und drückte sie in die Schleimhaut herab, wo sie ganz lose und vom oberflächlichen Pflasterepithel ganz getrennte Herde bildeten. In einem Falle konnte ich ein solches Verhalten sicher nachweisen, da mir in diesem Falle eine lückenlose Serie des ganzen Herdes vorlag. In anderen Fällen, wo ich nur einzelne Präparate oder lückenhafte Serien hatte, konnte wohl eine Täuschung (infolge der Tangentialschnitte durch das Pflasterepithel einer Schleimhautfalte) eintreten. Aus diesen Beobachtungen dürfte man wohl schliessen, dass diese zwei Epithelarten feindlich gegen einander auftreten, dass das Zylinderepithel die Oberhand über das Pflasterepithel zu erreichen strebt und dass es gewissermassen hier ein fremdes Gebilde ist.

Das Labdrüsenstroma ist im allgemeinen ein loses lymphoides Gewebe, das allerseits die Drüsenherde umschliesst, so dass die Mucosa öfters noch in einer Entfernung von $^1/_2$ mm (von den Drüsen selbst ab) einen lymphoiden Bau zeigt. Dieses lymphoide Gewebe wird an manchen Stellen dichter, indem es deutliche, manchmal mit Keimzentren ausgestattete Lymphknötchen [1]) bildet. Solche Lymphfollikel beobachtete ich ebenso in den Drüsenherden selbst, wie auch noch häufiger an der Peripherie in unmittelbarer Nähe der Drüsen. In den Fällen, wo die Labdrüsen in die Muscu-

[1]) Schon Hewlett lenkte in seiner Arbeit die Aufmerksamkeit auf die Lymphknötchen im Stroma dieser Drüsen. Schaffer selbst hat sich über diesen Gegenstand nicht ausgesprochen. Von den Follikeln des Oesophagus gibt er an anderer Stelle im allgemeinen an, dass die Oesophaguslymphknötchen immer mit den Ausführungsgängen der Schleimdrüsen in Verbindung stehen. Die hauptsächlich von Dobrowolski beschriebenen, ausserhalb der Ausführungsgänge liegenden Lymphknötchen, ebenso wie die darin enthaltenen Keimzentren, betrachtet Schaffer als eine pathologische Erscheinung. Ich schliesse mich der Meinung von Dobrowolski an, da ich im Verlaufe meiner Untersuchungen manchmal im Oesophagus Lymphknötchen mit Keimzentren wie auch Follikel angetroffen habe, die in keiner Verbindung mit Schleim- und auch mit Labdrüsen standen. Das Ausbleiben irgendwelcher anderer Veränderungen im Oesophagus einerseits, der Mangel einer Wucherung des lymphoiden Gewebes im Organismus andererseits macht ja die Auffassung dieser Follikel als einer pathologischen Erscheinung sehr zweifelhaft. Anm. d. Verf.

laris mucosae hineindringen, wird ihr Stroma teilweise auch von glatten Muskelfasern gebildet.

Was den Bau der Oesophaguslabdrüsen selbst anbetrifft, so kann ich im allgemeinen die Ergebnisse Schaffers bestätigen. Die Drüsen haben den Bau stark verzweigter Schlauchdrüsen, durch Vereinigung einzelner Schläuche entsteht ein Ausführungsgang, der an den mit Pflasterepithel bedeckten Stellen stets an der Spitze der Schleimhautpapille (Fig. 4), an den mit Zylinderepithel ausgestatteten Stellen in die Vertiefungen der Mucosa mündet. Manchmal münden in dieselbe Vertiefung der Schleimhaut zwei oder gar mehr Ausführungsgänge. Nahe an der Mündung sind die letzteren ebenso wie die einzelnen Drüsenschläuche ampullenartig erweitert. Die Mündungen der Ausführungsgänge sind nach abwärts gerichtet, wodurch offenbar der Ausfluss des Sekretes erleichtert wird. Die Gänge sind mit hohem einschichtigen Zylinderepithel, dessen ovale Kerne nicht ganz der Basalmembran anliegen, bedeckt; das Cytoplasma des Epithels zeigt manchmal, und zwar bei Anwendung entsprechender Reagentien, eine schwache Schleimfärbung.

In dem eigentlichen Drüsenepithel lassen sich 2 Zellenarten leicht unterscheiden, wovon die erstere den Pylorusdrüsenzellen, bzw. den Hauptzellen der Magenfundusdrüsen sehr ähnlich ist. Die Zellen der zweiten Art entsprechen ihrer Gestalt, ihrem Bau, ihrer Grösse, ihrem Sitze ebenso wie auch ihrem Verhalten gegen Anilinfarbstoffe (Eosin, Pikrinsäure, Congorot) nach den Belegzellen der Magenfundusdrüsen (Fig. 4). Wie aus meinen Untersuchungen hervorgeht, sind diese Belegzellen manchmal so zahlreich, dass zwischen ihnen die Hauptzellen fast gänzlich verschwinden; in den meisten Fällen kommt jedoch das Gegenteil vor. Manchmal ist in demselben Drüsenherde eine grosse Strecke ganz frei von Belegzellen, während an anderen Stellen dieselben höchst zahlreich vorhanden sind. Im allgemeinen muss ich betonen, dass die Verteilung dieser zwei Zellenarten in den oberen Oesophaguslabdrüsen sehr ungleichmässig ist; in allen Fällen habe ich jedoch in diesen Drüsen die beiden Zellenarten nachgewiesen. Dass Schaffer und seine Nachfölger nicht in allen Fällen Belegzellen nachzuweisen vermochten, wurde vielleicht eben durch die ungleichmässige Verteilung der beiden Zellenarten verursacht.

Aus dieser Beschreibung und aus den beigefügten Figuren ist es ersichtlich, dass diese Drüsen ihrem mikroskopischen Bau

nach mit den Drüsen im untersten Teile des Oesophagus, also mit den eigentlichen Cardiadrüsen ganz identisch sind. Dies veranlasste Schaffer beide Drüsenarten Cardiadrüsen zu nennen und nur obere und untere Cardiadrüsen zu unterscheiden. Die Drüsen im oberen Teile der Speiseröhre Cardiadrüsen zu nennen, kann leicht zu Verwechslungen Anlass geben, weshalb ich für diese Drüsen den entsprechenderen, einfachen Namen Oesophaguslabdrüsen vorschlage. Da diese Drüsen gewöhnlich im oberen Teile der Speiseröhre lokalisiert sind, so wäre es auch angemessen, sie obere Oesophaguslabdrüsen zu nennen (im Gegensatz zu den unteren, d. h. den eigentlichen Oesophaguscardiadrüsen). Übrigens kommen, wie es aus dem von Eberth beobachteten Falle ersichtlich ist, diese Drüsen auch in anderen Teilen des Oesophagus vor. Diesen Drüsen den Namen Labdrüsen beizulegen, ist durch ihren Bau, der gleichzeitig auf ihre Funktion hinweist, gerechtfertigt. Die Anwesenheit zweier Zellenarten, die ganz identisch mit denen der Magenfundusdrüsen sind, beweist gleichzeitig, dass diese Zellen im Oesophagus dieselbe Funktion wie im Magen haben, d. h. dass die Hauptzellen das Pepsin, die Belegzellen Salzsäure sezernieren. Dass dem Sekrete dieser Drüsen eine verdauende Wirkung in der Tat zukommt, wird auch dadurch bestätigt, dass in den Drüsen nach dem Tode des Individuums sehr bald postmortale Veränderungen (nämlich ein Absterben und Abtrennen des Zylinderepithels oder gar eine totale Verdauung des Drüsenepithels) eintreten.

In Betracht alles dessen entsteht die Frage nach der Genese der oberen Oesophaguslabdrüsen und nach ihrer Bedeutung. Der erste Teil dieser Frage wurde schon von Schaffer selbst beantwortet: kurz gefasst sind die oberen Oesophaguslabdrüsen nach Schaffer heterotopisch entwickelte Magendrüsen, die ihren Prototypus bei niederen Tierarten finden.

Was die Bedeutung dieser Drüsen in der Pathologie anbetrifft, so wies schon Schaffer darauf hin, dass diesen Drüsen in der Entstehung von Zylinderzellenkarcinomen, von Pulsionsdivertikeln und peptischen Geschwüren eine Rolle wohl zukommen kann. Für diese Behauptung konnte jedoch Schaffer damals keine zwingenden Gründe anführen. Meine Untersuchungen haben teilweise die Behauptungen Schaffers bestätigt, teilweise sogar erweitert. Nachdem Schaffer die Existenz der oberen Oesophaguslabdrüsen nachgewiesen hat, nimmt er die Möglichkeit des Auftretens von

Zylinderzellenkarcinomen im Oesophagus an. In der Tat sind im Oesophagus neben den gewöhnlichen Plattenzellenkarcinomen auch Zylinderzellenkarcinome wenn auch seltener gefunden werden. Diese letzteren sind manchmal ihrem Bau nach den Magenkarcinomen ganz ähnlich, wie dies unter anderen z. B. in letzterer Zeit von Kirschner in einem Falle von Adenokarcinoma scirrhoticum der Speiseröhre beobachtet wurde. Bis in die letztere Zeit wurde der Ausgangspunkt solcher Karcinome in dem Epithel der Oesophagus-

Fig. 6.

schleimdrüsen gesucht, obgleich man aus der Schilderung mancher Fälle folgern musste, dass die Geschwulst ihren Ausgangspunkt von der Schleimhaut selbst nahm. In anderen Fällen wurde die Entstehung dieser Zylinderzellenkarcinome im Oesophagus durch Metaplasie des Pflasterepithels erklärt. Da wir jedoch bestimmt wissen, dass im Oesophagus Labdrüsenherde vorkommen, so begreifen wir leicht, dass diese Drüsen auch den Ausgangspunkt für Zylinderzellenkarcinome vom Typus der Magenkrebse bilden können. Diese Geschwülste können in allen Teilen der Speiseröhre angetroffen werden, da die Labdrüsen auch in verschiedenen Teilen des Oesophagus vorkommen: diese Drüsen sind recht häufig im oberen und unteren Teile des Oesophagus zu finden, der Fall Eberths beweist jedoch, dass sie auch in anderen Teilen zu treffen sind.

Wie meine eigenen Untersuchungen zeigen, können diese Drüsenherde im Oesophagus desto leichter den Ausgangspunkt für die Entstehung maligner Geschwülste liefern, da sie beim Menschen keine typische Erscheinung sind, da sie nicht bei allen Menschen auftreten, da sie sich oft nur auf einer Seite finden, da sie bei verschiedenen Individuen verschieden stark entwickelt sind, schliesslich heterotopisch auftreten und somit in dem Oesophagus gewissermassen fremde Gebilde sind. Wie bekannt, kommen die Karcinome mit gewisser Vorliebe dort vor, wo 2 Epithelarten an einander grenzen (z. B. Lippenkrebse, Analkrebse, Cervixkrebse); ein derartiges Verhalten finden wir eben im Gebiet dieser Labdrüsenherde. Wie an anderen solchen Stellen des Organismus führen auch hier die beiden Epithelarten einen Kampf, wodurch ein Abschnüren und eine Dislokation der Epithelherde verursacht wird. Wie wir auch immer die Bedeutung verirrter, dislozierter, heterotopisch entwickelter Epithelherde für die Krebsätiologie schätzen mögen, müssen wir jedoch unbedingt gestehen, dass die Labdrüsen im Oesophagus sehr leicht zur Entstehung der Krebse Anlass geben können.

Auch für die Entstehung der Pulsionsdivertikel sind die oberen Oesophaguslabdrüsen ebenso wichtig. Dies wurde auch von Schaffer angedeutet, jedoch fehlte ihm ein genügendes Beweismaterial; infolgedessen fand die Vermutung Schaffers keine genügende Berücksichtigung; so wird z. B. diese Vermutung in der letzten die Oesophagusdivertikel betreffenden Arbeit Riebolds gar nicht erwähnt. Derweilen sprechen einige durch meine Untersuchungen nachgewiesenen Tatsachen eben für die Richtigkeit der Schafferschen Anschauung. Ich habe schon erwähnt, dass die Labdrüsenherde manchmal in Vertiefungen der Oesophaguswand liegen, die manchmal sogar eine ziemlich bedeutende Ausbuchtung bilden. Aus meinen Beobachtungen geht auch hervor, dass die Muscularis mucosae unter diesen Drüsenherden sogar bedeutend schmäler als an anderen Teilen desselben Querschnittes sein kann. Manchmal ist (wie z. B. aus der Figur 4 ersichtlich) die Muscularis mucosae nicht nur schmäler, sondern auch deutlich ausgebuchtet. Es ist verständlich, dass solche Gebilde leicht in echte Divertikel übergehen können. Da die Oesophaguswand an diesen Stellen weniger resistent ist, was einerseits durch den Mangel des Pflasterepithels, andererseits durch die Verschmälerung der Muscularis mucosae ver-

ursacht ist, so wird sie leicht dem Drucke der herabgleitenden Speisen nachgeben und sich immer mehr ausbuchtend echte Pulsionsdivertikel bilden. Durch den Umstand, dass die Pulsionsdivertikel im oberen Teile des Oesophagus, also eben auch dort, wo die Labdrüsen gewöhnlich vorkommen, scheint ja die eben ausgesprochene Meinung eine weitere Stütze zu gewinnen. Diesbezüglich kann ich als höchst überzeugenden Beweis einen schon erwähnten Fall, welcher ein 3-jähriges Kind betraf (Fig. 2), anzuführen. In diesem Falle lag ein (rechter) Labdrüsenherd 3 mm unterhalb des Niveaus der Oesophagusschleimhaut und verursachte eine makroskopisch sehr deutliche Ausbuchtung der gesamten Oesophaguswand, d. h. ein echtes Oesophagusdivertikel. Offenbar gibt es wohl auch andere für die Entstehung der Pulsionsdivertikel bestimmende Momente, wie solche in letzter Zeit von Brosch, Starck, Rosenthal, Riebold genauer diskutiert wurden. Jedenfalls geht aus den erwähnten Gründen hervor, dass die Labdrüsenherde auch zur Entstehung der Oesophaguspulsionsdivertikel Anlass geben können.

In seinen Arbeiten lenkt noch Schaffer die Aufmerksamkeit ebenfalls auf die Bedeutung der Labdrüsen für die Enstehung der peptischen Oesophagusgeschwüre. Dieser Process steht jedoch mit den unteren Oesophaguslabdrüsen (d. i. den eigentlichen Cardiadrüsen) in Verbindung; man braucht sich also darüber nicht länger aufzuhalten. Nur möchte ich betonen, dass die Richtigkeit dieser Behauptung Schaffers bereits durch den Fall Störk aus der Nothnagelschen Klinik bewiesen wurde: in diesem Falle wies der Autor innerhalb eines peptischen Oesophagusgeschwüres die Anwesenheit der heterotopisch entwickelten Labdrüsen nach. Überdies muss ich noch hinzufügen, dass das Vorkommen der Labdrüsen im oberen Teile der Speiseröhre von vornherein die Möglichkeit der Entstehung von peptischen Geschwüren nicht nur in den untersten, sondern auch in anderen Abschnitten der Speiseröhre bedingt. Dass solche Fälle wirklich vorkommen, zeigt unter anderen Rehers Fall; in diesem Falle war ausser einem frischen peptischen Geschwür in der Cardiagegend „eine ausgebreitete Narbe (scil. post. ulcus rotundum) im oberen Teile der Speiseröhre“.

Noch eins verdient hervorgehoben zu werden. Wie schon erwähnt wurde, zeigt das Stroma der oberen Oesophaguslabdrüsen den Bau des lockeren Lymphoidgewebes, das hie und da dichtere Anhäufungen und sogar Lymphknötchen (manchmal mit Keimzen-

tren) bildet. Diese Lymphknötchen können leicht, schon bei geringer Verletzung des sie bekleidenden zarten Zylinderepithels durch herabgleitende Speisen die Eintrittspforte für verschiedene Bakterien werden, was eine Geschwürbildung nach sich ziehen kann. Die Bakterien können hier um so eher eindringen, da die Labdrüsen oft in den Vertiefungen der Oesophaguswand liegen; in diesen Vertiefungen also können die mit den pathogenen Mikroorganismen verunreinigten Speisebröckel liegen bleiben. Auf diese Weise könnten wir vielleicht verschiedene perioesophageale eitrige und jauchige Processe in diesen Fällen erklären, in denen sogar die Autopsie keine andere Ursache des Leidens nachweisen kann. Wir finden zwar an diesen Stellen als natürlichen Schutz gegen Infektion ein saures Sekret von verdauender Wirkung, aber dieses fliesst herab und kann nicht in alle Lymphknötchen eindringen, besonders aber nicht in solche, die an der oberen Peripherie eines solchen Labdrüsenherdes liegen. Andererseits ist es bekannt, dass der Magensaft unter Umständen keinen hinreichenden Schutz gegen das Eindringen der Bakterien bietet, weshalb auch in den Oesophaguslabdrüsenherden eine Infektion zustande kommen kann. Für die Richtigkeit dieser Behauptung spricht überzeugend ein Fall, wo ich in einem an der Peripherie eines Labdrüsenherdes liegenden Lymphknötchen (bei einem 24-jährigen Manne mit Lungenschwindsucht) viele typische Tuberkel mit Riesenzellen fand, wo also schon die tuberkulöse Infektion stattfand.

Ich vermute, dass in manchen Fällen diese Oesophaguslabdrüsenherde, eigentlich aber das ihr Stroma bildende Lymphoidgewebe den Ausgangspunkt für die primäre Infektion mit Tuberkelbazillen bilden können, wie dies in letzter Zeit in ähnlicher Weise für Tonsillen nachgewiesen wurde. Der oben angeführte Fall spricht deutlich für die Möglichkeit eines Eindringens der Tuberkelbazillen in das Gebiet der beschriebenen Labdrüsen, wodurch an diesen Stellen sogar tuberkulöse Veränderungen eintreten können. Aller Wahrscheinlichkeit nach wurde in diesem Falle die tuberkulöse Infektion des Drüsenherdes von den Bazillen verursacht, die aus der tuberkulösen Lunge kommend mit Schleim und Speisen geschluckt wurden. Die vertiefte Lage einzelner Labdrüsenherde in der Oesophaguswand veranlasst das Anhalten der vorübergleitenden Speisebröckel; sind nun diese mit Tuberkelbazillen infiziert, so ist es in Anbetracht der Anwesenheit des Lymphoidgewebes.

im Stroma des Drüsenherdes und in Anbetracht des zarten Zylinderepitels leicht möglich, dass die Tuberkelbazillen eindringen. Dies muss natürlich nicht immer lokale Veränderungen hervorrufen, viel öfter können die Tuberkelbazillen von hier aus mit dem Lymphstrom in die Hals- oder gar Mediastinal- und Bronchialdrüsen gelangen, um dort erst tuberkulöse Prozesse hervorzurufen.

Selbstverständlich berechtigen mich meine bisherigen Untersuchungen nicht zu der apodiktischen Behauptung, dass die Sache sich so verhält, wie ich sie darstelle; es müsste da noch eine grössere Anzahl von Untersuchungen gemacht werden. Die von mir angeführten Momente sollen jedoch unsere Aufmerksamkeit bei der Nachforschung nach dem Orte des primären Eindringens der Tuberkelbazillen auch nach dieser Richtung hin lenken und dies umsomehr, da in letzter Zeit die Frage des Verhältnisses zwischen Tuberkulose und Perlsucht und die Frage der Fütterungstuberkulose in den Vordergrund getreten ist. Meine Untersuchungen zeigen, dass die beschriebenen Labdrüsenherde des Oesophagus die Eingangspforte für die in den Speisen sich befindenden Tuberkelbazillen bilden können, die dann mit dem Lymphstrome in die Hals- oder gar Mediastinal- und Bronchialdrüsen gebracht, daselbst primäre tuberkulöse Veränderungen hervorrufen können. Es ist möglich, dass auf diese Weise eine Anzahl primärer tuberkulöser Veränderungen in den Lymphdrüsen bei Kindern als Folge einer Infektion durch Speisen (Milch von perlsüchtigen Kühen), also als eine Fütterungstuberkulose zu erklären wäre.

Die Ergebnisse meiner Untersuchungen fasse ich folgendermassen zusammen:

1° Im oberen Abschnitte des Oesophagus finden wir beim Menschen sehr häufig (denn wenigstens bei jedem zweiten Individuum) Drüsen vom Typus der Magendrüsen (die von mir sogenannten oberen Oesophaguslabdrüsen), entgegen der Annahme Schaffers jedoch finden wir diese Drüsen nicht konstant bei jedem Individuum.

2° Sehr oft, denn ungefähr in 3—6% aller Sektionsfälle, treten diese Drüsen als gut sichtbare und schon makroskopisch sicher erkennbare Herde auf; in den übrigen Fällen lässt sich ihr Vorkommen nur mikroskopisch nachweisen.

3° Diese Drüsen liegen gewöhnlich in den Seitenbuchten des oberen Teiles der Speiseröhre zwischen dem Niveau der Cartilago

cricoidea und demjenigen des fünften Trachealringes; ausnahmsweise (Eberths Fall) kommen sie auch in anderen Teilen der Speiseröhre vor (abgesehen natürlich von der Cardiagegend, wo sie eine gewöhnliche Erscheinung sind).

4° Die makroskopischen Labdrüsenherde der Speiseröhre machen gewöhnlich auf den ersten Blick den Eindruck von Erosionen und kommen in zweifacher Gestalt vor: *a)* in der Form von linsenartigen, manchmal bedeutend in die Oesophaguswand vertieften Herden mit wallartigem Rande; Herde dieser Art liegen stets vereinzelt; *b)* in Form von kleinen runden oder unregelmässigen über die Schleimhautoberfläche erhabenen Herden, die oft miteinander zusammenfliessend grössere Aggregate bilden.

5° Gewöhnlich treten diese oberen Oesophaguslabdrüsen in Form von 2 symmetrischen Herden auf, von denen je einer in einer Seitenbucht liegt; nur ziemlich selten (sowohl makro- als auch mikroskopisch) kommt ein asymetrischer Herd in der rechten Seitenbucht vor; manchmal finden wir in kleinen Entfernungen voneinander mehrere Labdrüsenherde.

6° Die oberen Oesophaguslabdrüsen kommen gleich häufig in jedem Alter vor; dagegen scheinen sie viel öfter beim männlichen wie beim weiblichen Geschlechte aufzutreten. Die Grösse der Drüsenherde hängt nicht vom Alter der betreffenden Individuen ab.

7° Mikroskopisch liegen die Labdrüsen in der Schleimhaut selbst, manchmal dringen sie teilweise in die Muscularis mucosae hinein, niemals reichen sie jedoch in die Submucosa; öfters bildet dabei die verdünnte Muscularis mucosae divertikelähnliche Ausbuchtungen.

8° Das Stroma der oberen Oesophaguslabdrüsen ist ein loses Lymphoidgewebe, welches hie und da dichter wird und Lymphknötchen sogar mit Keimzentren bildet.

9° Die oberen Oesophaguslabdrüsen gehören dem Typus der verzweigten Schlauchdrüsen an; ihr Epithel ist aus zweierlei Zellen zusammengesetzt, die den Haupt- und Belegzellen der Magenfundusdrüsen entsprechen. Belegzellen scheinen in allen Drüsenherden vorzukommen, sind jedoch sehr unregelmässig verteilt.

10° Die Ausführungsgänge sind mit hohem, einschichtigen, hellen Zylinderepithel bedeckt, dessen Cytoplasma manchmal leichte Schleimfärbung zeigt. Die Drüsenschläuche und besonders ihre Ausführungsgänge zeigen manchmal ampullenartige Erweiterungen.

11° Das Epithel, das die Oesophaguslabdrüsenherde bedeckt, unterscheidet sich entweder vom geschichteten Pflasterepithel anderer Speiseröhrenteile nicht, oder es wird durch ein hohes Zylindepithel vertreten, das dem der Magenschleimhaut ähnlich wird; manchmal ist ein Labdrüsenherd teils mit der einen, teils mit der anderen Epithelart bedeckt. Nimmt das Zylinderepithel die grössere Oberfläche ein, so ist die Schleimhaut in Falten gelegt und macht den Eindruck eines verirrten Magenschleimhautstückes.

12° Die Ausführungsgänge münden an mit Pflasterepithel bedeckten Stellen stets an der Spitze der Bindegewebspapille, an mit Zylinderepithel bedeckten Stellen in den Schleimhautvertiefungen aus.

13° An der Übergangsstelle des geschichteten Pflasterepithels ins Zylinderepithel kann es manchmal zur Abschnürung und Verschiebung von Epithelteilchen kommen.

14° Die Bedeutung der Drüsen vom pathologischen Standpunkte ist eine wichtige mit Rücksicht auf die Entstehung: *a)* der Oesophaguskrebse und besonders der Zylinderzellenkarcinome; *b)* der Pulsionsdivertikel; *c)* der runden Oesophagusgeschwüre; *d)* der eitrigen und jauchigen Prozesse der Perioesophagealgewebe; *e)* der tuberkulösen Prozesse in der Speiseröhre.

15° In Anbetracht der ziemlich bedeutenden Anhäufung von Lymphoidgewebe im Gebiete der Oesophaguslabdrüsenherde, ferner in Anbetracht der von mir in einem Falle hier nachgewiesenen tuberkulösen Veränderungen, schliesslich in Anbetracht der bekannten anatomischen Bedingungen, scheint die Vermutung berechtigt zu sein, dass das in den Drüsenherden liegende Lymphoidgewebe manchmal den Ort des primären Eindringens von Tuberkelbazillen bilden kann, von wo dann diese mit dem Lymphstrom in die Hals-, oder gar Mediastinal- und Bronchiallymphdrüsen gelangen können. Ich glaube, dass auf diese Weise wenigstens eine gewisse Anzahl von Fällen der primären tuberkulösen Veränderungen in den Lymphdrüsen bei Kindern als eine Fütterungstuberkulose sich erklären liesse. Dies erheischt jedoch noch weiterer Untersuchungen.

Diese Arbeit wurde im pathologisch-anatomischen Institut der Krakauer Universität (Leiter Herr Prof. Dr. Browicz) ausgeführt.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Der obere Teil der Speiseröhre bei einem 10-monatlichen Knaben (natürliche Grösse). In der linken Seitenbucht sieht man einen grossen linsenartigen Labdrüsenherd (*a*) des ersten Typus; auf der rechten Seite sieht man 3 ähnliche. aber kleinere Labdrüsenherde (*a' b*).

Fig. 2. Der obere Teil der Speiseröhre (natürliche Grösse) mit grossen Labdrüsenherden des ersten Typus bei einem 3-jährigen Knaben:

a) Drüsenherde;

b) divertikelähnlich (besonders auf der rechten Seite) vertiefter Teil des Drüsenherdes;

c) vorragender Rand des Drüsenherdes.

Fig. 3. Der obere Teil der Speiseröhre (natürliche Grösse) mit den Labdrüsenherden des zweiten Typus:

a) Drüsenherdeaggregat, das durch das Zusammenfliessen der einzelnen Herde entstanden ist;

b) einzelner getrennt liegender Drüsenherd.

Fig. 4. Querschnitt durch den oberen Teil der Speiseröhre mit den Labdrüsen (Vergröss. Reichert Obj. 2. Ocul. 3; Zeiss'scher Zeichenapparat):

a) geschichtetes Pflasterepithel der Oesophagusschleimhaut;

b) Stratum proprium der Schleimhaut;

c) Muscularis mucosae; bei *c'* ist diese verschmälert, durch die Labdrüsen (*d*) divertikelähnlich ausgebuchtet;

d) Labdrüsen;

e) Mündung eines Ausführungsganges;

f) Lymphknötchen.

Fig. 5. Querschnitt durch den oberen Teil der Speiseröhre (Vergröss. wie in Fig. 4);

d) eine inmitten des geschichteten Plattenepithels liegende mit einschichtigem Zylinderepithel bedeckte Stelle;

e) die Labdrüsen in der Schleimhaut, die den lymphoiden Bau zeigt.

Fig. 6. Ein quer und zwei längs durchschnittene Labdrüsenschläuche aus dem oberen Teile der Speiseröhre (Vergrösser. Reichert. Obj. 4. Ocul. 7; Zeiss'scher Zeichenapparat):

a) Hauptzellen;

b) Belegzellen.

50. M. A. WRZOSEK. **O drogach, któremi drobnoustroje przechodzą w warunkach prawidłowych z przewodu pokarmowego do organów wewnętrznych.** ***(Recherches sur les voies de passage des microbes du tube digestif dans les organes internes à l'état normal).*** Mémoire présenté par M. T. Browicz m. t.

Les travaux exécutés pendant les quatre dernières années à l'Institut de pathologie générale et expérimentale de l'Université de Cracovie par MM. Rogoziński, Rzegociński ainsi que par l'auteur démontrent que les tissus d'animaux normaux peuvent contenir des microorganismes capables de se développer, et que ces microorganismes, au moins dans la plupart des cas, pénètrent dans les organes internes par le tube digestif.

En ce qui concerne le passage des microorganismes des intestins dans les glandes mésentériques (pancreas Asellii), il est tout à fait sûr qu'il a lieu par la voie des vaisseaux chylifères, sinon toujours, du moins très souvent. Mais on n'avait pas encore étudié ce que ces microbes deviennent ultérieurement et on ne savait pas si les microorganismes passaient plus loin, c'est-à-dire dans la lymphe du canal thoracique, ou s'ils se déposaient tous dans les glandes mésentériques.

Pour résoudre ce problème, j'ai fait plusieurs séries d'expériences. La première série fut exécutée de la manière suivante:

Je nourrissais des chiens pendant un on deux jours d'aliments gras, composés généralement de tripes et de gruau, et j'ajoutai à cette nourriture de grandes quantités (quelques centaines de centimètres cubes) de culture de bouillon de microbes inoffensifs se laissant facilement distinguer en cultures, et particulièrement le b. prodigiosum, le b. fluorescens non liquefaciens et le b. violaceus.

Le jour de l'expérience, je faisais à l'animal, quelques heures après son repas, une injection sous-cutanée de 0·01 de chlorure de de morphine par kg., et je le narcotisais par un mélange en parties égales d'alcool, d'éther et de chloroforme.

Une fois l'animal profondément endormi, je procédais à la recherche, sur le cou, du canal thoracique, en faisant des ligatures de chaque vaisseau rencontré dans le champ opératoire, pour éviter toute hémorrhagie considérable. Le canal thoracique ainsi préparé sur la longueur d'un centimètre au moins, j'établissais une ligature au point où il rejoint la veine; ensuite, après l'avoir serré avec

une serre-fine, au-dessus de la ligature, je l'ouvrais avec des ciseaux tout près de la ligature, et j'introduisais dans l'ouverture une canule de verre soigneusement stérilisée. Je recueillais la lymphe 5 à 7 heures après le dernier repas de l'animal. J'ai reconnu que le moment le plus favorable pour recueillir la lymphe est à peu près 6 heures après le dernier repas; la lymphe est alors tout à fait laiteuse.

Après l'introduction de la canule thoracique, à mesure qu'il s'amassait un demi-centimètre cube de lymphe, je l'aspirais dans une pipette Pasteur stérilisée et passée plusieurs fois à la flamme. Après, j'ensemençais immédiatement la lymphe recueillie en bouillon ou gélatine liquide. Avant d'aspirer la lymphe dans la pipette, je passais à la flamme le bout de la canule.

Sur certains milieux de culture j'ensemençais la lymphe à plusieurs reprises, un demi-centimètre cube chaque fois.

Dans ces conditions, il était facile d'éviter la contamination de la lymphe par les microorganismes de l'air ou par leurs spores, en effet la lymphe était très peu de temps en contact avec l'air ambiant, car il s'écoulait tout au plus quelques dizaines de secondes avant qu'elle se fût amassée dans la canule en quantité suffisante, et l'air de la salle d'opération durant l'expérience contenait fort peu des microorganismes, grâce aux précautions prises préalablement.

Pour constater si les microorganismes ne passent pas du tube digestif dans les organes internes par les veines mésentériques, j'ai examiné le sang des veines mésentériques daus quelques-unes de mes expériences. Pour aspirer le sang de ces veines j'ai employé, outre la pipette Pasteur, une canule construite pour l'examen des voies urinaires par M. le Prof. Ch. de Klecki, qui permet de recueillir et d'ensemencer le liquide d'une manière qui exclut presque complètement la possibilité de sa contamination par les microorganismes de l'air.

Outre la lymphe et le sang (des veines mésentériques et du coeur) j'ai ensemencé aussi plusieurs fois des morceaux d'organes internes, après en avoir cautérisé la surface avec un fer rouge. Les dimensions des morceaux ensemencés variaient d'un demi-centimètre à un centimètre cube. Une fois l'ensemencement fini, je saignais l'animal et je faisais l'autopsie du cadavre en dirigeant spécialement mon attention sur le tube digestif; celui-ci ne présentait jamais de lésions.

Je transvasais immédiatement après dans des boîtes de Petri la

gélatine des tubes dans lesquels j'avais ensemencé la lymphe, le sang, ou bien le morceau d'un organe quelconque.

En cultivant les microorganismes provenant des portions d'organes, j'avais souvent recours à la méthode dite d'enrichissement, c'est-à-dire que je plaçais pour plusieurs heures le bouillon contenant un morceau d'organe dans une étuve à 37°, et j'introduisais ensuite ce morceau d'organe dans une boîte de Petri contenant de la gélatine liquide.

J'observais les milieux ensemencés pendant dix jours et quelquefois davantage. Lorsque j'obtenais des microorganismes dans un des milieux de culture, je les ensemençais sur de la gélose, de la gélatine ou de la pomme de terre, pour en obtenir des cultures pures. Pour favoriser le développement des microorganismes que j'avais introduits dans le tube digestif de mes chiens, je maintenais presque toujours les cultures à la température de la chambre; dans ces conditions ces microorganismes se développent très bien et produisent leurs pigments caractéristiques à cette température.

J'examinais presque toujours la virulence des microorganismes cultivés en les injectant dans la cavité péritonéale de cobayes.

Dans la première série d'expériences, j'ai employé dix chiens dont j'ai étudié bactériologiquement 157 centimètres cubes de lymphe ensemencée en 119 parties. Jen'ai jamais obtenu dans les cultures de lymphe les microorganismes qui avaient été mélangés à la nourriture distribuée à ces animaux. Je n'ai obtenu que 6 fois des cultures d'autres microorganismes provenant de 3 chiens (deux fois des coques et quatre fois des bacilles).

J'ai aussi étudié bactériologiquement 80 centimètres cubes de sang, en 22 parties, provenant de 5 chiens. Une fois seulement j'ai cultivé des microorganismes, mais différents de ceux dont les animaux avaient été nourris. Tous les autres milieux de culture ensemencés avec du sang sont restés stériles.

Les microorganismes cultivés de la lymphe et du sang n'étaient point virulents pour le cobaye. Malgré toutes les précautions prises, il n'est pas possible de décider s'ils provenaient de la lymphe et du sang, la contamination par l'air ne pouvant être entièrement exclue.

En examinant au point de vue bactériologique les organes provenant de 6 chiens, j'ai obtenu les microorganismes dont les animaux avaient été nourris, quatre fois de la glande mésentérique, une fois de la glande bronchique, une fois du poumon et une fois

du rein. Ces résultats confirment donc mes recherches antérieures qui démontrent que les microorganismes peuvent passer du tube digestif des animaux normaux dans les organes internes.

Avant mes recherches, Nocard, Porcher et Desoubry, Neisser, Opitz, Nicolas et Descos ont étudié au point de vue bactériologique le chyle et la lymphe. Ils sont arrivés à des résultats différents. D'après les auteurs allemands (Neisser, Opitz) la lymphe est toujours stérile, tandis que les auteurs français (Nocard, Porcher et Desoubry, Nicolas et Descos) sont d'un avis contraire. Les inexactitudes qu'on trouve dans tous ces travaux ne permettent guère d'en admettre les résultats sans restriction, de sorte qu'il n'existe pas, jusqu'à présent, de preuves sûres que les microorganismes passent du tube digestif de l'animal dans la lymphe et dans le sang.

Il faut supposer que la pénétration des microorganismes dans les organes internes peut s'effectuer dans les conditions normales soit par les chylifères et le canal thoracique, soit par les veines mésentériques, ou bien encore par ces deux voies à la fois.

L'examen bactériologique de la lymphe et du sang des animaux en pleine digestion m'a donné des résultats négatifs; mais on pourrait les attribuer au pouvoir bactéricide de ces humeurs.

Les propriétés bactéricides du sang ont déjà été maintes fois constatées in vitro; celles de la lymphe, au contraire, n'ont été étudiées jusqu'à présent que dans une seule recherche concernant le bacille typhique.

Pour me rendre compte si le pouvoir bactéricide pouvait influer sur le résultat de mes expériences, il fallait résoudre la question de savoir si la lymphe que j'ensemençais, c'est-à-dire la lymphe non défibrinée et prise en pleine période digestive, était en réalité bactéricide. Pour obtenir une lymphe non défibrinée et ne se cogulant pas, au moins pendant un certain temps, j'eus recours à la méthode de Freund modifiée par Bordet et Gengou, méthode dont ces auteurs se sont servis pour obtenir du sang non coagulable. Je me servais donc, pour recueillir la lymphe, de tubes enduits intérieurement de paraffine, et j'introduisais dans le canal thoracique une canule recourbée à angle droit, dont l'intérieur était également enduit de paraffine. Malgré toutes ces précautions, je n'arrivais pas toujours à obtenir une lymphe ne se coagulant pas au bout de quelques minutes. Dans les expériences réussies, la lymphe ne se

coagulait que quelques heures après et même plus tard. Je prenais, pour l'examen de son pouvoir bactéricide, la lymphe de chiens affamés et celle de chiens nourris; parfois j'en défibrinais quelques portions, d'autres fois je ne le faisais pas. Je tâchais, en outre, d'obtenir du plasma de lymphe en recueillant celle-ci dans des tubes enduits intérieurement de paraffine et en la soumettant ensuite à l'action d'un centrifuge. Mais ces essais ne réussirent point, la lymphe s'étant chaque fois coagulée pendant cette opération.

Les microorganismes que j'ensemencais dans de la lymphe ou dans du bouillon additionné de lymphe, notamment le b. fluorescens non liquefaciens, b. prodigiosum, b. coli commune, staphylococcus pyogenes aureus, streptococcus pyogenes, b. pyocyaneus, provenaient dans la plupart des cas de cultures de bouillon de 24 heures. J'étudiais les propriétés bactéricides de la lymphe en me servant de la méthode de Nuttal et de Buchner. Je comptais toujours les colonies dans les boîtes de Petri trois jours après l'ensemencement des microorganismes sur la gélatine.

Il résulte de toutes mes expériences que la lymphe du canal thoracique, de chien nourri ou affamé, possède un pouvoir bactéricide in vitro tout aussi bien à l'état défibriné qu'à l'état non défibriné. On en peut donc conclure que les résultats négatifs de mes recherches ont été causés par le pouvoir bactéricide de la lymphe, agissant dans les milieux de culture.

Ces recherches n'ayant pas résolu le problème posé, j'ai tâché de l'étudier d'une autre façon.

Chez une dizaine de chiens narcotisés, je liais deux fois le canal thoracique tout près de son embouchure dans la veine, et je le tranchais entre les ligatures. Quelques jours après, je leur donnais pendant deux jours des aliments additionnés de cultures de 24 ou 48 heures du b. kiliense, b. fluorescens non liquefaciens, b. prodigiosum, et au bout de ce temps je narcotisais les animaux et j'en prélevais à l'état vivant des morceaux d'organes que je soumettais à l'examen bactériologique. Les dimensions des morceaux d'organes ensemencés variaient d'un demi-centimètre à un centimètre cube.

J'observais tous les milieux ensemencés pendant dix jours.

Dans cette série d'expériences, la culture a décelé la présence des microorganismes avalés par l'animal, une fois dans la glande bronchique et deux fois dans les glandes mésentériques. Mais il

faut remarquer que ces microorganismes se sont développés dans une glande bronchique d'un sujet chez lequel la nourriture fut directement introduite dans l'estomac à l'aide d'une sonde stomacale. Si on tient compte de ce que dans ces conditions les chiens sont souvent très inquiets, il est facile de comprendre que les microorganismes peuvent alors pénétrer dans le poumon par aspiration surtout si le chien se met à aboyer. C'est probablement ce qui a eu lieu dans le cas présent.

Maintenant, si on compare les résultats d'ensemencement des fragments d'organes des chiens dont le cansl thoracique a été lié (seconde série d'expériences) à ceux provenant d'animaux normaux (première série d'expériences), on constate une différence notable.

Dans la première série d'expériences, en étudiant les organes de six chiens la culture bactériologique a décelé la présence des microorganismes dont ces animaux avaient été nourris: quatre fois dans les glandes mésentériques, une fois dans le rein, une fois dans le poumon et une fois dans la glande bronchique. Dans la seconde série d'expériences sur dix chiens dont le canal thoracique fut lié, je n'ai obtenu les microorganismes dont ces animaux avaient été nourris que deux fois dans les glandes mésentériques et une fois dans la glande bronchique. Dans la première série d'expériences, j'ai ensemencé les organes de 6 chiens; dans un travail antérieur [1]) j'ai expérimenté d'une façon analogue sur 4 chiens. Ces expériences ont donné un résultat pareil à celui des expériences du présent travail.

Nous pouvons donc comparer les résultats d'ensemencement des organes de 10 chiens normaux nourris de microorganismes avec ceux d'un même nombre d'animaux dont le canal thoracique a été lié et qui étaient nourris d'une façon analogue.

Série I (chiens normaux).

Organe examiné		Résultat positif de l'examen bactériologique
glandes mésentériques	de 10 chiens	7 fois
la rate	„ 10 „	1 „
le foie	„ 10 „	0 „

[1]) De la pénétration des microorganismes de l'appareil digestif dans les organes internes à l'état normal. (Archives polonaises des sciences biologiques et médicales, vol. II, 1903, expériences N° XV, XVI, XVIII et XIX).

le rein	de	10	chiens	1 fois
le poumon	„	6	„	1 „
la glande bronchique	„	4	„	1 „
la moëlle des os	„	4	„	1 „
le muscle	„	3	„	2 „

Série II (chiens dont le canal thoracique a été lié).

Organe examiné				Résultat positif de l'examen bactériologique
glandes mésentériques	de	10	chiens	2 fois
la rate	„	10	„	0 „
le foie	„	10	„	0 „
le rein	„	10	„	0 „
le poumon	„	10	„	0 „
la glande bronchique	„	10	„	1 „
le moëlle des os	„	4	„	0 „

Il faut remarquer que chez les chiens dont le canal thoracique a été lié, les microorganismes introduits dans le tube digestif ne pénétraient que relativement rarement dans les glandes mésentériques. J'ai constamment observé chez ces animaux un notable engorgement des vaisseaux chylifères. Il faut donc admettre que le passage des microorganismes, du tube digestif dans les glandes mésentériques, était entravé par une résorption à la suite d'une augmentation de pression dans les vaisseaux chylifères.

En se basant sur les résultats des expériences exposées plus haut, on peut affirmer que les microorganismes passent du tube digestif dans le sang qui les répand dans les organes internes; ce passage se fait sinon exclusivement du moins dans la majorité des cas, par l'intermédiaire des vaisseaux chylifères et du canal thoracique.

Comme je n'ai jamais trouvé dans les organes internes des chiens dont le canal thoracique avait été lié, des microorganismes introduits dans leur estomac (à l'exception d'un cas douteux), je crois pouvoir conclure qu'il n'est pas probable que la pénétration des microorganismes, du tube digestif dans les organes internes, se produise généralement par la voie des veines mésentériques.

Travail de l'Institut de pathologie générale et expérimentale
de l'Université de Cracovie.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Leona Marchlewskiego.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

18 Grudnia 1903.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873—1902

Librairie de la Société anonyme polonaise
(Spółka wydawnicza polska)
à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Seances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 10 k. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Iagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI. XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 6 k. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 14 k. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski 4 k. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674—1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo, 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol. I. II. IV. V. épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas geologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo, 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.

MAY 12 1904

12.229

N° 10. DÉCEMBRE 1903.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

ANZEIGER
DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KRAKAU.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1904.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTE FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:

S. A. I. L'ARCHIDUC FRANÇOIS FERDINAND D'AUTRICHE-ESTE.

VICE-PROTECTEUR: S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. BOLESLAS ULANOWSKI.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADEMIE:

(§ 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§ 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§ 12). La langue officielle de l'Académie est la langue polonaise.

Depuis 1885, l'Académie publie, en deux séries, le „Bulletin international" qui paraît tous les mois, sauf en août et septembre. La première série est consacrée aux travaux des Classes de Philologie, d'Histoire et de Philosophie. La seconde est consacrée aux travaux de la Classe des sciences mathématiques et naturelles. Chaque série contient les procès verbaux des séances ainsi que les résumés, rédigés en français, en anglais, en allemand ou en latin, des travaux présentés à l'Académie.

Le prix de l'abonnement est de 6 k. = 8 fr.
Les livraisons se vendent séparément à 80 h. = 90 centimes.

Publié par l'Académie
sous la direction de M. Léon Marchlewski,
Mebre délégué de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Kraków, 1904. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem Józefa Filipowskiego.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 10. **Décembre** **1903.**

Sommaire: 51. M. LADISLAS NATANSON. Remarques sur la théorie de la relaxation.
52. M. ED. de JANCZEWSKI. La sexualité des Groseillers (Ribes L.).
53. MM. J. KOWALSKI et B. ZDANOWSKI. Nouvelle méthode pour la mesure des résistances électrolytiques liquides et plusieurs de ses applications.
54. MM. J. HETPER et L. MARCHLEWSKI. Recherches sur la matière colorante du sang.
55. M. K. WÓJCIK. La faune infraoligocène de Kruhel mały près de Przemyśl. (Couches de Clavulina Szabói). I. Les Foraminifères et les Mollusques.
56. M. T. GARBOWSKI. Sur le développement parthénogénétique des Astéries.
57. M. T. ESTREICHER. Sur les points de fusion de l'oxygène et de l'azote.

Séance du lundi 7 Décembre 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

51. M. LADISLAS NATANSON m. t. **Uwagi nad teoryą zjawiska zluźniania.** ***(Remarques sur la théorie de la relaxation).***

Dans la séance du 4. Février 1901, j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie un Mémoire „Sur les lois de la Viscosité“ [1]) qui est devenu le point de départ de plusieurs travaux ultérieurs [2]) portant sur divers points de la Théorie de la Viscosité. Dans un Mémoire [3]) intitulé „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité“ et présenté à l'Académie dans la séance du 8. Juin 1903, M. Zaremba s'est proposé, ainsi qu'il le dit à la page 381, de „préciser“ et de „compléter“ l'hypothèse que j'ai prise pour base de ma théorie „de façon qu'il soit possible d'en déduire les „équations du mouvement d'un fluide visqueux, d'établir ensuite ces „équations au moyen d'une analyse rigoureuse et de faire ressortir „enfin les défauts de l'analyse de M. Natanson“.

[1]) Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1901, p. 95.

[2]) Bulletin Int., Année 1901, p. 161; Année 1902, p. 19, 488, 494; Année 1903, p. 268 et 283.

[3]) Bulletin Int., Année 1903, p. 380.

§ 1. On reconnaît bientôt à l'examen que la théorie que propose M. Zaremba dans le travail auquel nous venons de faire allusion, présente, avec la théorie que j'ai exposée, un degré de ressemblance tout à fait extraordinaire. Quelles sont, en effet, les hypothèses sur lesquelles repose la théorie de M. Zaremba? On peut les résumer de la manière suivante:

A. L'hypothèse que (pour plus de brièveté) j'appellerai „hypothèse de la déformation élastique" ou hypothèse *A*; elle consiste à admettre que la distribution des pressions intérieures dans un fluide en mouvement soit à chaque instant assimilable à celle qui règnerait au sein d'un corps fictif, isotrope et parfaitement élastique lequel aurait éprouvé une certaine déformation (pages 380, 383, 384 etc.).

B. L'hypothèse relative à la nature et aux lois de la relaxation pure; M. Zaremba, à la page 385 de son Mémoire, l'appelle „Hypothèse I" (voir plus loin, § 4).

C. L'hypothèse énoncée, sous le nom d'„Hypothèse II", à la page 395 du Mémoire; d'après cette hypothèse, les variations qu'éprouvent par l'effet de la relaxation les quantités relatives à une particule déterminée du fluide, se superposent simplement aux variations des mêmes quantités dues à l'action des influences étrangères à la relaxation.

Telles sont les hypothèses que M. Zaremba a prises pour base de ses développements, dans le Mémoire du 8. Juin 1903. Elles coïncident exactement avec celles que j'ai adoptées dans mon Mémoire du 4. Février 1901.

A la page 383 du Mémoire cité, M. Zaremba distingue deux espèces de déformation pouvant se produire dans le sein d'un fluide; il propose de les appeler: „déformation géométrique" et „déformation élastique" (ou „déformation du corps fictif") et il en représente les composantes par les symboles

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3;$$
$$\varepsilon_1^*,\ \varepsilon_2^*,\ \varepsilon_3^*,\ \gamma_1^*,\ \gamma_2^*,\ \gamma_3^*.$$

Ce qu'il ne dit pas, à l'endroit cité, c'est que dans mon Mémoire du 4. Février 1901, j'ai proposé la même distinction. J'ai considéré, exactement comme le fait M. Zaremba, deux espèces de déformation; je les ai nommées déformation apparente et déformation véritable et j'ai désigné par

$$\varepsilon,\ \varphi,\ \psi,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$$
$$\varepsilon^*,\ \varphi^*,\ \psi^*,\ \alpha^*,\ \beta^*,\ \gamma^*$$

leurs composantes respectives. L'identité des notions auxquelles ces dénominations et ces symboles se rapportent ne saurait être révoquée en doute. M. Zaremba appelle déformation géométrique celle que le fluide a réellement subie depuis une certaine époque fixe jusqu'à l'époque considérée; je dis, à la page 103 de mon Mémoire de 1901, que la déformation apparente est „celle que l'activité de „nos sens nous permet d'observer". La déformation élastique d'un fluide, d'après M. Zaremba, est celle qu'il faut attribuer au corps fictif parfaitement élastique que nous substituons par la pensée, à chaque instant, au fluide réel (voir hypothèse A) et dont l'état de tension intérieure est identique à celui qui, à l'instant considéré, règne dans le sein du fluide. M. Zaremba qui propose cette définition, affirme à la page 402 de son Mémoire que je n'ai pas „précisé", dans mon Travail du 4. Février 1901, la notion de ce que j'ai appelé „déformation véritable". Je demande donc la permission d'extraire de ce Travail les lignes qui suivent: „Nous „admettrons en second lieu que les inégalités de pression sont tou„jours liées, aux composantes de la déformation véritable, par la „loi de la proportionnalité simple. Pour les solides élastiques de la „théorie idéale, la notion de la déformation véritable se confond „avec celle de la déformation apparente [1]); mais nous savons qu'il „n'en est point ainsi pour les fluides. Ainsi notre hypothèse actuelle „consiste à supposer que la loi de Hooke s'étend aux fluides, mais „à la condition de l'appliquer, non point aux composantes de la dé„formation apparente, mais bien à celles de la déformation véritable. „Cette hypothèse admise, nous aurons:

„(6a) $$p_{xx} - p_0 = -2n\varepsilon^* - (k - \tfrac{2}{3}n)\Delta^*$$

„(6b) $$p_{yy} - p_0 = -2n\varphi^* - (k - \tfrac{2}{3}n)\Delta^*$$

„(6c) $$p_{zz} - p_0 = -2n\psi^* - (k - \tfrac{2}{3}n)\Delta^*$$

[1]) Le lecteur voudra bien comparer, à ce simple énoncé, le résultat auquel parvient M. Zaremba moyennant le raisonnement exposé aux pages 399, 400 et 401 de son Travail, à savoir: dans le cas où la relaxation fait défaut, la déformation élastique de la substance est identique à sa déformation géométrique. Il est évident que cette conclusion équivaut à l'énoncé des hypothèses A et C appliquées au cas particulier que l'on s'est proposé de considérer.

„(7a) $p_{yz} = -n\alpha^*$

„(7b) $p_{zx} = -n\beta^*$

„(7c) $p_{xy} = -n\gamma^*$" (*l. c.*, p. 104)[1].

Il est évident que l'idée exprimée par ce passage est exactement la même que celle qui, dans le Travail de M. Zaremba, est dédoublée pour ainsi dire et présentée sous la forme: d'une définition (définition de la déformation élastique) et d'une hypothèse (hypothèse *A*). Il est évident que cette définition et cette hypothèse ne font que traduire en un langage de convention, l'idée même qu'expriment les équations (6) et (7) du § 7 de mon Mémoire de 1901, équations qui ont été reproduites dans l'extrait que l'on vient de lire. Enfin il est évident que les équations (8) de la page 384 du Mémoire de M. Zaremba sont identiques à ces mêmes équations (6) et (7) du § 7 de mon Travail de 1901[2]. Ces faits permettent d'apprécier à sa juste valeur l'opinion émise par M. Zaremba, d'après laquelle mon Travail du 4. Février 1901 ne renfermerait pas les données qui sont indispensables pour associer une idée précise à ce que j'ai appelé déformation véritable.

A la page 402 de sa Communication, M. Zaremba affirme encore que, dans mon Mémoire de 1901, je n'ai fait jouer aucun rôle, dans la déduction de mes équations (1) et (2) du § 8., à la notion de la déformation véritable. Pour faire justice de cette objection, il me suffira de dire que, à la page 106, ligne 7, du Mémoire en question, se trouve l'*alinéa* qui débute en ces termes: „On „arrive aux mêmes équations etc."; que la déduction des équations (1) et (2) du § 8. qui s'y trouve exposée part explicitement des équations (citées plus haut) (6) et (7) du § 7 et que, par celamême, elle est entièrement et incontestablement fondée sur l'emploi de la notion de la „déformation véritable".

[1]) Pour l'explication des notations adoptées, on voudra bien se reporter au Mémoire cité.

[2]) Entre ces deux systèmes d'équations, il n'y a que des différences de notation sans aucune importance. Observons cependant que, dans ma Communication de 1901, la lettre k désigne le module de compressibilité; et que cette constante est égale à la somme $\lambda + \frac{2}{3}\mu$, dans les notations de M. Zaremba. C'est ce qu'il importe d'avoir en vue en lisant les lignes 26 et 27 de la page 396 du Mémoire de M. Zaremba.

La notion de la déformation véritable[1]) s'impose lorsque l'on s'engage sur la voie que j'ai proposée au § 7 de mon Mémoire de 1901 et que suit aussi M. Zaremba. Mais il est clair que l'on pourra la remplacer par une autre notion lorsque l'on aura adopté une voie différente. C'est précisément ce que j'ai essayé de faire dans les §§ 3. et 4. de mon Mémoire de 1901. Les symboles $(d/dt)_1$ que contiennent les équations (1) et (2) du § 3. se rapportent, cela est évident[2]), aux variations dues à l'action des forces ou influences étrangères à la relaxation; c'est pourquoi je les appelle (à l'endroit cité) forces ou influences étrangères ou extérieures; quant au phénomène de la relaxation, au sein d'une particule fluide, je l'attribue à l'activité des forces intérieures à la particule. Les équations (1) et (2) du § 3., par conséquent, expriment une hypothèse bien définie et parfaitement claire en elle-même.

M. Zaremba a bien remarqué la ressemblance (allant à mon avis jusqu'à l'identité) qui existe entre les équations (26) de son Mémoire du 8. Juin 1903 et les équations (1) et (2) du § 3. de ma Communication du 4. Février 1901. Voici ce qu'il en dit: les équations (1) et (2) du § 3. de ma Communication „correspondent vaguement" (ainsi s'exprime M. Zaremba, page 402, ligne 15) à ses équations (26). Je me bornerai, pour toute réponse, à transcrire ici les équations auxquelles se rapporte cette expression. Les équations (26) de M. Zaremba sont de la forme

$$d_1 p_{xx} = -\{\lambda\tilde{\omega} + 2\mu a_1\}\, dt \quad \text{et}$$
$$d_1 p_{yz} = -\mu c_1\, dt.$$

Les équations (1) et (2) du § 3. de mon Mémoire de 1901 sont les suivantes

$$\left(\frac{dp_{xx}}{dt}\right)_1 = -2ne - (k - \tfrac{2}{3}n)\,\tilde{\omega} \quad \text{et}$$
$$\left(\frac{dp_{yz}}{dt}\right)_1 = -na.$$

[1]) Mais non celle du „corps fictif" qui n'est nullement indispensable; elle peut même devenir dangereuse, ainsi que je l'expliquerai plus tard.

[2]) A la page 99, ligne 2, on lit: „Les effets des influences extérieures, représentés par ces équations etc." A la page 100, ligne 1, on lit: „Si, à la variation „$(d/dt)_1$, due à l'influence des forces étrangères, d'une quantité variable quelconque, „nous ajoutons etc."

J'ajoute que la signification des symboles

$$a_1 \,.\, c_1 \,.\, \tilde{\omega} \,.\, \mu \,.\, \lambda \,.$$

dans le Mémoire de M. Zaremba, est la même que celle qui, dans mon Travail, est attribuée aux symboles

$$e,\ a,\ \tilde{\omega},\ n,\ k - \tfrac{2}{3} n\ ^{1}).$$

§ 2. Il me reste à analyser les hypothèses adoptées par M. Zaremba au sujet des lois qui président à la relaxation pure et à les comparer à celles qui, dans mon Mémoire de 1901, se rapportent à cette partie du problème. C'est ce qui fera l'objet du § 4. Essayons au préalable de mettre en évidence certaines conclusions qui découlent naturellement des équations et des conventions que M. Zaremba a adoptées. Dans ce paragraphe, par conséquent, nous ne ferons intervenir aucune hypothèse différente de celles que M. Zaremba a prises pour base de sa théorie; nous adopterons d'emblée les notations de son Mémoire; nous nous proposerons simplement de poursuivre les conséquences de la théorie qu'il a exposée.

Observons tout d'abord ceci: les équations (8) et (9) de la page 384 nous donnent

$$p_m = -(\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\,\Theta^* \tag{1}$$

où l'on désigne par p_m, comme dans le Mémoire de M. Zaremba, la moyenne:

$$p_m = \tfrac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \tag{2}$$

Convenons de représenter par $[f]$ la limite vers laquelle tend une quantité quelconque f par l'effet de la relaxation. Nous aurons par exemple

$$[p_{xx}] = [p_{yy}] = [p_{zz}] = p \tag{3}$$

$$[p_{yz}] = 0;\ \ [p_{zx}] = 0;\ \ [p_{xy}] = 0\,. \tag{4}$$

[1]) Nous ferons ici une remarque qui nous sera utile dans la suite et qui ne se trouve pas dans le Travail de M. Zaremba. Il ne faut pas perdre de vue que les constantes λ et μ de M. Zaremba et pareillement les constantes k et n de ma Communication, ne sont nullement des constantes fondamentales, des constantes caractéristiques du corps considéré; leurs valeurs dépendent des conditions d'ordre thermodynamique auxquelles le mouvement du fluide est assujetti. Nous aurons par exemple certaines λ, μ, k, n qui conviendront au cas du mouvement isothermique; nous aurons des valeurs différentes dans le cas du mouvement adiabatique; et ainsi de suite.

Des équations (8), page 384, on conclut que l'on a

$$p = [p_{xx}] = -\lambda\,[\Theta^*] - 2\,\mu\,[\varepsilon_1{}^*] \tag{5a}$$

$$p = [p_{yy}] = -\lambda\,[\Theta^*] - 2\,\mu\,[\varepsilon_2{}^*] \tag{5b}$$

$$p = [p_{zz}] = -\lambda\,[\Theta^*] - 2\,\mu\,[\varepsilon_3{}^*] \tag{5c}$$

Les équations (5) exigent que l'on ait

$$[\varepsilon_1{}^*] = [\varepsilon_2{}^*] = [\varepsilon_3{}^*] = \tfrac{1}{3}\,[\Theta^*]; \tag{6}$$

par conséquent les équations (5) permettent d'écrire

$$p = -(\lambda + \tfrac{2}{3}\,\mu)\,[\Theta^*]\,; \tag{7}$$

cette relation d'ailleurs peut se déduire immédiatement de l'équation précédente (1).

Cherchons à nous rendre compte de l'influence que peuvent exercer, sur la valeur des quantités p_m et p, les forces et les influences étrangères à la relaxation. Cette influence s'exprime par les équations

$$\frac{d_1\,p_m}{dt} = -(\lambda + \tfrac{2}{3}\,\mu)\,\tilde{\omega} \tag{8}$$

$$\frac{d_1\,p}{dt} = -(\lambda + \tfrac{2}{3}\,\mu)\,\frac{d_1\,[\Theta^*]}{dt} \tag{9}$$

que l'on tire des équations précédentes (1) et (7) en désignant par $\tilde{\omega}$ la quantité définie par l'égalité (27) du Mémoire de M. Zaremba[1].

Ces mêmes quantités, p_m et p, sont-elles soumises à l'influence de la relaxation pure? Ajoutons membre à membre les trois premières équations du système (21), page 392, du Mémoire de M. Zaremba; nous aurons

$$\frac{d_2\,p_m}{dt} = -\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right)(p_m - p). \tag{10}$$

Ceci peut s'écrire en adoptant la notation de M. Zaremba [égalités (17), page 390]

$$\frac{d_2\,p_m}{dt} = \frac{p_m - p}{T_1}\,; \tag{11}$$

[1]) Nous admettons ici les équations données en bas de la page 394; nous supposons (et, en cela, nous suivons l'exemple donné par M. Zaremba, page 395, ligne 1) que les lois ordinaires de la différentiation s'appliquent à l'opération d_1.

or cette équation permet de répondre à la première question que nous nous sommes proposée. Pour répondre à la deuxième, observons que la définition de la quantité p (page 385) exige que l'on ait

$$\frac{d_2 p}{dt} = 0. \tag{12}$$

Si l'on admet l'hypothèse C précédente (hypothèse II, page 395) on aura, en vertu des formules (8), (9), (11) et (12):

$$\frac{dp_m}{dt} = -\frac{p_m - p}{T_1} - (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\,\tilde{\omega} \tag{13}$$

$$\frac{dp}{dt} = -(\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\frac{d_1[\Theta^*]}{dt}; \tag{14}$$

dans ces équations, le symbole d/dt a évidemment la signification $\partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$ (page 395 du Mémoire de M. Zaremba).

M. Zaremba admet que la quantité p vérifie l'équation caractéristique du fluide considéré, c'est-à-dire une équation de la forme

$$p = p\,(\varrho, \vartheta), \tag{15}$$

où ϱ et ϑ désignent la densité et la température du fluide, au point (x, y, z) et à l'époque arbitrairement donnée t; il suppose en effet, ainsi qu'il est dit à la page 385, que la densité et la température d'une particule fluide ne changent pas par l'effet pur et simple de la relaxation. Rappelons maintenant que, entre les variables ϱ et ϑ, il existe en général une relation due aux conditions d'ordre thermodynamique auxquelles le mouvement du fluide est assujetti; et désignons par

$$\left(\frac{dp}{d\varrho}\right) \tag{16}$$

la dérivée totale, par rapport à la variable ϱ, de la fonction $p\,(\varrho, \vartheta)$, dérivée que l'on calcule en tenant compte de la relation entre ϱ et ϑ à laquelle nous venons de faire allusion. En vertu de l'équation (15) nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{d_1 p}{dt} &= \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)\frac{d\varrho}{dt} \qquad (\text{puisque } d_2\,\varrho/dt = 0) \\ &= -\,\varrho\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)\tilde{\omega} \\ &= -\,h\,\tilde{\omega}, \end{aligned} \tag{17}$$

le symbole h étant défini au moyen de l'égalité[1])

$$h = \varrho \left(\frac{dp}{d\varrho} \right). \tag{18}$$

Jointe à l'équation (12), l'équation (17) devient

$$\frac{dp}{dt} = - h \tilde{\omega}. \tag{19}$$

Pour abréger l'écriture convenons de représenter par k la somme $\lambda + \frac{2}{3}\mu$; des équations (14) et (19) on déduit

$$k \frac{d_1 [\Theta^*]}{dt} = h \tilde{\omega}. \tag{20}$$

On a enfin, en vertu des équations (13) et (19):

$$\frac{d(p_m - p)}{dt} = - \frac{p_m - p}{T_1} - (k - h) \tilde{\omega}. \tag{21}$$

§ 3. Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent se déduisent des équations données par M. Zaremba; par conséquent ils ne font qu'exprimer les hypothèses que M. Zaremba a adoptées. J'ai déjà montré à plusieurs reprises, dans mes Communications précédentes, qu'il existe une hypothèse très vraisemblable qu'il importe de ne pas perdre de vue si l'on veut asseoir solidement les fondements de la Théorie de la Relaxation. Cette hypothèse est analogue à celle que l'on adopte, dans la Théorie Classique, sous le nom d'hypothèse de Stokes; elle joue, dans notre Théorie, exactement le même rôle. On sait en effet que Barré de Saint-Venant[2]) en 1843 et, en 1845, Sir G. G. Stokes[3]) ont énoncé la proposition suivante: Pour une particule déterminée du fluide et à une époque donnée t, supposons vérifiées les conditions[4])

$$a_1 = a_2 = a_3 = \tfrac{1}{3} \tilde{\omega}; \tag{1}$$

[1]) Voir Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Classe d. Sc. Math. et Nat., Année 1902, p. 21; Année 1903, p. 275; Physik. Zeitschrift, Vol. IV, p. 541. 1903

[2]) Comptes Rendus tome XVII, p. 1240.

[3]) Cambridge Phil. Soc. Trans., VIII, p. 287. Math. and phys. Papers, Vol. I, p. 75. Les considérations qui ont conduit Stokes à admettre l'exactitude de la proposition rappelée plus haut sont trop connues pour être reproduites ici.

[4]) On adopte ici les notations de M. Zaremba; voir les équations (24) et (27) de son Travail.

on aura alors pour la particule en question, à l'époque donnée t.

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p. \tag{2}$$

Cette hypothèse a été adoptée par une foule de savants [1]). Nous pouvons la mettre sous une forme un peu différente qui est la suivante: une déformation qui satisfait aux conditions précédentes (1) ne modifie pas la valeur des différences $p_{xx}-p$, $p_{yy}-p$, $p_{zz}-p$; si donc, avant la déformation, les équations

$$p_{xx} - p = 0, \quad p_{yy} - p = 0, \quad p_{zz} - p = 0 \tag{3}$$

étaient vérifiées, elles seront également vérifiées après la déformation.

Il est clair que l'hypothèse de Stokes que nous venons de rappeler repose, comme la Théorie classique toute entière, sur cette conception dont, dans notre théorie, nous désirons nous affranchir, à savoir: que la vitesse du phénomène de la relaxation étant infinie, on peut toujours le considérer comme accompli. Essayons de dégager l'hypothèse de Stokes de cette supposition supplémentaire qu'elle implique, présentée sous la forme précédente. Continuons d'admettre, comme auparavant, que toute déformation qui satisfait aux conditions (1) exerce, sur la valeur des quantités p, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, la même influence, en sorte que les valeurs des différences

$$p_{xx} - p, \quad p_{yy} - p, \quad p_{zz} - p \tag{4}$$

ne sont pas modifiées; seulement, à ces différences (4), attribuons des valeurs qui, dans le cas général, sont différentes de zéro. Moyennant cette modification, l'hypothèse de Stokes devient applicable à la théorie de la viscosité que j'ai proposée et dont le trait essentiel est de supposer finie la vitesse de la relaxation. L'hypothèse dans laquelle nous nous plaçons est donc la suivante: pour une particule déterminée du fluide et à une certaine époque t, supposons vérifiées les conditions précédentes (1); pour cette particule et à l'époque considérée t, nous aurons

[1]) Clerk-Maxwell (Phil. Trans., Vol. CLVII, p. 81. 1867); Lamb (Hydrodynamics, p. 512. 1895); Basset (Treatise on Hydrodynamics, II, p. 242. 1888); Lord Rayleigh (Theory of Sound, II, p. 282. 1878); Love (Mathemat Encyklop., Bd. IV, 15, p 69. 1901); Kirchhoff (Theorie der Wärme, p. 193. 1894); M. Smoluchowski (Bull Int. Ac. Sci. de Crac 1903, p. 143); etc. etc. M. Duhem (Recherches sur l'Hydrodynamique, Paris 1903) sans la rejeter, ne regarde pas l'hypothèse de Stokes comme forcée.

$$\frac{d_1}{dt}(p_{xx}-p)=0;\quad \frac{d_1}{dt}(p_{yy}-p)=0;\quad \frac{d_1}{dt}(p_{zz}-p)=0. \tag{5}$$

Cette hypothèse (que nous appellerons désormais „hypothèse D") doit être envisagée comme équivalant, au point de vue de notre théorie, à celle que l'on adopte généralement, sous le nom d'hypothèse de Stokes, dans la Théorie Classique de la Viscosité.

Examinons maintenant de plus près les conséquences auxquelles on est conduit en adoptant l'hypothèse D. A cet effet, reprenons les équations du paragraphe précédent. La première équation du système (26), page 395, du Mémoire de M. Zaremba, à savoir

$$\frac{d_1 p_{xx}}{dt}=-\lambda\tilde{\omega}-2\mu a_1, \tag{6}$$

donne en vertu de l'équation (17) du paragraphe précédent,

$$\frac{d_1(p_{xx}-p)}{dt}=-(\lambda-h)\tilde{\omega}-2\mu a_1. \tag{7}$$

Imaginons une déformation vérifiant les conditions (1) ci-dessus; nous aurons dans ce cas

$$\begin{aligned}\frac{d_1(p_{xx}-p)}{dt} &= -(\lambda-h)\tilde{\omega}-2\mu a_1\\ &= -(k-h)\tilde{\omega}.\end{aligned} \tag{8}$$

L'hypothèse D exige que le premier membre de cette équation soit égal à zéro quelle que soit la valeur de la quantité $\tilde{\omega}$. Il résulte de là que l'égalité

$$k=h \tag{9}$$

peut être considérée comme l'expression la plus simple de l'hypothèse D.

Passons en revue les résultats auxquels on arrive lorsqu'on pose $k=h$ dans nos équations. L'équation (20) du § 2 donne, dans cette hypothèse,

$$\frac{d_1[\Theta^*]}{dt}=\tilde{\omega}; \tag{10}$$

l'équation (21) du même paragraphe devient

$$\frac{d(p_m-p)}{dt}=-\frac{p_m-p}{T_1}. \tag{11}$$

L'équation (11) peut être remplacée par les deux équations que voici: par l'équation

$$\frac{d_1 (p_m - p)}{dt} = 0 \tag{12}$$

qui se déduit des équations (8) et (9) du § 2 en vertu de l'égalité (10) précédente; et, en second lieu, par l'équation

$$\frac{d_2 (p_m - p)}{dt} = - \frac{p_m - p}{T_1} \tag{13}$$

à laquelle les équations (11) et (12) du § 2 conduisent immédiatement.

Imaginons un fluide qui remplirait les conditions voulues pour que la relation précédente (9) soit vérifiée. Les équations (11), (12), (13) nous apprennent que, dans un pareil fluide, la marche de la relaxation de la différence $p_m - p$ ne sera pas entravée par les déformations successives imposées au fluide; cela sera vrai quelle que soit la nature de ces déformations. La relaxation de la différence $p_{xx} - p$ et des deux autres différences analogues, ne jouit point de cette propriété; c'est ce que l'on prouve facilement en se reportant à l'équation (7) de ce paragraphe; cette équation, en effet, peut se mettre, grâce à l'égalité (9), sous la forme suivante:

$$\frac{d_1 (p_{xx} - p)}{dt} = - 2 \mu (a_1 - \tfrac{1}{3} \tilde{\omega}). \tag{14}$$

Supposons que les symboles T et T' dans le Mémoire de M. Zaremba, désignent des périodes de temps de longueur comparable; la lettre T_1, dans ce cas, représente une période de même ordre de longueur. Imaginons un fluide pour lequel la relation (9) serait vérifiée. Le phénomène de la relaxation de la différence $(p_{xx} - p)$ dans ce fluide, est sujet à l'action des influences diverses qui provoquent les déformations; déjouée par l'effet de ces influences, la relaxation de la différence $(p_{xx} - p)$ recommence sans cesse à nouveau. Bien différente est la marche de la relaxation de la quantité $(p_m - p)$. Se trouvant entièrement à l'abri de l'influence des causes de déformation, la relaxation de cette quantité se poursuit sans interruption à travers toutes les phases du mouvement. Supposons que l'on étudie la marche du premier phénomène, à savoir la relaxation de la différence $(p_{xx} - p)$; il est évident qu'il sera toujours permis de considérer comme parfait, comme entièrement achevé, le

second phénomène: la relaxation de la différence $(p_m - p)$. Nous sommes arrivés à ce résultat, remarquons-le expressément, tout en supposant que les périodes T et T_1 sont du même ordre de longueur.

§ 4. Nous sommes maintenant en mesure d'analyser les hypothèses qui ont été adoptées, au sujet des lois de la relaxation pure, par M. Zaremba, dans son Mémoire du 8. Juin 1903. et par moi-même, dans ma Communication du 4. Février 1901. Citons d'abord l'énoncé suivant que l'on trouve à la page 385 du Mémoire de M. Zaremba: „Supposons qu'à partir d'une époque quelconque t tout „mouvement ultérieur du fluide par rapport aux axes x, y, z, ainsi „que tout changement de distribution des températures dans son sein, „aient été supprimés. Nous admettrons qu'il se produirait alors, en „chaque point du fluide, un phénomène que nous appellerons „relaxation" lequel consisterait en ceci: les quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} tend„raient dans ces conditions vers une limite commune p tandis que „les quantités p_{yz}, p_{zy} et p_{xy} tendraient vers zéro". Voici à présent ce que l'on trouve à la page 98 de mon Mémoire de 1901: „A par„tir du moment $t = 0$, nous voyons deux phénomènes se produire. „En premier lieu, nous voyons les modifications s'accomplir qui dé„pendent de l'action des influences étrangères. En second lieu, la „déformation faiblissant, les inégalités de pression tendant à s'annuler, „le système éprouve ce qui a reçu le nom de „relaxation", ainsi „qu'il a été dit plus haut". Et plus loin (page 99), après avoir énoncé l'hypothèse qui se rapporte à la loi de l'action des „influences étrangères" j'ai dit: „Essayons maintenant d'étudier de plus „près la marche, essentiellement irréversible, du phénomène de la „relaxation. Soit p la valeur vers laquelle les pressions p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} „convergent par l'effet de ce phénomène; la valeur vers laquelle „tendent simultanément les pressions p_{yz}, p_{zx} et p_{xy} est zéro".

Voici ce que dit encore M. Zaremba (page 385): „Dans le „phénomène de la relaxation tel que nous venons de le définir, la „température et la densité du fluide au point (x, y, z) conserveront „les valeurs τ et ϱ qu'elles avaient en ce point à l'époque t. Par „conséquent la quantité p n'est autre chose que la pression hydro„statique qui, pour le fluide considéré, correspondrait à la tempéra„ture τ et à la densité ϱ". Voici à présent les hypothèses que j'ai adoptées dans mon Mémoire de 1901 (page 101): „1) la pression „finale p est une fonction de la densité finale ϱ ainsi que de la

„température ϑ; 2) la densité et la température d'une portion dé-„terminée du fluide ne varient pas par l'effet, pur et simple, du phé-„nomène de la relaxation". On voit qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les hypothèses, relatives à la nature de la relaxation, que M. Zaremba a prises pour base de sa théorie et celles que l'on trouve dans mon Mémoire du 4. Février 1901.

On lit à la page 385 du Mémoire de M. Zaremba: „Il ré-„sulte de là que les quantités p, ϱ et τ vérifieront une équation „de la forme

$$„F(p, \varrho, \tau) = 0 \tag{10}$$

„bien connue dans la théorie classique de la chaleur sous le nom „d'équation caractéristique". Et à la page 403 il est dit: „M. Natanson ne s'est pas aperçu que la quantité qu'il désigne, „comme nous-même d'ailleurs, par p n'est autre chose qu'un élé-„ment bien connu dans la théorie classique de la chaleur, élément „qui vérifie l'équation (10) du chapitre précédent". Cette assertion est expressément contredite par le texte de mon Mémoire. Je dis, en effet, à la page 101, après avoir énoncé les hypothèses 1) et 2) que nous venons de citer: „Nous avons par conséquent

$$„p = p(\varrho, \vartheta); \quad \frac{dp}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{d\varrho}{dt}\frac{\partial p}{\partial \varrho}." \tag{9}$$

J'arrive ensuite à l'équation $dp/dt = -k\tilde{\omega}$ et, à la page 102, je poursuis en ces termes: „Ce que nous venons de dire nous enseigne „que l'équation (1) $dp/dt = -k\tilde{\omega}$ peut être regardée comme ex-„pression de l'hypothèse de l'existence, pour les fluides en équilibre, „d'une équation caractéristique puisque cette hypothèse con-„siste à admettre, pour l'état final d'un fluide, l'existence d'une éga-„lité de la forme

$$„p = p(\varrho, \vartheta). " \tag{2}$$

Je le constate: la proposition même qui, d'après ce que prétend M. Zaremba, serait restée inaperçue dans mon Mémoire de 1901, se trouve expressément énoncée[1]) dans les passages

[1]) On supposerait volontiers que M. Zaremba n'a pas remarqué l'existence de ces passages de mon travail; mais cette supposition est rendue impossible par les paroles suivantes: „n'ayant pas reconnu la véritable nature de la quantité p, „M. Natanson développe au sujet de cette quantité, dans le § 5 de son mé-„moire, des considérations que rien ne justifie" (page 403), car les passages que

du même Mémoire que je viens de citer; elle s'y trouve énoncée dans des termes à peu près identiques à ceux dont se sert M. Zaremba lui-même.

Je reconnais volontiers que les équations (2) et (3) du § 4. de mon Mémoire de 1901 ont une forme particulière qui n'est légitime que dans le cas où l'on admet l'hypothèse de Stokes ou, plus exactement, l'hypothèse D du § 3. précédent. Cette hypothèse est énoncée et adoptée dans mon Mémoire de 1901; mais je ne l'ai introduite que plus tard, dans le § 5. et le § 7. de ce Travail. Par conséquent l'objection précédente est bien fondée en tant qu'elle se dirige contre la rédaction de mon Mémoire; mais elle n'offre que peu d'intérêt au point de vue des applications de la théorie à l'étude des phénomènes naturels. Aucun phénomène connu jusqu'à ce jour ne nous porte à croire que les hypothèses A, B, C du § 1. présentent un degré de vraisemblance réellement supérieur à celui qu'il convient d'assigner à l'hypothèse D; il est évident, au contraire, que toutes ces hypothèses ne sont que des conjectures également approximatives et tout à fait provisoires. Il est à peine utile d'ajouter que les équations de M. Zaremba, dans le cas où l'on adopterait l'hypothèse D, conduiraient à des résultats qui ne se distingueraient pas de ceux auxquels on arrive moyennant mes équations; ceci devient évident d'après ce qui a été dit aux §§ 2. et 3. de ce Travail.

§ 5. Proposons-nous de considérer, à titre d'exemple, le problème

l'on vient de lire se trouvent soit dans le § 5 de mon Mémoire, soit au début du § 6. M. Zaremba a négligé de dire, d'une façon précise, quelles sont les considérations auxquelles il fait allusion et pourquoi il se considère en droit de les appeler non justifiées; je n'ai pas à répondre à des paroles vagues qui n'expriment aucune idée tant soit peu définie et tangible.

A la page 402 de son Travail, M. Zaremba affirme que je n'ai pas expliqué clairement, dans mon Mémoire de 1901, ce que j'entends représenter par les symboles

$$\left(\frac{dp_{xx}}{dt}\right)_2, \quad \left(\frac{dp_{yz}}{dt}\right)_2 \text{ etc.}$$

J'ai dit, à la page 100 de mon Mémoire, que les variations $(d/dt)_2$ sont celles qui proviennent du phénomène de la relaxation. Si l'on se reporte à la page 386 du Mémoire de M. Zaremba, on verra qu'il définit les variations exprimées par le symbole d_2 comme les variations infiniment petites „dues à la relaxation“ qu'éprouvent les quantités variables correspondantes pendant l'élément de temps dt. Il n'y a aucune différence essentielle entre ces définitions.

dont M. Zaremba s'occupe dans son Mémoire „Sur un problème d'Hydrodynamique etc.", présenté, en même temps que le précédent, dans la séance du 8. Juin 1903 [1]). Nous nous placerons dans les mêmes hypothèses que celles qu'adopte M. Zaremba dans le Mémoire cité et nous en conserverons toutes les notations. Les deux premières équations du système (6), page 409, nous permettent d'écrire

$$(1)\qquad \begin{aligned}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)(p_{xx}+p_{yy}) &= \\ &= -2\mu(a_1+a_2)-\frac{p_{xx}+p_{yy}-2p}{T}-\frac{2(p_m-p)}{T'}.\end{aligned}$$

Je dis que le premier membre de cette équation est égal à zéro. En effet: on vérifie aisément. en s'appuyant sur les équations (17) et (18) du Mémoire dont il s'agit (pages 411 et 412) que la somme $p_{xx}+p_{yy}$ est égale identiquement à la quantité $P+H$, quantité qui est une fonction de la seule variable r. Cela étant, l'égalité (12), page 410, nous apprend que l'on a

$$(2)\qquad \left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)(p_{xx}+p_{yy})=\frac{q}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta}(p_{xx}+p_{yy})=0.$$

D'autre part, il résulte des hypothèses $w=0$ et $\tilde{\omega}=0$ qu'admet M. Zaremba (page 408) que l'on a

$$(3)\qquad a_1+a_2=0.$$

En vertu des équations (2) et (3) l'équation (1) devient

$$(4)\qquad \frac{\frac{1}{2}(p_{xx}+p_{yy})-p}{T}+\frac{p_m-p}{T'}=0.$$

A ce résultat comparons l'équation suivante qui fait partie du système (13) (page 410) du Mémoire de M. Zaremba:

$$(5)\qquad \frac{p_{zz}-p}{T}+\frac{p_m-p}{T'}=0;$$

nous aurons évidemment

$$(6)\qquad p_{zz}=\tfrac{1}{2}(p_{xx}+p_{yy})\quad \text{c'est-à-dire}\quad p_{zz}=p_m.$$

[1]) Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. Math. et Nat., Année 1903, p. 403. Je me réserve d'examiner de plus près les conclusions de ce Mémoire à une future occasion.

Portée dans l'équation (5) l'égalité $p_{zz} = p_m$ montre que l'on a

$$p_m - p = 0. \tag{7}$$

Dans ce cas, par conséquent, l'égalité (7) est une conséquence immédiate des équations que l'on trouve dans le Mémoire même de M. Zaremba.

§ 6. La théorie de M. Zaremba, ainsi que celle d'ailleurs que j'ai proposée moi-même, ne nécessite point l'introduction de coefficients de viscosité tels que ceux que l'on considère dans la Théorie Classique. Mais puisque l'on peut regarder la théorie exposée par M. Zaremba comme une généralisation de la Théorie Classique (ainsi qu'il le dit lui-même à la page 399) on est certainement en droit de s'attendre à trouver dans son Mémoire les relations qui existent entre les coefficients classiques et les constantes qu'il fait intervenir dans son exposé. C'est précisément le problème que se propose de résoudre M. Zaremba dans le passage des pages 398 et 399 qui débute en ces termes: „Voyons maintenant à quelles „équations-limites on arrive etc."; donc ce passage, dans le Mémoire de M. Zaremba, a une réelle importance. Malheureusement le raisonnement qui s'y trouve exposé est tout à fait incorrect; et le résultat auquel M. Zaremba y arrive est absolument inacceptable.

Voici le raisonnement que fait M. Zaremba à l'endroit indiqué. Il part des équations (28), page 395, de son Mémoire; il les multiplie par la constante T; la première équation du système (28) devient donc

$$T\frac{dp_{xx}}{dt} = -\lambda T\tilde{\omega} - 2\mu T a_1 - (p_{xx} - p) - \frac{T}{T'}(p_m - p). \tag{1}$$

M. Zaremba suppose que T tende vers zéro; il admet que dans ce cas le rapport T/T' tend aussi vers zéro, tandis que les produits λT et μT tendent vers les limites finies λ_0 et μ_0 non nécessairement nulles. Nous nous placerons évidemment dans les mêmes hypothèses. A la limite, l'équation (1) devra être remplacée, d'après M. Zaremba, par la suivante

$$0 = -\lambda_0\tilde{\omega} - 2\mu_0 a_1 - (p_{xx} - p). \tag{2}$$

„On voit", dit M. Zaremba, „que l'on retombe sur la théorie „classique de la viscosité". J'affirme que ce raisonnement est illu-

soire; l'omission du produit $T dp_{xx}/dt$ au premier membre de l'équation (2) n'est nullement justifiée.

Considérons la quantité dp_{xx}/dt; d'après l'hypothèse II de M. Zaremba, elle se compose des deux termes: $d_1 p_{xx}/dt$ et $d_2 p_{xx}/dt$; dans les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés, l'un et l'autre croît indéfiniment; c'est ce qu'indiquent les équations (21) et (26) de M. Zaremba. Admettre a priori et sans démonstration que, à la limite, la quantité dp_{xx}/dt reste finie, c'est évidemment se donner la proposition qu'il s'agissait de prouver [1]).

Considérons la quantité dp/dt; elle est donnée par l'équation (14) du § 2 qui, rappelons-le, se déduit des équations mêmes de M. Zaremba; on aura

$$T\frac{dp}{dt} = -(\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\, T\, \frac{d_1[\Theta^*]}{dt} \quad . \tag{3}$$

La quantité $d_1[\Theta^*]/dt$ est de l'ordre de $\tilde{\omega}$; il est évident qu'elle ne peut pas être constamment égale à zéro; par conséquent, lorsque T tend vers zéro et lorsque les produits λT et μT tendent, par hypothèse, vers les limites finies et non nulles λ_0 et μ_0, la quantité $T dp/dt$ tendra vers une limite qui, en général, sera différente de zéro. Ecrivons maintenant:

$$T\frac{dp_{xx}}{dt} = T\frac{d(p_{xx} - p)}{dt} + T\frac{dp}{dt}. \tag{4}$$

La limite de $T dp/dt$ étant différente de zéro, celle vers laquelle tend l'expression $T dp_{xx}/dt$ ne peut être égale à zéro que dans le cas où la limite de $T d(p_{xx} - p)/dt$ est différente de zéro. Or cela suppose que la quantité $d(p_{xx} - p)/dt$ devient infinie à la limite. On voit donc que la méthode de démonstration adoptée par M. Zaremba est assurément illégitime lorsque la valeur de $d(p_{xx} - p)/dt$ reste finie; elle ne pourrait s'appliquer que dans le cas où la déri-

[1]) Il est impossible de supposer que les composantes ε^*_i de la déformation du corps fictif (et par conséquent leur somme Θ^*) soient, à la limite, constamment égales à zéro; en effet, les quantités a_i et $\tilde{\omega}$ seraient alors égales à zéro d'après les équations de la page 394 (dernière ligne). Les équations (8) conduiront donc à des valeurs infinies pour les quantités p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}. On verra avec un peu d'attention que les équations de la page 394 (dernière ligne) et avec elles, la conception du corps fictif, doivent être abandonnées dans le cas-limite $T = 0$. Or les équations (28) ont été obtenues en s'appuyant sur ces équations.

vée précédente de la différence $(p_{xx}-p)$ croîtrait indéfiniment lorsque T tend vers zéro. J'ajoute que l'équation que M. Zaremba se propose de démontrer sert précisément au calcul de cette différence.

Les remarques précédentes pourraient suffire; considérons cependant, en guise d'exemple, un cas particulier. Supposons que, pour un fluide donné, l'hypothèse D du § 3 soit (rigoureusement ou approximativement) vérifiée. La démonstration donnée par M. Zaremba doit assurément s'appliquer dans le cas d'un pareil fluide. Pour simplifier, supposons qu'à une époque donnée t, la quantité a_1 ait la valeur particulière $\frac{1}{3}\tilde{\omega}$. Si l'on se reporte aux équations: (10) du § 3 et (3) de ce paragraphe, on se rendra compte aisément de la justesse de la remarque suivante: M. Zaremba conserve dans ses équations deux termes dont la valeur, à l'époque t, est

$$\lambda T\tilde{\omega} \quad \text{et} \quad \tfrac{2}{3}\mu T\tilde{\omega} \tag{5}$$

et (sans avoir admis entre λ et μ une relation quelconque) il omet, dans les mêmes équations, un terme dont la valeur peut fort bien (en adoptant l'hypothèse D) être (rigoureusement ou approximativement) la suivante

$$(\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\, T\tilde{\omega}. \tag{6}$$

Peut-être croira-t-on que la déduction, donnée par M. Zaremba, des équations (34) de son Mémoire pourrait être rendue correcte en admettant que la somme

$$\lambda + \tfrac{2}{3}\mu \tag{7}$$

reste finie à la limite $T=0$, malgré que les quantités λ et μ, prises isolément, tendent chacune à devenir infinies lorsque T tend vers zéro. Au point de vue où M. Zaremba s'est placé, rien ne justifie une pareille hypothèse. Si on l'admettait pourtant, on n'arriverait plus à la théorie à laquelle il s'agissait d'arriver; on serait amené à une théorie particulière, celle notamment qui a été proposée, en 1845, par Stokes et d'après laquelle il existe une relation déterminée entre les coefficients λ_0 et μ_0. En effet: les équations

$$\lambda_0 = \lambda T \quad \text{et} \quad \mu_0 = \mu T \tag{8}$$

données par M. Zaremba, entraînent alors la relation

$$\lambda_0 + \tfrac{2}{3}\mu_0 = 0\,; \tag{9}$$

c'est la relation que Stokes a proposée. L'hypothèse précédente est-elle admissible, dans les conditions où M. Zaremba s'est placé? Calculons la valeur σ que présenterait alors le rapport de Poisson pour le corps élastique fictif de M. Zaremba. Soit f la valeur de la somme $\lambda + \frac{2}{3}\mu$; d'après l'hypothèse adoptée cette valeur doit rester finie à la limite. Donc nous aurons

$$(10) \qquad \sigma = \operatorname{Lim}\left(\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right) = \operatorname{Lim}\left(\frac{\lambda}{3f-\lambda}\right) = -1;$$

une hypothèse qui aboutit à de pareils résultats est jugée.

La conclusion qui se dégage de la discussion précédente est que les résultats auxquels M. Zaremba est arrivé à la page 398 de son Mémoire ne peuvent pas se mettre d'accord avec la théorie de Stokes; or cette théorie n'est qu'une forme particulière de la Théorie Classique et elle est précisément celle qui est adoptée par la grande majorité des savants.

Voici maintenant quelle est la solution correcte du problème que s'est proposé M. Zaremba. Soient λ_0 et μ_0 les deux coefficients de viscosité que l'on considère dans la Théorie Classique. Ces coefficients sont liés, aux constantes de la Théorie de la Relaxation, par les formules suivantes que l'on trouve à la page 108 de mon Mémoire du 4. Février 1901:

$$(11) \qquad \mu_0 = nT; \quad \lambda_0 = (k - h - \tfrac{2}{3}n)\,T.$$

Les symboles k et n sont les constantes élastiques bien connues dont il a été question plus haut et h a la signification définie par l'équation (18) du § 2. Si, dans les équations (11), nous posons $k = h$, nous arrivons tout de suite à la relation (9); nous sommes donc ramenés à la même conclusion à laquelle nous sommes parvenus par une voie différente dans le § 3. de ce Travail, à savoir: que l'égalité $k = h$ dans nos notations, peut-être considérée comme l'expression la plus simple de l'hypothèse de Stokes.

Si l'on adopte les notations de M. Zaremba, la deuxième équation du système (11) s'écrira

$$(12) \qquad \lambda_0 = (\lambda - h)\,T;$$

en la comparant au résultat, trouvé par M. Zaremba,

$$(13) \qquad \lambda_0 = \lambda T$$

on voit bien que ce dernier est inacceptable.

Il n'y a rien de changé dans ces conclusions si l'on suppose que le rapport T/T' de M. Zaremba tende vers une limite finie et différente de zéro lorsque T tend vers zéro. Soit $3\varkappa$ cette limite; l'équation (13) dans ce cas, devra être remplacée par la suivante

$$\lambda_0 = \left(\lambda - \frac{\varkappa(3\lambda + 2\mu)}{1 + 3\varkappa}\right) T. \tag{14}$$

Cette valeur du coefficient λ_0 peut-elle vérifier la relation de Stokes? Supposons que la somme

$$\lambda - \frac{\varkappa(3\lambda + 2\mu)}{1 + 3\varkappa} + \tfrac{2}{3}\mu = f_1 \tag{15}$$

reste finie lorsque T tend vers zéro; la limite vers laquelle tend l'expression (14) précédente sera alors égale à la limite vers laquelle tend le produit $-\frac{2}{3}\mu T$. Calculons la limite vers laquelle tend, dans ces conditions, le rapport de Poisson. Nous aurons

$$\sigma = \operatorname{Lim}\left(\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\right) = \operatorname{Lim}\left(\frac{\lambda}{(1 + 3\varkappa)\,3f_1 - \lambda}\right) = -1; \tag{16}$$

on retombe ainsi sur les résultats précédents.

Dans les Mémoires cités dans l'introduction, je suppose que, pour les fluides de la Nature, le temps de relaxation T, sans être rigoureusement nul, est de très faible durée; je suppose aussi que les constantes k et n (qui caractérisent les propriétés élastiques non directement observables du fluide) sont très grandes, sans cependant être infinies. On voit que, au point de vue où je me suis placé, les équations (11) de ce paragraphe ont une réelle importance.

Pour terminer, je prierai le lecteur de se reporter à mon Mémoire „Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide „visqueux", présenté à l'Académie dans la séance du 7 Janvier 1902 (Bull. Int. pour 1902, p. 19). Il verra que le principe d'où M Zaremba est parti, dans son Mémoire du 8. Juin 1903, page 398, pour établir que la théorie classique doit être regardée comme un cas-limite de la Théorie de la Relaxation, est énoncé de la façon la plus explicite, à la page 28 du Mémoire que je viens de citer.

52. M. ED. de JANCZEWSKI m. t.. **Płciowość porzeczek.** *(La sexualité des Groseillers [Ribes L.]).*

Les groseillers cultivés pour leurs fruits dans nos jardins produisent des fleurs bisexuées, dont chacune peut donner naissance à un fruit. Les anthères contiennent un pollen parfait, composé de grains libres; l'ovaire renferme de nombreux ovules anatropes, bitegminés, avec sac embryonnaire occupant environ $^1/_3$—$^1/_4$ du nucelle et contenant les mêmes éléments que dans la plupart des angiospermes.

Notre *Ribes alpinum* se comporte tout autrement et ne donne des fruits que sur des pieds femelles, lorsque les mâles ne manquent pas dans le voisinage. Les fleurs femelles y sont, il est vrai, munies d'étamines; mais les anthères sont bien maigres, les loges entièrement vides et recouvertes uniquement par l'épiderme, sans couche fibreuse sous-jacente. Sauf le connectif, tout le reste du tissu se trouve dissous dans l'anthère adulte (fig. 1). Dans les fleurs mâles, c'est l'ovaire qui manque et se trouve remplacé par un pédoncule articulé avec le pédicelle, aussi mince que celui-ci et à peine un peu plus large tout près de la fleur. C'est en cet endroit que le pédoncule est creusé par un canal étroit, correspondant à la cavité ovarienne, mais ne renfermant ni ovules ni placentas. Le style et les stigmates, bien que développés, ne peuvent plus remplir leur fonction habituelle, et sont devenus superflus. Au point de vue physiologique, le *R. alpinum* est donc une plante dioïque, comme toutes les espèces rapportées au sous-genre *Berisia* [1]).

Fig. 1. *Ribes alpinum.* Coupe de l'anthère d'une fleur femelle. Gr. 57.

Nous ne connaissons aucune espèce de groseiller où le dimorphisme fonctionnel des fleurs soit plus accentué que dans le *R. alpinum.* Il l'est moins, ou bien moins, dans quelques autres *Berisia.* Ainsi, dans les fleurs mâles du *R. orientale*, le canal creusé dans le pédoncule est sensiblement plus large et muni de deux placentas, quoique bien rudimentaires encore. Dans celles du *R. fasciculatum,* le pédoncule devient légèrement pyriforme; sa cavité, nécessairement plus large, contient deux placentas distincts, portant

[1]) Janczewski. Essai d'une disposition naturelle des espèces dans le genre Ribes. Bull. de l'Acad. de Cracovie. Mai 1903.

chacun quelques ovules. Mais les ovules y sont bien petits et rudimentaires, semianatropes, sans trachées dans le funicule. Bien que le nucelle contienne une grande cellule, représentant le sac embryonnaire stérile, les téguments sont loin de l'envelopper assez complètement pour former un micropyle (fig. 2).

Le dimorphisme sexuel des fleurs dont nous venons de constater quelques degrés dans les *Berisia,* est bien moins apparent dans tous les groseillers de l'Amérique méridionale [1]) qui rentrent, sans aucune

Fig. 2. *Ribes fasciculatum.* Coupe de l'ovaire d'une fleur mâle. Gr. 38.

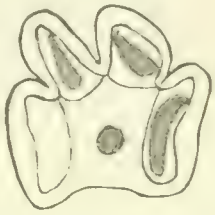


Fig. 3. *Ribes Gayanum.* Coupe de l'anthère d'une fleur femelle La languette est tombée de l'une des loges. Gr. 57.

exception, dans les sous-genres *Calobotrya* et *Coreosma.* C'est aussi la raison pour laquelle il a presque entièrement échappé jusqu'à présent à l'attention des phytographes et ne fut mentionné que par Spach, en 1835, pour les: *R. Gayanum, R. punctatum* et *R. alpinoides,* et, environ un demi-siècle plus tard, par M. R. A. Philippi pour son *R. Ahrendsi.* En effet, les fleurs de ces plantes peuvent avoir toutes les apparences des fleurs complètes, bisexuées. Dans les mâles, l'ovaire est presque aussi gros que dans les femelles, et peut contenir des ovules assez nombreux, quoique toujours stériles et rudimentaires; dans les femelles, les anthères, souvent maigres (fig. 3), peuvent être quelquefois aussi larges que hautes (*R. ecuadoriense* sp. n.) et avoir l'apparence d'anthères fertiles. Toutefois ces fleurs sont toujours dioïques, comme l'atteste l'analyse des plantes vivantes ou conservées en herbier.

Ainsi, dans les fleurs femelles l'ovaire est presque entièrement

[1]) Excepté le *R. floridum* de l'Amérique du Nord, trouvé aussi sur les hautes Andes de l'Equateur, et le *R. nigrum* de l'Europe et de l'Asie, récolté à Carrenleofú, dans la Rép. Argentine, en 1901, par M. Spegazzini.

rempli par les ovules (fig. 4 *a*); l'anthère contient, dans chacune des quatre loges, protégées par l'épiderme et la couche fibreuse, parfaitement constituée, une languette qui n'en remplit qu'une partie (fig. 3, 4 *b*) et ne ressemble pas du tout au pollen normal (fig. 4 *c*). Cette

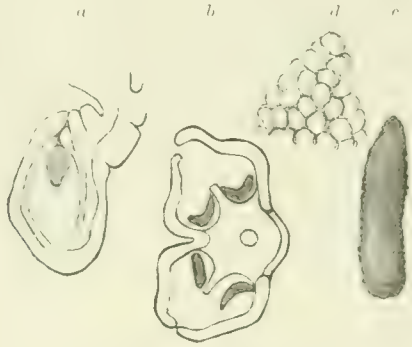


Fig. 4. *Ribes ecuadoriense.*
Fleur femelle: *a* = ovule; *b* = coupe de l'anthère; *c* = languette extraite d'une loge pollinique. Gr. 38. *d* = bout de cette languette gonflée dans l'hydrate de potasse Gr. 210.

languette est composée de cellules vides, intimement soudées, entièrement comprimées et simulant un tissu parenchymateux, si on

Fig. 5. *Ribes polyanthes.*
Coupe de l'ovaire d'une fleur mâle. Gr. 38.

la fait gonfler dans l'hydrate de potasse (fig. 4 *d*). Elle n'a rien de commun avec le pollen stérile des hybrides et semble représenter les cellules-mères du pollen, mortes avant de se dissocier.

Dans les fleurs mâles, l'ovaire est souvent vide dans sa moitié inférieure; dans la supérieure, les placentas produisent toujours des

ovules, plus ou moins nombreux et portés sur des funicules qui sont assez longs, quelquefois dépourvus de trachées, droits ou courbes. L'ovule lui-même est tantôt très petit (*R. polyanthes*), à nucelle dépourvu de sac embryonnaire, embrassé par le tégument jusqu'à la moitié, comme par une cupule (fig. 5); tantôt plus gros (*R. valdivianum, R. densiflorum, R. cucullatum*) avec sac embryonnaire stérile

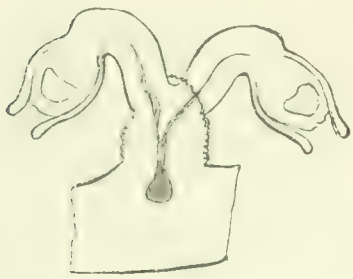


Fig. 6. *Ribes densiflorum.*
Ovules d'une fleur mâle. Gr. 37.

Fig. 7. *Ribes valdivianum.*
Ovule d'une fleur mâle. Gr. 57.

et rudimentaire, et avec tégument urcéolé, embrassant le nucelle. mais ne formant pas de micropyle (fig. 6, 7). Des ovules anatropes et bitegminés n'ont été trouvés que dans une seule espèce (*R. Lehmannii* sp. n.); elles y sont également stériles, avec tégument interne qui n'embrasse pas entièrement le nucelle, et tégument externe qui laisse une fente prolongée jusqu'au funicule et ne forme pas de micropyle normal[1]).

Quant au port de la plante même, nous ne savons pas si les pieds mâles sont plus robustes que les femelles. comme dans le *R. orientale,* car dans nos jardins on ne cultive pas les deux sexes de la même espèce et on n'y trouve en tout que six espèces exclu-

[1]) Nous venons de trouver des ovules de la même structure dans le *R. ambiguum* japonais, également dioïque, comme le montre l'examen d'échantillons plus complets. Cette espèce constitue. avec le *R. Davidii, R. Fargesii, R. Henryi* et *R. Maximowiczii,* que nous avons eu tort de rapporter autrefois aux *Berisia* et *Calobotrya,* un sous-genre probablement particulier, propre à la Chine centrale et au Japon. Malheureusement aucune de ces espèces ne se trouve dans nos cultures, et les échantillons d'herbier en sont fort rares et incomplets.

sivement chiliennes, presque toutes en pieds mâles. En ce qui concerne les grappes et les fleurs mâles, les premières sont en général plus longues que les grappes femelles, les fleurs mâles plus grandes et plus ouvertes que les fleurs femelles (*R. andicola* sp. n., *R. cucullatum, R. Gayanum*); quelquefois ces différences n'ont pu être constatées (*R. Lindeni* sp. n., *R. peruvianum* sp. n.). C'est justement la raison pour laquelle les botanistes voyageurs récoltaient, dans l'Amérique méridionale, les échantillons mâles plutôt que les femelles, et que les herbiers contiennent surtout des branches mâles, quelquefois des branches fructifiées, et exceptionnellement des branches femelles en fleurs. Avec des matériaux aussi incomplets, il est impossible de connaître les espèces australes d'une manière tant soit peu suffisante et de savoir si elles n'ont pas de tendances à la polygamie, comme nous le suggère l'exemple du *R. Gayanum*. Les pieds femelles de cette espèce, les seuls qui existent dans nos jardins, ont donné cette année, aux Barres, chez M. Maurice de Vilmorin, quelques fruits avec graines bien développées; il est donc juste de supposer que quelques fleurs bisexuées se sont trouvées parmi les fleurs femelles et ont donné lieu à une fécondation normale.

Dans ce qui précède, nous avons constaté que tous les groseillers, habitant l'Amérique du Sud sont bien réellement dioïques. Ceux de l'Amérique du Nord sont au contraire tous bisexués, soit qu'il appartiennent à d'autres sous-genres: *Grossularia, Grossularioides* et *Ribesia*, soit qu'ils rentrent dans les mêmes sous-genres, *Calobotrya* et *Coreosma*, qui sont les seuls représentés dans l'hémisphère austral. Il semble donc que l'isthme de Panama constitue une limite naturelle entre les habitats d'espèces qui, très voisines sous tous les autres rapports, diffèrent cependant en ce que la fécondité des organes sexuels est complète chez les septentrionales et partielle chez les australes.

---

53. MM. J. KOWALSKI et B. ZDANOWSKI. **Nowa metoda oznaczania oporów elektrycznych płynów i kilka jej zastosowań.** ***(Nouvelle méthode pour la mesure des résistances électrolytiques liquides et plusieurs de ses applications).*** Mémoire présenté par M. A. Witkowski m. t.

L'excellent ouvrage de MM. Kohlrausch et Holborn: „Leitvermögen der Elektrolyte insbesondere der Lösungen[1])" contient un aperçu complet des méthodes pour la mesure de conductibilité électrique des électrolytes. Nous y trouvons que, si pour les mesures des résistances relativement petites, celles qui ne dépassent pas 100.000 ohms, on connaît des méthodes faciles et très exactes, il n'en est pas ainsi pour les mesures des résistances plus élevées. Si on veut atteindre une exactitude suffisante, il faut sacrifier beaucoup de temps et beaucoup de travail.

Les difficultés deviennent de plus en plus grandes à mesure que les résistances augmentent; et comme le dit M. Kohlrausch en parlant de celle de ces méthodes qui est la plus exacte et la plus ingénieuse, ces difficultés sont presque insurmontables, s'il s'agit de mesurer les résistances supérieures à 10^6 ohms[2]).

Pour combler cette lacune qui existait dans l'ensemble des mesures électriques, nous nous sommes proposés de rechercher une méthode qui fût facile à appliquer et très exacte en même temps. Pour y arriver, nous avons modifié la méthode proposée par Siemens pour l'étude de la résistance des câbles électriques, méthode dite „du condensateur", de façon à ce qu'elle puisse donner des résultats exacts en l'appliquant à la mesure de la conductibilité électrique.

Nous chargeons un condensateur d'une capacité C à travers une résistance $R + W$, où R est une résistance connue purement ohmique; et W la résistance électrolytique cherchée. Le temps de charge peut être réglé très exactement au moyen d'un pendule de Helmholtz. Après la charge, nous déchargeons le condensateur à travers un galvanomètre balistique et nous trouvons ainsi le potentiel E_t auquel le condensateur était chargé. Connaissant la force électromotrice E_0 que nous avons employée pour charger notre con-

[1]) Leipzig 1898, chez B. G. Teubner.

[2]) F. Kohlrausch „Über Widerstandsbestimmungen von Elektrolyten mit konstantem, oder mit Wechselstrom. Z. f. ph. Ch. XV, p. 126.

densateur, nous pouvons en déduire la résistance W en nous appuyant sur la formule

$$(1) \qquad R + W = \frac{t \log e}{C\{\log E_0 - \log (E_0 - E_t)\}}$$

Cette formule n'est exacte que dans le cas où l'influence de la polarisation et de la capacité électrostatique des électrodes entre lesquelles nous mesurons la résistance du liquide peut être négligée.

Le calcul montre que ces conditions sont remplies dans le cas où les rapports $\frac{C}{k}$ et $\frac{C_1}{C}$ sont petits par rapport à l'unité et quand la résistance de passage ΔW est petite par rapport à la résistance mesurée. Dans cet énoncé, nous désignons par k la capacité dite de polarisation des électrodes et par C_1 leur capacité électrostatique. Nous avons choisi nos dispositions expérimentales de façon que ces conditions soient remplies.

Une étude de la conductibilité de l'alcool éthylique et de l'eau nous ont démontré que les mesures pouvaient se faire avec une approximation allant jusqu'à 0,3%. La méthode est très facile en pratique, les mesures peuvent s'exécuter très rapidement. Nous avons appliqué cette méthode à deux études différentes: dans la première, nous nous sommes proposés de nous assurer si la loi d'Ostwald pouvait être appliquée aux dissolutions de l'acide trichloracétique dans de l'alcool éthylique. Les expériences ont donné une réponse affirmative: il était possible alors de calculer, pour la première fois par une méthode électrique, la valeur d'une constante de dissociation, dans un liquide autre que l'eau, pris comme dissolvant. Cette valeur pour l'acide trichloracétique dissous dans l'alcool éthylique est:

$$K = 7.\ 1.\ 10^{-5}.$$

Dans la seconde étude, nous nous occupons de l'influence qu'exerce sur la conductibilité d'une dissolution, l'addition à cette dissolution, d'un corps nonélectrolyte. En particulier, l'étude des dissolutions de l'alcool trichloracétique dans des mélanges d'alcool éthylique et de benzine, nous a permis de vérifier la loi d'Arrhenius

$$K = K_0 \left(1 - \frac{a}{2} X\right)^2$$

pour des mélanges à hautes teneurs du corps non-conducteur.

54. MM. J. HETPER et L. MARCHLEWSKI m. t. **Studya nad barwikiem krwi, I.** ***(Studies on the blood colouring matter, 1st preliminary note).*** *(Recherches sur la matière colorante du sang).*

The authors studied the corelation of so called β-haemin of Moerner and acethaemin, described by Nencki and Zaleski. The latter authors ascribed to acethaemin the formula $C_{34}H_{33}O_4N_4FeCl$ and consider Moerners haemin to be an ethylaether of acethaemin. This conclusion has been opposed by W. Küster who believes β-haemin to be a haemin sui generis. According to the latest researches by Zaleski, „acethaemin" is a misnomer, and the substance known under this name must be considered as the first coloured product, produced from haemoglobin under the influence of hydrolytical agents. Under these conditions it was necessary to clear up, if possible, the real corelation of the two substances named. We propose to communicate in this preliminary note the results we have obtained hitherto, and we hope to be able to return to the subject on a further occasion.

Based upon a series of experiments, of which only a few will be named here, we arrived at the conclusion that the composition of Moerners haemin depends in a considerable degree on the physical conditions, under which the experiments are carried out, and that, in most cases, this haemin contains only very little of ethoxyl groups, although it is never quite free from them. In other words, we find that firstly, the view advanced by Nencki and Zaleski concerning Moerners haemin cannot be applied in general, although we deem it quite possible that under certain conditions one may obtain a product that will contain as much as 6·6% OC_2H_5 in form of ethoxyl groups, and secondly that Küsters contention cannot be upheld. In our opinion Moerners haemin is a mixture of acethaemin with greater or smaller quantities of its ethers, a view based upon the fact that it is possible to obtain acethaemin from Moerners haemin.

Acethaemin. 1 L. of glacial acetic acid, saturated with sodium chloride, was heated to 95° and added to this 200cm³ of blood (free from fibroine); the mixture was heated up again to 95° and left to cool and crystallize. We obtained well developed crystals corresponding exactly to the description given by Nencki and Zaleski The crystals were recrystallized according to Schalfiejew's method, and gave on being analyzed the following results: C: 62·35%,

62·65%, 62·34%. N: 8·20%, 8·76%, 8·57%. Fe: 8·80%, OC_2H_5 traces.

Moerners haemin. I^t preparation. $1^1/_2$ liters of water were heated to 95°, acidulated by adding 50cm³ 1% solution of H_2SO_4, and mixed with 500cm³ of blood. The precipitate was filtered off in a filter press, mixed with 250cm³ of alcohol and pressed again. The purified precipitate was next mixed with 800cm³ of alcohol to which 8cm³ of conc. sulphuric acid were added, stired for an hour and filtered. The filtrate heated to the boil, 4cm³ of 25% hydrochloric acid added, and left to crystallize. The crystals obtained were not well developed, they possessed the shape of needles; uncrystallized matter was also present. The analysis gave: 63·34, 63·10, 63·79% C, 8·19%, 8·54% N and 1·72, 1·81% OC_2H_5.

Second preparation. The procedure differed from the foregoing in as much, as the addition of hydrochloric acid took place in the cold and the liquors left to crystallize at a temperature of 25°. In this manner nearly rectangular plates were obtained which, on being analyzed, gave 63·21%, 63·28% C; 8·69% N 8·70% N, 1·06% OC_2H_5, 1·13% OC_2H_5.

Third preparation. The treatment with hydrochloric acid took place this time at a still lower temperature namely at 14°, and the solution left at this temperature for 24 hours. The precipitate obtained has been amorphous and could not be crystallized either from acetic acid or alcohol.

The fourth preparation was obtained similarly to the second, but the treatment with hydrochloric acid took place at the temperature of the boil and kept at it for $1^1/_2$ hours. The substance obtained was amorphous and gave on being analyzed 64·76% C, 7·54% N, 3·61% OC_2H_5.

The fifth preparation, was obtained like the second, but the treating with hydrochloric acid took place at 50°. Well developed crystals were this time obtained, which resembled those of the second preparation, and did not appreciatly alter, even at the boil, by hydrochloric acid. The crystals were next recrystallized using a method similar to that of Schalfejew, but with the difference, that instead of quinine, dilute ammonia, and instead of chloroform water had been used, (4 gr. haemin, 5cm³ ammonia and 200cm³ H_2O). The solution has been filtered quickly and poured into boiling acetic acid, which had been previously saturated with sodium chlo-

ride. The crystals obtained resembled in every respect acethaemin and contained 62·94% C, 8·12%, 8·62% N and 0·3% OC_2H_5.

The conversion of Moerners haemin into acethaemin may be carried out just as easily, if not easier, using the corresponding bromine compound.

Sixth preparation. 2·5 liters of an alcoholic solution of haemin, prepared similarly as in the case of the first preparation, were treated with a 10% solution of hydrobromic acid, in the following manner:

a) ½ litre of the solution was treated at once with 15cm³ of the hydrobromic acid named, and left to stand to crystallize. The crystals obtained varied in character, predominantly flat prisms were found. A determination of ethoxylgroups gave 2·25% OC_2H_5,

b) the remaining 2 litres were heated to 50° and treated with 50cm³ of hydrobromic acid of 10%. This time crystals were obtained in the shape of marbles, which contained 6·00% OC_2H_5.

c) the mother liquor from b, containing still a considerable amount of colouring matter, was treated with hydrochloric acid. After standing for some time, there were deposited crystals in the shape of marbles and needles, which were dissolved in 400cm³ of alcohol, hydrochloric acid added, and the mixture kept at the boil for some time. After cooling crystals were deposited in the shape of marbles, although not well developed. They contained, according to a determination of ethoxylic groups — 8·9% OC_2H_5.

Seventh preparation. 2 gr. of the preparation VI b, were dissolved in 100cm³ of chloroform, two gramms of quinine added, and the solution obtained poured into 500cm³, of glacial acetic acid, saturated with potassium bromide. After cooling splendidly developed crystals were formed, resembling in every particular those of ordinary acethaemin; they contained however a small amount of chlorine, a fact which explains sufficiently the somewhat high amount of carbon found in them, namely 59·66% C. They were also not quite free from ethoxylic groups (found 0·89%), but there cannot be any doubt that another recrystallisation, which could not be carried out for want of a sufficient quantity of the substance, would have lead to a product quite free from an admixture of acethaemin-ethers.

It is highly probable that acethaemin is the first coloured decomposition product of haemoglobin, that this name cannot in

any way imply the presence of an acetylic group in this body, a view which has also been accepted by Zaleski. In view of the great difficulty of proving such a contention we endeavoured to prepare a substance according to a method, similar to the one leading to acethaemin. in which however acetic acid was substituted by propionic acid. We obtained in this manner a substance resembling in every respect acethaemin. We propose in our next communication to give a detailed description of this body and its composition.

---

55. M. K. WÓJCIK. **Dolno-oligoceńska fauna Kruhela małego pod Przemyślem. [Warstwy z Clavulina Szabói]. I. Otwornice i mięczaki.** ***(Die unteroligocäne Fauna von Kruhel mały bei Przemyśl. [Die Clavulina Szabóischichten]. I. Teil Die Foraminiferen und Mollusken).*** *(La faune infraoligocène de Kruhel mały près de Przemyśl. [Couches de Clavulina Szabói] I. Les Foraminifères et les Mollusques).* Mémoire présenté par M. L. Szajnocha m. c.

(Planche XVII).

In einem kleinen Bachtale in Kruhel mały bei Przemyśl am nördlichen Rande des mittelkarpatischen Zuges befinden sich zwischen den weissen in dieser Gegend sich sehr weit erstreckenden Mergelschiefern dunkle Ton- oder Sandmergeschiefer, in welchen in beiden letzten Jahren vom Verfasser eine reiche und ziemlich gut erhaltene Fauna gefunden worden ist.

Diese mit grosser Mühe grösstenteils aus den in den Schiefern steckenden Sandsteinkonkretionen herauspräparierte Fauna repräsentiert fast alle Gruppen, von denen am zahlreichsten (in 110 bestimmten Arten) die Foraminiferen vorkommen. Den Foraminiferen folgen kleine Mollusken (60 bestimmte Arten). Die Korallen kommen nur in einigen Arten vor und die nur generisch bestimmbaren Bryozöen repräsentieren ebenfalls nur einige Formen. Zu diesen mannigfaltigen Typen kommen noch Stacheln und Plättchen von Echiniden und schliesslich Otolithen und Fischzähne hinzu.

Die Bearbeitung erfolgte im geologischen Universitätsinstitute in Krakau unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. L. Szajnocha.

Es wurden folgende Arten bestimmt:

Foraminifera.

Lagena apiculata Reuss s.[1]), — *L. laevis* Montagu s. s. — *Nodosaria latejugata* Gümbel. s. s., — *N. filiformis* d'Orb. h., — *N. consobrina* d'Orb. s. h., — *N. cf. plebeia* Reuss s., — *N. soluta* Reuss s., — *N. bifurcata* d'Orb. s. s., — *N. obliqua* L. s. s., — *N. fissicostata* Gümb. s. s., — *N. acuminata* Hantk. s. s., — *N. Paueri* Gümb. s. s., — *N. cf. Marcki* Reuss s. s., — *N. raphanistrum* L. h., — *N. sp. ind.* s. s., — *Glaudulina laevigata* d'Orb. s.. — *G. mutabilis* Reuss s. s., — *Bigenerina capreolus* d'Orb. h., — *B. pennatula* Batsch. s., — *Textularia carinata* d'Orb. s. s. — *cf. Spiroplecta brevis* Grzyb. s. s., — *Clavulina Szabói* Hantk. h., — *C. Szabói v. kruhelensis* n. v. h., — *C. communis* d'Orb. s. h.. — *C. cylindrica* Hantk. h., — *C. variabilis* Schwag. s. s., — *C. subparisiensis* Grzyb. s. s., — *Gaudryina Reussi* Hantk. s. s., — *Verneuilina pygmea* Egger. s. s., — *Bulimina pyrula* d'Orb. s., — *B. pupoides* d'Orb. s., — *Polymorphina gibba* d'Orb. s. s.. — *P. ovata* d'Orb. s. s.. — *P. problema* d'Orb. h., — *P. austriaca* d'Orb. s.. — *P. cf. communis* d'Orb. s., — *P. acuta* Hantk. s. h., — *Uvigerina pygmea* d'Orb. s. s., — *Flabellina cf. budensis* Hantk. s. s., — *Lingulina cf. glabra* Hantk. s. s., — *Cristellaria Wetherelli* Jones. h., — *C. gladius* Reuss s. h., — *C. cf. crepidula* F. u. M. s. s., — *C. italica* Defrance s. s., — *C. budensis* Hantk. s. s., — *C. depauperata* Reuss h., — *C. deformis* Reuss s., — *C. prominula* Reuss s. s., — *C. nitida* Reuss s. s., — *C. similis* d'Orb. s. s., — *C. limbosa* Reuss s. s., — *C. cultrata* Montfort. s. s., — *C. mammilligera* Karrer. s. s., — *C. granulata* Hantk. h., — *C. granulataeformis. sp.* h., — *C. radiata* Bornem. s. s. — *C. princeps* Reuss s., — *C. Kubinyi* Hantk. s. s., — *C. insignis* Reuss s. h., *C. arcuato-striata* Hantk. s. s., — *C. clypeiformis* d'Orb. s., — *C. intermedia* d'Orb. s. s., — *C. inornata* d'Orb. s. s. — *C. articulata* Reuss s. s., — *C. confusa* Segu. s. s., — *C. semiimpressa* Reuss s. s., — *C.* sp. s. s., — *C. Kubinyiformis* n. sp. s. s., — *C. pterodiscoidea* Gümb. s., — *C. galeata* Reuss h., — *Marginulina pediformis* Bornem. s. s., — *Cornuspira involvens* Reuss s., — *Miliolina (Quinqueloculina) seminulum* L. s. s., — *M. oblonga* d'Orb. s., — *M. cf. triangularis* d'Orb. h., — *M. venusta* Karrer. h., — *M. auberiana* d'Orb. s. s., — *M. cuvieriana* d'Orb. s. h., — *M. longirostra* d'Orb. s., —

[1]) s. s. = sehr selten = 1—2, s. = selten = 3—5, h, = häufig = 6—10, s. h. = sehr häufig = 11—000.

M. magna n. sp. s. s., — *M. (Triloculina) tumida* Terq. s. s., — *M. circularis* Born. s. s., — *M.* sp. s. s., — *Biloculina ringens* Lam., h. — *B. ringens v. turgida* Rss., s. s. — *B. inornata* d'Orb., s. s. — *B. paradoxa* n. sp., s. h. — *Allomorphina macrostoma* Karrer. h., — *Haplophragmium cf. tuba* Reuss. s. s., — *Sphaeroidina bulloides* d'Orb. s., — *Pulvinulina elegans* d'Orb. s. h., — *Rotalia Soldanii* d'Orb. s. h., — *R. cf. nitidula* Schwag. s., — *R.* sp. s. h., — *R. orbicularis* Terq. s. h., — *Discorbina rugosa* d'Orb. s., — *D. Bertheloti* d'Orb. s. s., — *D. pusilla* Uhlig. s. s., — *Truncatulina Dütemplei* d'Orb. s. s., — *T. propinqua* Reuss h., — *T. Wüllerstorfi* Schwag. h., — *T. costata* Hantk. s. s., — *Globigerina bulloides* d'Orb. s. s., — *G. bulloides* var. *triloba* Reuss. s., — *G. helicina* d'Orb. s. s., — *Nummulites Boucheri* de la Harpe. h., — *N. cf. semicostata* Kaufm. s., — *N. budensis* Hantk. s. h., *Orbitoides tenuicostata* Gümb. s. s.

Lamellibranchiata.

Pecten pictus Gldf. s., — *Nuculella lamellosa* K. s. s., — *Limopsis retifera* Semp. s. s., — *L. striata* Renault. h., — *Astarte pygmea* Münster. s. s., — *Lutetia ovalis* K. s. s., — *Lucina gracilis* K. s. s

Scaphopoda.

Dentalium acutum Hébert. s. s., — *D. exiguum* K. s. s., — *D. tenuicinctum* K. s., — *D. decagonum* K. s. s., — *D. perfragile* K. s. s., — *Cadulus cucumis* K. s. s.

Gastropoda.

Discohelix Grzybowskii n. sp. s. h., — *Tinostoma solidum* K. h., — *Trochus Kickxii* Nyst. s. s., — *Lacuna ovalina* K. s. s., — *Natica Pasinii* Bayan. s. s., — *N. lacunoides* K. s. s., — *Rissoa obtusa* K. s. s., — *R. Düboisi* Nyst. s. s., — *Turritella infundibulum* K. s. — *Vermetus crassus* K. h., — *V. cellulosus* K. s. s., — *Turbonilla incisa* K. s. s., — *T. spelta* K. s. s., — *T. impressa* K. s. s., — *Syrnola lanceolata* K. s. s., — *Eulima Neumanni* K. s. s., — *E. microstoma* K. s. s., — *Cerithium breve* Fuchs. s. s., — *C. Rauffi* Oppenh. s. s., — *Cassidaria cf. elongata* K. s. s., — *Marginella perovalis* K. s. s., — *M. globulosa* K. s. s., — *M. conoides* K. s. s., — *M. bifido-plicata* Charlesworth. s., — *M. obtusa* Fuchs. h., — *Mitra laevi-*

gata Phil. s. s., — *Ancillaria canalis* K. s. s., — *A. obovata* K. s. s., — *Cancellaria subcylindrica* K. s. s., — *Pleurotoma plebeia* Fuchs. s. s., — *P. praepustulata* Vin. de Regny. s. s., — *Drillia aberrans* K. s. s., — *Clavatula Strombecki* K. s. s., — *Borsonia pentagona* Vin. de Regny. s. s., — *B. pyrenaica* Renault. s. s., — *Ringicula gracilis* Sandb. s. s., — *R. aperta* K. s. s., — *R. marginata* K. s. s., — *Tornatella cf. simulata* Selander s. s., — *T. cf. curta* K. s. s., — *T. punctato-sulcata* Phil. s. s., — *T. regularis* K. s. s., — *Solidula plicatula* K. s. s., — *Cylichna bicamerata* K. s. s., — *C. interstincta* K. s. s., — *C. cf. intermissa* K. s. s.

Cephalopoda.

Spirulirostra Szajnochae n. sp. s. s.

Vom paläontologischen Standpunkte aus verdienen von dieser Fauna eine ausführlichere Berücksichtigung zwei neue Spezies, und zwar ein Gastropode *Discohelix Grzybowskii*, Taf. XVII. Fig. 27 und ein Cephalopode *Spirulirostra Szajnochae*. Taf. XVII. Fig. 32.

Aus der Familie Euomphalidae aus der ursprünglich für mesozoische Gastropoden geschaffenen Gattung Discohelix sind meines Wissens in tertiären Ablagerungen bis jetzt nur 3 Spezies bekannt. Diese sind: *Orbis semiclathratus* Speyer[1]. *O. rotella* Lea[2]) und *Discohelix Beyrichi* Oppenheim[3]). Die unsrige Form stellt also den vierten Vertreter dieser Gattung vor.

Die Schale ist rund, aus 4 sehr langsam an Breite zunehmenden Umgängen zusammengesetzt, welche durch eine deutliche Naht getrennt werden. Oben ist sie fast vollständig eben, unten stark konkav. Die Umgänge sind inwendig rund, von aussen viereckig, und zwar ausser den beiden oberen und unteren scharfen Rändern noch mit einem scharfen, den ganzen Umgang entlang laufenden, leistenförmigen Vorsprunge versehen. Zwischen diesem Vorsprunge und dem oberen Randkiele ist die Schale schwach vertieft, mehr

[1]) Speyer: Die Conchylien der Casseler Tertiärbildungen. Palaeontographica XVI. p. 331, t. XXXIV. f. 9.

[2]) Cossmann: Notes complémentaire sur la faune éocénique de l'Alabana. Annales de Géologie et Paléontologie. XII. Palerme 1893.

[3]) Oppenheim: Das Alttertiär d. Colli Berici in Venetien, die Stellung d. Schichten v, Priabona u. die oligocäne Transgression im alpinen Europa. Z. d. D. G. G. XLVIII. 1896.

aber zwischen den beiden Rändern. Der letzte Umgang besitzt unweit der Mündung eine starke, kragenförmige Verdickung.

Die Form von Kruhel nähert sich dem Oppenheimschen Discohelix Beyrichi von Zovencedo, unterscheidet sich jedoch von ihm durch das Vorhandensein der kragenförmigen Verdickung der Schale, durch die Grösse und durch den Verlauf des oberen leistenförmigen Vorsprunges.

Der erste Unterschied folgt vielleicht daraus, dass die Exemplare Oppenheims, was man aus der Abbildung schliessen darf, beschädigt waren, der andere die Grösse betreffende ist nicht so leicht erklärbar. Die Art Oppenheims besitzt beim Durchmesser von 10 *mm* kaum 6 Umgänge, während unsere Exemplare beim Durchmesser von 1—2·5 *mm* 4—5 Umgänge zählen. Sie können also im Vergleiche mit jenen von Oppenheim nicht jugendlich sein, was auch daraus folgt, dass 11 komplete Exemplare und viele Bruchstücke gefunden waren und kein einziges grösser als 2·5 *mm* ist. Der leistenförmige Vorsprung schliesslich läuft bei Discohelix Beyrichi näher dem Rande, so dass das Feld zwischen ihm und dem Rande weniger als den dritten Teil der ganzen Oberfläche des Umganges, bei unseren Form dagegen fast die Hälfte derselben bildet.

Die andere Form ist Spirulirostra Szajnochae.

Es sind bis jetzt 2 Arten der Gattung Spirulirostra beschrieben worden: *Sp. Bellardi* d'Orb. und *Sp. Hoernesi* Koen. Unsere Art ist die dritte.

Sie ist zwar ziemlich ähnlich der von Koenen beschriebenen Form [1]), es sind jedoch auch grosse Unterschiede vorhanden und diese scheinen mir hinreichend zu sein, um daraus eine neue Art zu bilden.

Leider ist bei unserer Form nur das Rostrum, dieses aber vorzüglich erhalten; der Rest ist nicht vorhanden. Im allgemeinen ist die Form, wie gesagt, der Art von Koenen ähnlich. Der Unterschied besteht darin, dass die Zusammenpressung an den Seiten unseres Exemplars nicht bis ans Ende des Rostrums reicht, sondern etwa nur bis $^2/_3$ nach oben. Der untere Teil des Rostrums ist zylindrisch und zeigt an jener Stelle, von welcher angefangen es den Phragmokon nicht umgab, keine nasenförmige Erhebung wie bei Sp. Hoernesi, sondern im Gegenteil es ist da eine Einbiegung ge-

[1]) Palaeontographica XVI. p. 145, t. XIV. f. 6.

gen die Mitte. Von dieser Stelle aus erstreckt sich die Medianlinie in Form eines ziemlich tiefen, aber schmalen Schlitzes.

Die Oberfläche ist nicht glatt, besonders nicht an der Rückenseite, d. i. an jener Fläche, welche von den seitlichen Einengungen begrenzt wird und an der Ventralseite im unteren Teile vom Rostrum. In der Alveole kann man 7 horizontale Streifen, die die Anzahl der Kammern bezeichnen, deutlich erkennen. Das abgebrochene Ende des Rostrums lässt die strahlige Struktur deutlich erkennen.

Unter den Foraminiferen sind 7 Arten neu, deren Beschreibung folgt.

Cristellaria granulataeformis n. sp. Taf. XVII. Fig. 5.

Das Gehäuse ist gross, zusammengedrückt und mit einem ziemlich breiten Flügelsaume versehen. Der letzte Umgang besitzt 10 — 16 durch lineare Nähte geschiedene Kammern. Die Nähte sind entweder gar nicht gekörnelt oder nur in der Mitte, oder aber zum grössten Teile und dann ist unsere Form der Crist. mammilligera und Crist. granulata ähnlich und bildet vielleicht den Übergang von den gekörnelten zu den von Körnern freien Formen.

Durchmesser 1·5—3·5 *mm.*

Häufig.

Cristellaria Kubinyiformis n. sp. Taf. XVII. Fig. 10.

Das zusammengedrückte Gehäuse besteht aus 7 durch vertiefte Nähte geschiedenen Kammern. Die letzte Kammer besitzt die gestrahlte Öffnung. Der Rand ist mit einem ziemlich breiten Kiele versehen. Von der Cr. Kubinyi unterscheidet sich unsere Form durch die kleinere Anzahl der Kammern und durch die weniger bedeutende Zusammendrückung.

Durchmesser 1 *mm.*

Sehr selten.

Cristellaria sp. Taf. XVII. Fig. 9.

Das Gehäuse ist kreisförmig, aufgewölbt, besteht aus 5 grossen fast dreieckigen Kammern, welche durch lineare Näthe geschieden werden. Die Nabelgegend ist etwas dunkler angedeutet. Die Mündung gestrahlt.

Durchmesser 1·5 *mm.*

Sehr selten.

Miliolina (Quinqueloculina) magna n. sp. Taf. XVIII. f. 11.

Die Schale oval, hinten etwas verschmälert. Die sehr aufge-

wölbten Kammern sind durch undeutliche Nähte geschieden. Der Rand abgerundet. Die Öffnung quer spaltförmig.

Länge 1·5. Breite 1·2. Dicke 0·9 *mm.*

Sehr selten.

Miliolina (Triloculina) sp. Taf. XVII. Fig. 14.

Die Schale oval, dreieckig, glatt. Der Rand nicht sehr scharfkantig. Die Nähte deutlich. Die Mündung rundlich mit einem grossen Zahne versehen.

L. 0·8. B. 0·5. D. 0·3 *mm.*

Sehr selten.

Biloculina paradoxa n. sp. Taf. XVII. Fig. 19.

Das ovale Gehäuse besteht aus sehr gewölbten Kammern, die durch tiefe Nähte geschieden werden. Bei manchen Exemplaren bedecken die letzten Kammern die älteren nicht vollständig, so dass an der Stelle, wo die äusseren Kammern zusammentreffen, eine innere herausragt. Die Öffnung oval mit zweizackigem Zahne.

L. 0·6. D. 0·3 *mm.*

Häufig.

Rotalia sp. Taf. XVII. Fig. 15.

Die ovale oder kugelförmige Schale ist beiderseits etwas abgeflacht, auf der Spiralseite jedoch mehr als auf der Nabelseite. Auf der Spiralseite sind zwei Umgänge undeutlich zu sehen, auf der Nabelseite nur ein einziger. Die Mündung breit von dem Nabel bis zu dem Rande reichend.

Durchmesser 0·8—1·2. Dicke 0·3 *mm.*

Häufig.

Was nun die stratigraphische Altersbestimmung anbelangt, so zeigen unsere Foraminiferen die grösste Verwandtschaft mit der unteroligocänen, aus dem Clavulina Szabóihorizonte der Gegend von Ofen von Hantken bearbeiteten und mit mancher anderen südalpinen und der euganeischen analogen Foraminiferenfauna. Mit der Fauna von Ofen besitzt die unsrige 49 gemeinsame Formen, mit den auch von Hantken bearbeiteten Faunen von Euganeen 20, von den Meeralpen 16, von den oberitalienischen Alpen 18, mit der von Liebus und Oppenheim bearbeiteten Fauna von Priabona 26 und mit der von Schubert von Val di Non im südlichen Tirol 15.

Von den karpatischen Foraminiferenfaunen kann man eine Verwandtschaft nur in der von Uhlig bearbeiteten Fauna von Wola łużańska und mit den von Grzybowski bearbeiteten Faunen von

Dukla und Krosno finden. Mit der von Wola łużańska besitzt unsere Fauna 11, mit der von Dukla 13 und mit der von Krosno 12 gemeinsame Formen.

Im ganzen besitzt also mit allen diesen auf ein Alter hinweisenden Faunen die Fauna von Kruhel 55 auf 110, also 50% gemeinsame Formen, dazwischen einige, die ausschliesslich nur aus dem Unteroligocän bekannt sind, und zwar: *Clavulina Szabói*, — *Gaudryina Reussi*, — *Cristellaria granulata*, — *C. princeps*, — *C. Kubinyi*, — *C. arcuato-striata*, — *Truncatulina costata*, — *Nummulites budensis*, — *N. Boucheri*, — *Orbitoides tenuicostata*.

Ausser diesen gehören hierzu noch andere, die zwar auch aus anderen Horizonten bekannt sind, für das Unteroligocän aber charakteristisch sind, und zwar: *Clavulina cylindrica*, — *C. communis*, — *Flabellina budensis*, — *Lingulina glabra*, — *Nodosaria fissicostata*, — *N. bifurcata*, — *N. gladius*, — *N. crepidula* (*arcuata* Phil.), — *N. Wetherelli* (*fragaria* Gumb.) und andere.

Wenn wir für stratigraphische Zwecke jetzt die Mollusken gebrauchen, so sehen wir, dass die in Rede stehende auf 60 Arten mit der norddeutschen unteroligocänen von Könen bearbeiteten Fauna 46 gemeinsame Formen besitzt. Von den 14 übrig bleibenden sind noch 8 Formen mit den vicentinischen von Fuchs und Oppenheim bearbeiteten und eine d. i. Cassidaria cf. elongata mit der ungarischen in den Clavulina Szabóischichten von Hantken gefundenen, die zwar nicht publiziert wurde, die sich aber im geologischen Universitätsmuseum in Budapest befindet, gemeinsam. Im ganzen besitzt also die Fauna von Kruhel 55 auf 60 also 92% unteroligocäne Formen. Drei sind eocäne und zwei neue Formen.

Um die Verwandtschaftsverhältnisse zwischen der Fauna von Kruhel und den anderen unteroligocänen ersichtlich zu machen, wollen wir eine tabellarische Zusammenstellung derselben beifügen.

	Norddeutschland			Vicentinisches				Südrussland				Anmerkung.
	U. O.	M. O.	O. O.	E	M. O.	U. O.	O. O.	E	U. O.	M. O.	O. O.	
Pecten Pictus	+	+	+	—	—	—	—	—	—	—	—	
Nuculella lamellosa	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Limopsis retifera	+	+	+	—	—	—	—	—	+	+	+	
„ striata	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—	
Astarte pygmea	+	+	+	—	—	—	—	—	—	—	—	
Lutetia ovalis	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Lucina gracilis	+	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	
Dentalium acutum	+	—	—	—	—	—	—	—	+	+	—	
„ exiguum	+	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	
„ tenuicinctum	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ dekagonum	+	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	
„ perfragile	+	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	
Cadulus cucumis	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Discohelix Grzybowskii	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	n. sp.
Tinostoma solidum	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Trochus Kickxii	+	+	+	—	—	—	—	—	—	—		
Lacuna ovalina	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Natica Pasinii	—	—	—	+	+	—	—	—	—	—	—	
„ lacunoides	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Rissoa obtusa	+	—	—	—	—	—	—		—	—	—	
„ Duboisi	+	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Turritella infundibulum	+	—	—	—		—	—		—			
Vermetus crassus	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ cellulosus	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Turbonilla incisa	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ impressa	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ spelta	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Syrnola lanceolata	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
Eulima Neumanni	+	+	+	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ microstoma	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—		

	Norddeutschland			Vicentinisches				Südrussland				Anmerkung
	U. O.	M. O.	O. O.	E.	U. O.	M. O.	O. O.	E.	U. O.	M. O.	O. O.	
Cerithium breve	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—	
„ Rauffi	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—	
Cassidaria cf. elongata	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	Cl. Szab.
Marginella perovalis	+	—	—	—	—	—			—	—	—	
„ globulosa	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ conoides	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ bifido-plicata	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Eocän
„ obtusa	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—	
Mitra laevigata	+		—	—	—		—	—		—		
Ancillaria canalis	+	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	
„ obovata	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Cancellaria subcylindrica	+	—	—	—	—	—	—			—		
Pleurotoma plebeia	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—	
„ praepustulata	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—	
Drillia aberrans	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Clavatula Strombecki	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Borsonia pentagona	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—	
„ pyrenaica	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—		
Ringicula gracilis	+	—	—	—	—	—		—	—	—		
„ aperta	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ marginata	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Tornatella cf. simulata	+	+	+	—	—	—	—	+	+	+	+	Eocän
„ cf. curta	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ punctato-sulcata	+	+	+	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ regularis	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Eocän
Solidula plicatula	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Cylichna bicamerata	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ interstincta	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
„ cf. intermissa	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Spirulirostra Szajnochae	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	n. sp.

Die Verwandtschaft der unserigen Fauna mit der unteroligocänen Südrusslands und besonders der von Jekaterinoslaw wird nach der Bearbeitung der Korallen besser ersichtlich werden.

Es ist also evident, dass die Fauna von Kruhel unteroligocänen Alters ist, und zwar entspricht sie, was den Reichtum der Foraminiferen anbelangt, dem Clavulina Szabóihorizonte in Ungarn und bezüglich der Häufigkeit der Mollusken den vicentinischen und norddeutschen unteroligocänen Schichten.

Die geologischen Verhältnisse dieser dunklen Schiefer zu den umherliegenden Bildungen kommen in der beiliegenden Situationsskizze sehr klar zum Vorschein. Es sind nämlich in den weissen Mergeln, den sogenannten Fukoidenmergeln, zwei Einlagen. Die eine Einlage (auf der Situation N. 4, 6, 7, 14, u. z. T. 15) besteht aus den dunklen Ton- oder Sandmergelschiefern (4, 7) und in der Verlängerung derselben aus den Menilitschiefern und Hornsteinen, die je mehr nach Süden desto mehr verwittert und zerbröckelt sind und schliesslich ganz in die dunklen Schiefer, die in den weissen Mergeln (15) eine dünne Einlage bilden, übergehen. Die andere Einlage (N. 1, 2, 8, u. z. T. 12) besteht nur aus den typischen dunklen Schiefern von Kruhel. Alle diese Bildungen gehen unmerklich ineinander über, bilden also einen Komplex von demselben Alter.

Es folgt also daraus, dass die weissen Mergelschiefer der Umgebung von Przemyśl, die von vielen Forschern dieser Gegend stratigraphisch verschieden gestellt worden, unteroligocänen Alters sind, und zwar das Aequivalent der Clavulina Szabóichichten bilden, was schon vor Jahren Dr. Bośniacki auf Grund der dort gefundenen Fischschuppen richtig ermessen hatte [1]).

Es handelt sich vorläufig nur um die Mergelschiefer der nächsten Umgebung von Kruhel. Die Schlüsse über die in der weiteren Gegend liegenden Mergelschiefer reserviert sich der Verfasser für die nächste Zukunft, sobad er Gelegenheit haben wird, seine Studien über dieselben erweitern zu können.

Es ist durch die vorliegende Fauna auch das unteroligocäne Alter der Menilitschiefer, die nämlich das Aequivalent der Clavulina Szabóischichten bilden, bestätig worden. Die Schichten von

[1]) Tietre: Mittheilung über einige Flyschbildungen. Verhandl. d. geol. Reichsanstalt. Wien 1881, p. 286.

Zur Seite 808.

Situationsskizze von Kruhel mały.

Kruhel, die Menilitschiefer und die weissen Mergel bilden, was in der Situationsskizze ersichtlich ist, nur in einander übergehende, verschieden ausgebildete Bildungen

Tafelnerklärung.

Wo die Grösse der Abbildungen nicht angedeutet ist, sind die Objecte 30 mal vergrössert.

1. *Nodosaria* sp. ind.
2. *Glandulina mutabilis* Rss.
3. „ „ „
4. *Lingulina cf. glabra* Hantk.
5. *Cristellaria granulataeformis* n. sp.
6. *Marginulina pediformis* Born.
7. *Flabellina cf. budensis* Hantk.
8. *Cristellaria Kubinyi* Hantk.
9. „ sp.
10. „ *Kubinyiformis* n. sp.
11. *Miliolina (Quinqueloculina) magna* n. sp.
12. *Allomorphina macrostoma* Karrer.
13. *Biloculina ringens* Lam.
14. *Miliolina (Triloculina)* sp.
15. *Rotalia* sp.
16. *Spiroloculina nitida* d'Orb.
17. *Biloculina ringens* v. *turgida* Rss.
18. „ *inornata* d'Orb.
19. „ *paradoxa* n. sp.
20. *Clavulina Szabói* Hantk.
21. „ „ v. *kruhelensis n.* v.
22. *Nummulites budensis* Hantk.
23. „ *Boucheri de la Harpe.*
24. „ *cf. semicostata* Kaufm.
25. *Limopsis retifera* Semp.
26. „ *striata* Regnault.
27. *Discohelix Grzybowskii* n, sp.
28. *Cerithium Rauffi* Oppenh.
29. *Cassidaria cf. elongata* Koen.
30. *Mitra laevigata* Phil.
31. *Borsonia pentagona* Vin. de Regny.
32. *Spirulirostra Szajnochae* n. sp.

56. M. T. GARBOWSKI. **O rozwoju partenogenetycznym rozgwiazd.** *(Über parthenogenetische Entwickelung der Asteriden). (Sur le développement parthénogénétique des Astéries).* Mémoire présenté par K. Kostanecki m. t.

(Planche XVIII).

Während eines gemeinsamen Aufenthaltes an der zoologischen Station der Sorbonne in Roscoff im Sommer l. J., wo sich der Verfasser mit morphogenetischen Experimenten an Echinodermen befasste, wurde er von Herrn Y. Delage mit dem Vorschlage beehrt, sich demselben Thema zuzuwenden, welches diesen Forscher bereits seit drei Jahren mit dem bekannten Erfolge beschäftigt: der parthenogenetischen Morphogenie der Asteriden. Da Herr Delage selbst dem Studium der postembryonalen Entwickelung, der Larvenmetamorphose, obliegt, fiel dem Verfasser die Aufgabe zu, die eigentliche Embryogenie, den Furchungsvorgang und das Verhalten der Zellkerne an parthenogenetischen Keimen zu verfolgen. Als Versuchstier diente *Asterias glacialis* O. F. Müll.; als Mittel zur Auslösung künstlicher Parthenogenese wurde Kohlenstoffdioxyd verwendet.

Trotzdem die Arbeit sofort in Angriff genommen wurde, konnte sie wegen der für den betreffenden Seestern stark vorgerückten Jahreszeit nicht mehr zu Ende geführt werden. Unter den weiblichen Exemplaren, die stets in beliebiger Menge zu haben waren, befanden sich im August nur noch einzelne, deren Ovarien von erwachsenen Eizellen strotzten; im September hatten fast sämtliche Weibchen bereits abgelaicht und die Beschaffung reifungsfähiger Oocyten gestaltete sich immer mühevoller, bis sich der Verfasser schliesslich gezwungen sah, die Untersuchungen vorläufig abzubrechen. Im September war es auch nicht mehr möglich, Vergleiche mit Furchungsprozessen an befruchteten Eiern vorzunehmen, da die Drüsenschläuche der Männchen in der Regel noch vollständiger entleert und zusammengeschrumpft waren als die Ovarien und die etwa vorhandenen Spermatozoen wenig Bewegung zeigten. Doch dürfte es angezeigt sein, noch vor dem Abschluss der Untersuchung, aus dem Furchungsprozesse eine Reihe von Tatsachen und Verhältnissen mitzuteilen, welche nicht nur als auffallende Episoden einer speziellen Ontogenie von Interesse sind, sondern allgemeine Bedeutung besitzen, indem sie zu einer richtigen Beurteilung wichtiger ent-

wickelungsgeschichtlicher Geschehnisse beitragen. Deshalb wird dieser parzielle Bericht der definitiven Darstellung vorausgeschickt.

(*Verlauf des Experimentes*).

1. Da von dem Zeitpunkte, wo die Oocyten in reines Seewasser entleert werden, bis zum Erscheinen der ersten Furchungsteilung 7—8 Stunden vergehen, so empfiehlt es sich das Experiment gegen 11 oder 12^{h} nachts zu beginnen, um den Furchungsvorgang den ganzen Tag hindurch verfolgen zu können.

Beim Öffnen der Seesterne wurden selbstverständlich alle nötigen Massregeln eingehalten, um die Möglichkeit einer eventuellen Befruchtung auszuschliessen. Die Tiere wurden mit Seewasser abgespült, in einer Glasschüssel unter süssem Wasser geöffnet, die mit einer sterilisierten Pinzette am Distalende abgezwickten Ovarien nochmals in einer zweiten Cüvette in Süsswasser gelegt und erst nachher in ein Seewasser gebracht, welches man seit etwa 10 Monaten in einem genügend grossen, verschlossenen Behälter zu diesem Zwecke aufbewahrte. Waren die korallenroten Ovarien prall mit Eiern gefüllt, so wird der Inhalt sofort und rasch ohne fremdes Zutun infolge heftiger Kontraktionen sowohl des Hauptstammes als der feineren Verästelungen der Drüsenschläuche herausgepresst. Hat das Tier schon vorher die Geschlechtsprodukte ausgestossen, dann wird es nötig, die Endstücke der Ovarialästchen abzuschneiden, worauf die freien Oocyten langsam hervorquellen. Ein Herausdrücken derselben ist stets zu vermeiden.

2. Die Eizellen befinden sich im Oocytenstadium erster Ordnung. Ein solches Vorei ist entweder kugelrund oder eiförmig, von 0·18 bis 0·23 *mm* Durchmesser; oft ist der Unterschied in der Länge der beiden Hauptachsen des Rotationsellipsoids sehr stark ausgeprägt. Die Beschaffenheit des Ooplasmas ist isolecithal. Die Dotterkörperchen sind in der ganzen Zelle gleichmässig verlagert. Dies tritt besonders bei Vitalfärbung mit Neutralrot deutlich hervor. Der aufgenommene Farbstoff, der das ganze Ei diffus rosarot färbt, wird an eine gewisse Sorte von Körnchen besonders gebunden und da wird deren gleichmässige Verteilung augenfällig. Die Dotterkörnchen differieren unter einander in Bezug auf Grösse, Durchsichtigkeit und Lichtbrechungsvermögen. Körnchenfrei und heller erscheint nur ein Hof von mässiger Breite, der das sehr grosse,

exzentrisch gelegene Keimbläschen umgiebt. Das rötliche Pigment ist ebenfalls gleichmässig durch das ganze Plasma verteilt und verleiht der Eizelle einen einheitlichen, zart korallenroten Ton. Nur selten ist das Pigment auf ein oder mehrere Nester konzentriert, die in Form von rostroten, zusammengeballten oder streifartig zerstiebenden Wolken auftreten und offenbar eine ganz regellose, rein zufällige Lage im Zellplasma erhalten. Dort wo bloss ein Farbstoffnest vorhanden ist, liegt dasselbe fast immer dicht unter der Oberfläche der Zelle. Ab und zu sind im Ooplasma helle, durchsichtige, vakuolenartige, bis 5 μ grosse Gebilde zu bemerken. Manchmal sind diese Tröpfchen rund, manchmal elliptisch; zuweilen sind sie zu zwei in das Plasma eingebettet und persistieren lange nach Beginn der Furchung. Das grosse Keimbläschen, dessen Durchmesser dem Eiradius gleichkommt, lässt im Leben in seinem gleichmässig grau-rötlichen Inhalt gar kein Liningerüst erkennen, besitzt einen runden, dichtgekörnten Amphinucleolus und befolgt in seiner exzentrischen Lage keineswegs die Achsenverhältnisse der Oocyte, wenn die Zelle eiförmig ist; das eine Mal ist es ein Pol der Längsachse, das andere Mal eine beliebig andere Gegend der Oberfläche, der sich das Keimbläschen nähert. Auch die Entfernung des Kernes von der Oberfläche wechselt in ruhenden Oocyten beträchtlich.

3. Bei einer Wassertemperatur von 17—18° C. — in Roscoff war die Wassertemperatur in der Regel bis um 1° C. niedriger als die Zimmertemperatur — macht sich der Reifungsprozess etwa 30 Minuten nach Entleerung der Oocyten durch ein Schwinden des intravesiculären Turgors bemerkbar (Fig. 1). Die starke Membran des Keimbläschens beginnt einzufallen, wirft Falten und wird immer undeutlicher, bis sie sich nach 50—55 Minuten auflöst. Nach anderthalb Stunden ist vom Keimbläschen samt dem Amphinucleolus jede Spur verschwunden. Nach etwa 2 Stunden 45 Minuten hellt sich der Eiinhalt sichtlich auf, die Richtungsspindel wird ausgebildet und nach etwa 3 Stunden 25 Minuten erscheinen die ersten Polkörperchen. Dies ist der richtige, von Delage experimentell und durch theoretische Erwägungen ermittelte Zeitpunkt, wo die Oocyten der Einwirkung des Kohlenstoffdioxyds ausgesetzt werden müssen, um parthenogenetische Entwickelung auszulösen.

Das gewöhnliche Seewasser, welches inzwischen zwei- bis dreimal gewechselt wurde, um den schädlichen Einfluss des Atemwassers nach Möglichkeit fernzuhalten, wird bis auf eine wenige *mm* hohe

Schichte weggeschüttet und spermatozoenfreies, in einem Sparklet-Apparat unter Druck von mehreren Atmosphären mit dem Anhydrid chargiertes Wasser, sobald es nicht mehr aufbraust, aufgegossen, was in den Zellen einen sofortigen Stillstand jedweder Reifungsaktion zur Folge hat. Da nach den Erfahrungen Delage's selbst ein zweistündiger Aufenthalt im kohlensauren Wasser den Eiern nicht schadet, hat der Verfasser dieselben niemals kürzer als 70, anderseits aber niemals länger als 90 Minuten in der Lösung belassen, worauf sie in grosse Mengen frischen, jede halbe Stunde erneuerten Seewassers zurückgelangten.

4. In Betreff der Wirkungsweise des Kohlendioxyds hat Delage bereits im Vorjahre in einer an die Pariser Akademie gerichteten Mitteilung darauf hingewiesen, dass der Erfolg des Experimentes weder auf spezifische Ionen, auf eine spezifisch exzitierende, beziehungsweise katalytisch beschleunigende Wirkung zurückzuführen ist, noch auf osmotischer Beeinflussung — Tonogamie Giard's — beruhen kann. Tatsächlich hat der Verfasser durch Süsswasserzusatz den osmotischen Druck um reichlich 12 Prozent in einem Kontrollversuche erniedrigt, ohne irgendwelchen Unterschied in der Wirksamkeit des Agens aufzufinden. Auch asphyktisch wirkt das Kohlendioxyd sicher nicht, weil unter den Tausenden von Eiern, die sich nachher nicht entwickelten, kein einziges gefunden wurde, welches früher oder unter anderen Begleiterscheinungen abgestorben wäre, als dies unter normalen Bedingungen bei ausgestossenen Eiern der Fall zu sein pflegt. Dagegen sei, angesichts der Schlussfolgerung des berühmten Forschers, das Kohlendioxyd könne auch anästhesierend und als Gift nicht wirken, weil die Anwesenheit anderer Anästhetika keine Parthenogenese herbeiführt, dem Verfasser die Bemerkung verstattet, dass jener Schluss nichts weniger als zwingend ist, da ja die Kohlensäure notorisch den Stoffwechsel durch Atmung unterbindet und auch Intoxikationszustände verursacht. Der Verfasser sah die Einwirkung des kohlensauren Wassers auf Seeigel, auf eine marine und eine Süsswasserschnecke (*Nassa* und *Physa*); bei allen diesen Tieren treten unter Erschlaffung der Muskeln vorübergehend Lähmungserscheinungen auf. Der sofort eintretende Stillstand in Reifungsvorgängen spricht für eine verwandte Wirkungsweise bei Seesterneiern, für eine Art von Narkose, in welche die Oocyten versetzt werden, und lässt die Auslösung von Furchungsprozessen nach der

Narkose, beziehungsweise die Umwandlung der Reifungsteilung in eine Furchungsteilung, als spezifisches Geschehen, mit dem Agens in einen ähnlich zufälligen, losen Zusammenhang bringen, wie etwa die Parthenogenese bei einer Bombycide mit der Aktion des „Bürstens" der Eizellen. Bei Reifeiern bleibt ja doch jede Wirkung aus. Auf keinen Fall ist die Wirksamkeit eines Anhydrids mit der Wirksamkeit der Samenzellen zu vergleichen, geschweige denn ihr gleichzustellen. Einerseits weisen auf die Richtigkeit der hier vorgetragenen Auffassung alle jene anormalen Erscheinungen hin, die weiter unten als postnarkotische Regulationsversuche beschrieben werden, anderseits ist der Erfolg der Wirkung keineswegs gleichmässig und untrüglich. Obwohl auch dem Verfasser im August riesige, von Eiern strotzende Weibchen zur Verfügung standen, waren es stets gegen 2 Drittel Eier, die sich nicht entwickelten, darunter reichlich die Hälfte solcher, deren Kern nicht das Stadium des Keimbläschens, sondern des Pronucleus zeigte. In einem günstigsten Falle, bei Eiern die aus sehr geschrumpften Ovarien eines halberwachsenen Exemplars stammten, befanden sich unter 19 Eizellen im Gesichtsfelde nur drei, unter 21—22 vier oder sechs, unter 24 nur zwei, im Durchschnitt 20% Eier, bei denen durch das kohlensaure Bad kein Furchungsprozess ausgelöst wurde. Der Grad, in welchem die Oocyten hiezu geeignet sind, hängt weder von der Menge, in der sie die Ovarien füllen, noch von der Grösse des Versuchstieres ab. Immerhin wurden stets höhere Prozente der Furchungsfälle erreicht, als sie bei anderen physikalischen und chemischen Agentien zu verzeichnen waren. Demgegenüber wurden bei den Originalversuchen mit dem Anhydrid 100% Furchungen bis zum Larvenstadium erzielt; das Resultat wäre also weit günstiger als bei spermatischer Normalbefruchtung. Wenn man indessen bedenkt, dass in jenem vorjährigen Originalberichte nicht nur die Oocyten mit intaktem Keimbläschen nicht mitgezählt wurden, sondern auch alle jene, die als zu wenig reif an sich beurteilt worden sind, so wird in Anbetracht der Unbestimmtheit einer solchen Aussage über kaum beurteilbare Zustände auch dort die Prozentzahl wesentlich niedriger zu setzen sein. Aber selbst dann, wenn der Effekt des künstlichen Eingriffes durchgreifender wäre als bei Befruchtung, wird es sich schon aus der Tatsache der Entwickelung ohne vorhergegangene gametische Behebung des chreozygialen Zustandes ergeben müssen, dass die Ei-

zelle nur durch eine heterogen, also pathologisch verursachte, wahrscheinlich postnarkotische Desorientierung sich von der Notwendigkeit herangezüchteter Verhältnisse emanzipiert und auf die Entwickelungsbahn gebracht werden kann.

5. Deshalb hält der Verfasser die vielfach eingeführten Bezeichnungen, wie Ionenbefruchtung, Tonogamie (osmotische Befruchtung) u. dgl. für unlogisch und völlig verwerflich.

(*Richtungskörperchen*).

Nach der Narkose vergehen 3·30—4·15 Stunden, bis sich die nunmehr zum Reifei gewordenen Oocyten zum ersten Male teilen. Sie besitzen — wie dies bereits von Herrn Delage angegeben wurde — eine nach Art der Befruchtungsmembran abgehobene Hülle und ein oder zwei oder keine Richtungskörperchen, je nach dem Stadium des Reifungsprozesses, in welchem sie in das kohlensaure Medium gelangten. Es kamen hierbei wichtige Einzelheiten zur Beobachtung, aus denen sich weittragende Tatsachen ergeben.

6. Es bestehen keine Wechselbezüge zwischen den Achsenverhältnissen bei ellipsoidischen Oocyten und der Ausstossung der Polkörper. Diese kann in beliebiger Entfernung von den Polen des Ellipsoids gegen den Aequator hin stattfinden. Dasselbe gilt von runden Oocyten; die Lage der Richtungsspindeln hängt demnach auch von der Schwerkraft keineswegs ab.

Die Richtungskörperchen wechseln in Grösse und Gestalt. Die grössten, kugelrunden Körperchen erreichen im Durchmesser ein Zwölftel oder sogar ein Elftel des Eidurchmessers. Zuweilen sind sie sehr stark abgeplattet, knopfförmig.

7. Auf die Auslösung der Furchung scheint ihre Gegenwart, ihre Zahl oder ihr Mangel gar keinen Einfluss zu nehmen. Auch der Zeitpunkt der Auslösung hängt von diesen Umständen nicht ab und wechselt in allen drei Fällen gleichmässig je nach dem Grade der Affizierung, welche die Eizellen im kohlensauren Bade erlitten haben. In allen drei Fällen kann die Furchung einen streng normalen[1]) Verlauf nehmen.

8. Aus der Lage der Polkörperchen am Ei ergiebt es sich, dass

[1]) Die Bezeichnung „typisch“ wird hier nur wegen der Einschränkungen, die sie von W. Roux (1903) erfährt, nicht verwendet.

die Oocyte I-ter Ordnung von *Asterias* isotrop und isolecithal ist. Die Polkörperchen rechtfertigen hier ihren Namen auch deshalb nicht, weil sie die Furchungsebene bei der ersten Teilung gar nicht bestimmen. Diese Befunde gewinnen ein besonderes Interesse angesichts der von Boveri bei *Paracentrotus* festgestellten Eipolarität[1]). Doch geht aus früheren Beobachtungen Selenka's hervor, dass auch bei *Paracentrotus* die erste Furche gar oft ohne aufweisbare Beziehung zu den Polkörpern und dem Gallertkanal einschneidet.

9. Aus der Tatsache, dass sowol bei Oocyten beider Ordnungen als bei Reifeiern der Entwickelungsprozess in derselben Zeit nach der Narkose einsetzt und — wie dies aus den diesjährigen Zuchtversuchen des Herrn Delage mit parthenogenetischen Auricularien zu folgern ist — bis zum Stadium der Imago normal abläuft, ergiebt sich zweierlei:

Zum ersten, dass zwischen den Oocyten und dem ausgereiften und befruchteten Ei kein prinzipieller Gegensatz besteht, d. h. keine so tief gehenden Unterschiede, dass sie die Organisation des sich entwickelnden Tieres gefährden würden. (Wenn jemand dieser Schlussfolgerung gegenüber auf die Ergebnisse des Herrn Delage v. J. 1901 bei dessen Experimenten mit Merogonie hinweisen wollte, wo es sich gezeigt hat, dass kernlose Fragmente unreifer Seeigeleier keine Befruchtung zulassen, so ist daran zu erinnern, dass gerade bei *Asterias* die Samenzellen auch in die Oocyten beider Ordnungen ohne Schwierigkeit eindringen).

Zum zweiten, dass mit den Richtungsteilungen der Eizelle keine spezifisch qualitative Reduktion der Chromosomen verbunden ist.

Dieses Ergebnis stimmt gut mit den Schlussfolgerungen von Delage überein, dass weder etwaige Reifteilungen zur Reduktion des Chromatins nötig sind, noch dass das Zustandekommen der Befruchtung von der Quantität des Chromatins abhängt. Bekanntlich ist es auch R. Hertwig gelungen, ganz reife Echinodermeneier zu Teilungsvorgängen durch Einwirkung von Strychnin zu bewegen; ausserdem hat es sich gezeigt, dass *Asterias*-Eier, die bereits zwei

[1]) Es möge bei dieser Gelegenheit erwähnt werden, dass der Verfasser weder an bretonnischen, noch an Neapler, noch an südsizilianischen *Paracentrotus*-Eiern einen ähnlichen Pigmentring gesehen hat wie bei jenen südfranzösischen aus Villefranche.

Polkörperchen abgeschnürt haben, auch durch Schütteln zur parthenogenetischen Entwickelung gebracht werden.

10. Die Eier mit zwei Polkörperchen sind bei den geschilderten Versuchen bedeutend seltener als andere Stadien, so dass sie zunächst von Delage selbst übersehen wurden. Dies ist jedoch leicht erklärlich, wenn man bedenkt, dass die Eier, sobald der Reifungsprozess des Keimbläschens einzusetzen beginnt, in das kohlensaure Wasser gelangen; es sind folglich nur die wenigen, in der Entwickelung vorauseilenden Eier, die sich zu jener Zeit bereits zweimal geteilt haben, da der durch CO_2 unterbrochene Reifungsprozess nach der Narkose niemals fortgesetzt wird. Ferner, wird man sich bei jedem Nachversuche überzeugen können, dass von den ganz ausgereiften Eiern ein weit grösserer Prozentsatz die Entwickelung eingeht als von den übrigen Sorten. Somit wird der hier mögliche Einwand beseitigt und wäre eher die Aussage berechtigt, dass die Chreozygie von Reifeiern leichter überwunden wird als von Oocyten.

Ein anderer Einwand wäre dahin zu erheben, dass bei der Mehrzahl der nicht direkt beaufsichtigten Eizellen das zweite Polkörperchen überhaupt nicht zur Abschnürung gelangt ist, sondern dass sich der erste Polkörper geteilt hat, zumal bei reifenden Eizellen mehrerer Tierformen die zweite Reifungsteilung zwar ausgelöst, bald jedoch rückgängig gemacht wird, so dass die beiden bereits kernartig abgesonderten Chromatinportionen, die des ausstehenden Polkörpers und die des Eies, mit einander verschmelzen und einen echten Befruchtungsvorgang ersetzen. Tatsächlich wurde ein solches Zurückziehen der Reifungsteilung für Seeigel und Seesterneier von mehreren Autoren angegeben und bei Arthropoden, Mollusken u. dgl. beobachtet. Demgegenüber ist zu bemerken, dass es nicht schwer hält, die eventuelle Teilung des ersten Körperchens von zwei gleichwertigen Polkörperchen schon nach ihrer Lage allein zu unterscheiden, und dass normal ausgereifte Eier auch z. B. bei Insekten entwickelungsfähig sind: und zwar nicht etwa bei solchen Formen, wo natürliche Parthenogenese bereits herangezüchtet wurde wie bei Apiden, sondern bei Arten, wo sie zu ausserordentlichen Ausnahmen gehört. So unterliegt es gar keinem Zweifel, dass die Eier eines ♀ von *Porthesia similis* Fuessl., über deren Parthenogenese der Verfasser an anderem Orte berichtet, normal ausgereift waren.

Eine Selbstbefruchtung hat der Verfasser an seinem *Asterias-*

Materiale gar nicht gesehen. Auch für andere Formen, z. B. für *Artemia*, werden die betreffenden Vorgänge neuerdings in einer anderen Weise gedeutet.

11. An einem sich atypisch furchenden, gesunden Ei, welches bereits ein 14-zelliges Stadium erreicht hat, hat der Verfasser die beiden, recht ansehnlichen Polkörperchen geteilt vorgefunden. Der Fall bietet ausserordentliches Interesse, indem er

erstens, den Nachweis liefert, dass die Wirkungsweise des Kohlendioxyds wirklich in der von Delage und vom Verfasser geschilderten Weise aufzufassen ist — in beiden Polkörperchen war offenbar das Ruhestadium der Kerne noch nicht eingetreten —;

zweitens, was noch wichtiger ist, indem er zeigt, dass die Kerne der beiden Polkörper, bei gleicher morphogenetischen Reaktion auch einen untereinander und mit der Eizelle gleichartigen morphologischen und physiologischen Wert besitzen. Sämtliche vier Zwergzellen lagen in einer Aussackung der Eihaut und waren von den Blastomeren isoliert.

(*Erste Furchungsebene*).

Der Furchungsprozess, der nach der mehrstündigen, postnarkotischen Ruhepause einsetzt, bietet desgleichen viel bemerkenswertes; zunächst in Betreff der ersten Furchungsebene.

Die oft höchst auffallenden Unterschiede, welche einzelne Eier diesbezüglich aufweisen, beruhen einerseits auf der verschiedenen Richtung der Eidurchschnürung, anderseits auf der verschiedenen Grösse der ersten Blastomere.

12. Die Fälle, wo die erste Furchungsebene mit den Meridianen der Polkörperchen zusammenfällt, sind so selten und offenbar zufällig, dass man als die Haupteigenschaft dieser Eier den vollständigen Mangel irgend welcher Relationen zwischen jener Ebene und den Richtungskörperchen zu bezeichnen hat. Selbst bei Eiern, bei denen die erste Furche das Ei genau halbiert und die sich auch nachher sehr regelmässig — man möchte sagen „typisch“ — abfurchen, bleiben die Polkörper an jeder beliebigen Stelle der beiden Halbkugeln liegen, auch an einer beliebigen Stelle des durch die erste bei typischer Furchung vertikale Teilungsebene bestimmten Aequator der Eizelle.

Hieraus erhellt, dass den Polkörpern auch die Bedeutung von „Richtungskörperchen“ im Sinne F. Müller's nicht zukommt: der

Ort ihrer Abgabe steht in keiner aufweisbaren Beziehung zur Furchung, wirkt also nicht auf eine polare Einstellung der Eistruktur zurück.

13. Der Verfasser schlägt vor, bezüglich der Lokalisation der Reifungsteilungen 4 verschiedene Eitypen zu unterscheiden:

solche, bei denen zwischen der Lage der Polkörper und den Furchungsebenen, beziehungsweise der polaren Hauptachse des künftigen Embryos kein struktureller Zusammenhang besteht — wie im vorliegenden Falle;

solche, bei denen durch die Polkörperchen zugleich die Hauptachse angegeben erscheint, jedoch ohne Bestimmung der künftigen Pole des Keimes, wo also die Polkörper sowohl am animalen wie am vegetativen Pole abgeschnürt werden — wie bei *Diplogaster;*

solche, wo die Polkörper stets das animale Polfeld bezeichnen — wie bei *Paracentrotus;*

endlich solche, wo die Polkörperchen am vegetativen Polfelde abgeschnürt werden — wie bei *Ciona.*

14. Obschon die erste Teilungsebene an sich bei normaler Furchung die polare Achse des Keimes enthält, so tut sie dies bei anderen Furchungstypen, wie sie hier bei der Mehrzahl der Eier auftreten, nicht; auch ihr kommt also das Vermögen, die für die Furchungsrichtung entscheidenden Momente der Eistruktur definitiv einzustellen, nicht zu. Ein Beispiel dafür giebt die Fig. 3, wo sich die erste Teilungsebene mit der senkrecht orientierten Polachse des Keimes unter einem bestimmten Winkel schneidet.

Noch weniger lässt sich die künftige Bilateralsymmetrie der Larve auf die Richtung der ersten Furchung zurückführen, selbst dann nicht, wo sie die Polachse enthält.

15. Nur manchmal wird das Ei durch die erste Furchungsteilung halbiert. Sonst begegnet man hier allen Übergängen, von subaequaler, fast symmetrischer Teilung bis zu dermassen inaequalen Zerschnürungen, dass die resultierenden Schwesterzellen beinahe das Ergebnis einer neuerlichen Reifungsteilung vortäuschen.

16. Geht die Frage dahin, welche Momente die faktische Richtung der ersten Furchungsebene und die hierbei zutage tretende Mannigfaltigkeit unmittelbar bewirken, so sind nach Überzeugung des Verfassers die jeweilige Lage des Keimbläschens, respektive des reifenden Kernes und die je nach der Individualität der narkotisierten Eizellen variierenden Folgen des chemischen Ein-

griffes, ihre Qualität und Intensität, als unmittelbare Ursache der ersten Teilungsrichtung anzusprechen.

Es möge an die Verhältnisse bei *Paracentrotus* erinnert werden, wo trotz der direkt sichtbaren, polaren Verteilung der Stoffe in der Eizelle der Kern vor der Einstellung zu der stets polar verlaufenden ersten Furchungsteilung, in seiner exzentrischen Lage in keiner Beziehung zur Eipolarität steht. Im vorliegenden Falle, wo der Kern in verschiedensten Gegenden der Eizelle, je nach seiner „zufälligen" Einstellung als Keimbläschen und je nach der Reifungsphase, ergriffen worden sein kann, hat die Einwirkung der Kohlensäure stets eine mehr oder weniger tiefgreifende Desorientierung der ganzen Eizelle in deren Organisation zur Folge, eine Desorientierung, die bei nicht ausgereiften Oocyten darauf beruht, dass die vorbereitete Reifungsteilung in eine Furchungsteilung umschlägt, bei Reifeiern indessen den Kern nicht in das chreozygiale Ruhestadium eintreten lässt, sondern zu neuerlicher Teilung veranlasst. Je nach dem Grade der narkotischen Affektion wird sich diese Teilung mehr oder weniger von der für *Asterias* herangezüchteten Furchungsform entfernen, in manchen, sub 15. erwähnten Fällen wird sie sich von der vorher beabsichtigten Richtungsteilung nur wenig unterscheiden. Je nach dem Grade der erfolgten Furchungsaberration müssen nachher durchgreifende oder parzielle Regulationsprozesse ausgelöst werden. Je nach der Intensität der Einwirkung der Kohlensäure wird die Auslösung dieser Prozesse früher oder später erfolgen.

Diese Auffassung gewinnt an Wahrscheinlichkeit, wenn man bedenkt, dass bei verwandten und andersartigen Organismen (*Toxopneustes* nach Wilson – *Rana* nach Roux) die erste Furchungsebene ebenfalls nicht strukturell vorbezeichnet ist, sondern erst durch den Spermiumpfad bestimmt wird.

Es bliebe zu untersuchen, ob die für die Reifungsteilungen indifferente Schwerkraft nicht irgend welchen formativen Wert für die erste Furchungsrichtung besitze.

Zu dem Behufe hat der Verfasser eine Reihe von Oocyten mit den Polkörperchen nach oben gerichtet, einige Zellen dagegen in aequatorialer Lage der Körperchen fixiert. Nirgends war eine Beeinflussung der Teilungsrichtung nachzuweisen. Die Furchung wurde in verschiedenster Richtung eingeleitet, was die Richtigkeit der hier vertretenen Auffassung über allen Zweifel stellt.

17. Die sich aus dem Delage'schen Kohlensäure-Experiment ergebende Umwandlung von Reifungsteilungen in Furchungsteilungen ist insofern von grosser Tragweite, als sie die prinzipielle Gleichwertigkeit der beiden Vorgänge nahelegt und die Reifungsteilungen als das zu erkennen erlaubt, was sie tatsächlich sind: die der Spermatogenese prinzipiell konforme, phyletisch angestammte Zerlegung einer Mutterzelle in vier Keimzellen, von denen drei in ihrer Entwickelungsfähigkeit durch Einfluss sekundärer Momente unterdrückt werden, jedoch prospektiv der Eizelle gleichwertig sind.

Hierher das sub 11. Gesagte.

(*Verlauf der Furchung*).

Beim typischen Verlaufe der Furchung folgt auf die erste, aequale Teilung eine zweite, ebenfalls aequale und meridionale, woraus vier gleich grosse, in einer Ebene liegende Blastomere entstehen, und einige Zeit ruhen. Die dritte Teilungsebene verläuft wie bei Seeigeln aequatorial und bringt zwei Zellkränze hervor, die über einander liegen und bei subaequaler Grösse die erste Anlage der animalen und der vegetativen Hemisphäre darstellen. Durch weitere meridionale und latitudinale Teilungen wird das Ei in weitere, mehrzellige Blastomerenkränze zerlegt, bis nach etwa 24 Stunden die Blastulation vollendet ist und nach weiteren 10—16 Stunden die Darmeinstülpung vor sich geht.

18. Die Furchungsbilder parthenogenetischer Eier bieten die grösste, auffallendste Mannigfaltigkeit. Schon im Tempo der Teilungen machen sich weitgehende Differenzen bemerkbar. Während das Vierzellenstadium gewöhnlich in 15—20 Minuten nach der ersten Teilung und 4—4½ Stunden nach der Narkose erreicht wird, um nach etwa einer Stunde in das achtzellige Stadium überzugehen, giebt es unabhängig von der Zahl der Polkörperchen Eier, die sich erst zur ersten Teilung anschicken, wenn die anderen bereits in das Sechzenzellenstadium übergegangen sind. Demgemäss ist auch der Zeitpunkt des Ausschwärmens der Larven recht verschieden, so dass das Alter der Larven derselben Zucht bis um 14 Stunden differieren kann.

Andere Abweichungen von dem Normalbilde des Furchungsmosaiks werden durch die ungleiche Grösse von Blastomeren derselben Generation bedingt. Fig. 4 zeigt ein Vierzellenstadium

von hochgradiger Ungleichheit der Zollvolumina bei normaler Zellanordnung. Aus der Figur ist zu entnehmen, dass die Abweichung erst bei der zweiten Furchungsteilung eingetreten ist, während die erste aequal verlief. Weit häufiger wird jedoch die Unregelmässigkeit schon durch die erste Furchungsebene veranlasst. Stets werden derartige Unregelmässigkeiten nachherweise ausgeglichen und verhältnismässig selten werden die Regulationsprozesse erst nach der Blastulation oder noch später beendet.

Indem hier von einer eingehenden Besprechung der Furchungsvariabilität Umgang genommen und bezüglich des Details auf die ausführliche Darstellung hingewiesen werden muss, mögen an zwei Beispielen die Fälle erläutert werden, wo die prospektive Bedeutung der Blastomere dauernd verändert erscheint und gewisse offenbar affizierte, aber entwickelungsfähige Zellen ihre Beteiligung am Keimaufbau einschränken, während andere mit gesteigerter Tätigkeit aushelfend einspringen. Das in Fig. 5 abgebildete Vierzellenstadium (bei senkrecht orientierter Polachse) ist aus einem beinahe aequalen Zweizellenstadium hervorgegangen, jedoch in der Weise, dass sich das linke Blastomer zweimal teilte, das rechte dagegen sich passiv verhielt. Von den zwei Tochterzellen hat die höher liegende Ältere durch geeignete Gleitbewegung eine zentrale Lage am animalen Pol angenommen, wobei der obere Teil der ungeteilt gebliebenen Zelle von der Beteiligung am Polfelde abgedrängt wurde, und der später ausgebildete animale Zellenkranz nahm seinen Ursprung von einem einzigen Blastomer, anstatt sich aus allen vier Elementen des Viererstadiums zu entwickeln. Nicht weniger beachtenswert ist der andere Fall derselben Kategorie, der in den Figg. 8—10 dargestellt ist. Aus einem normalen Vierer entstand hier das Achterstadium nicht durch eine sämtliche Elemente gleichmässig schneidende Horizontalfurche wie beim normalen Geschehen (vgl. Fig. 7), sondern durch zweimalige Teilung des Quadranten *A*; die Zelle *D* teilte sich nicht. Dadurch ist auch die gegenseitige Lage der Achterzellen ganz unregelmässig geworden. Während sonst der vierzellige animale Kranz genau über den vegetativen Zellen oder nach dem Typus der Spiralfurchung mit leichter Verschiebung im Sinne des Uhrzeigers abgeschnürt wird, liegt hier der zweizellige Quadrant *B* zuoberst, — wenn wir das Ei vom vegetativen Pol der künftigen Larve betrachten. Das abnorme Lageverhältnis wurde auch hier nach und nach ausgeglichen. Der in mehrere Deszen-

denten aufgeteilte Quadrant *B* hat indessen seine vegetative Lage dauernd beibehalten. Das 28-zellige Stadium (Fig. 9) bestand aus 11 Deszendenten des *A*, 6 *b*, 7 *c* und nur 4 *d*. In Fig. 10 wird das 52-zellige Stadium vorgeführt, bei welchem das Verhältnis der Zellenzahl in den vier Gruppen annähernd dasselbe geblieben ist; der Keim ist hier um die Polachse nach rechts umgedreht, um die bedeutenden Abweichungen von der kugeligen Form des Ganzen zur Geltung zu bringen.

Es soll ferner jener Fälle gedacht werden, wo das Vierzellenstadium durch Dreier vertreten wird. Diese sind entweder symmetrisch und aus koätanen Zellen zusammengesetzt, wie dies unter gewissen Bedingungen auch bei Seeigeln nicht selten vorkommt, oder aber sie entstehen aus vollständig oder unvollständig entwickelten Zweizellenstadien, was gewöhnlich mit weitgehender Assymmetrie verbunden ist. Auch bei der letzteren Entstehungsweise haben die isolierten Dreier tadellos bilaterale Larven geliefert; ein Beweis, dass die Bilateralsymmetrie erst in späteren Entwickelungsstadien im abgefurchten Keime etabliert wird.

Überaus häufig tritt schliesslich eine Knospenfurchung (Barockfurchung Born's) auf, die ihrerseits rein cytoplasmatisch oder mit echter Kernteilung verbunden sein kann. Fast immer ist sie durch die Begleiterscheinung charakterisiert, dass bereits geformte, abgeschnürte Elemente zurückgezogen und entstaltet werden. Die Knospenfurchung führt zuweilen zu abenteuerlichen Gebilden, die zwar oft zugrunde gehen, manches Mal aber, wie aus derart aberranten, isolierten Keimanlagen gezüchtete Normallarven belehren, nach durchgreifenden Regulationsprozessen in die richtige Entwickelungsbahn gebracht werden können.

19. Die Frage nach den Ursachen all' dieser Mannigfaltigkeit im Furchungsprozesse kann mit dem blossen Hinweise auf das sub 16. über Nachwirkungen der Narkose Gesagte abgetan werden. Die zur Entwickelung hingedrängte Eizelle führt sichtlich einen Kampf mit lokalen Störungen, welche die Teilungsmechanismen in verschiedenstem Umfange und verschieden lange hemmen. Es bezeugen dies gewisse Eigentümlichkeiten, wie sie bei parthenogenetischen Furchungsteilungen überaus häufig vorkommen und auch bei Experimenten mit befruchteten Echinodermeneiern ab und zu beobachtet werden.

Schon äusserlich machen sich an den Eizellen Vorwölbungen

und höckerartige Auswüchse bemerkbar, die lebhaft an ähnliche Gebilde bei Seeigeleiern in hypotonischen Medien erinnern. Durch lokal zentrierte Kontraktionen des Zellleibes werden mitunter Plasmatropfen einzeln oder gruppenweise vorgetrieben und zellartig abgeschnürt, um bald nachher eingezogen oder, was seltener vorkommt, dauernd abgestossen zu werden. Besonders häufig zeigen sich diese Bildungen im Bereiche der Furchungsebene (Fig. 3). Ein abgeschnürter Plasmateil besitzt zuweilen grosse Ähnlichkeit mit einem Richtungskörper. In anderen Fällen unterbleibt die vollständige Abschnürung und die ausgeschiedenen Teile hängen mit der Eizelle vermittels dünner, ziemlich langer Stielchen zusammen, so dass sie das Aussehen dicht gedrängter Pilze gewinnen.

Auf innere Kontraktionen und Plasmaströmungen sind auch Abweichungen in der Pigmentverteilung zurückzuführen, die bereits oben erwähnt wurden. Der Farbstoff lag in einer Oocyte, die sich nach Isolierung zu einer Normallarve entwickelt hat, schräg gegenüber dem Polkörper zu einem Ballen zusammengedrängt, direkt unter der Zelloberfläche; das Ei erschien dadurch glasig entfärbt Diese Anhäufung bildete offenbar für die dicht daneben einsetzende Furchungsteilung ein schwer zu überwindendes Hindernis. Es kam zur Abstossung mehrerer, umfangreicher Plasmatropfen. Die Ränder der nachträglich erfolgten Zerschnürung waren stark runzelig und mehrfach ausgezackt. Ähnliches Verhalten hat neulich Boveri für Seeigeleier mit Monasterbildung angegeben und, vielleicht nicht ganz glücklich, als amöboides Oberflächenwachstum aufgefasst.

In diesem Zusammenhange will der Verfasser erwähnen, dass er zweimal, im März und Ende Mai l. J., auch in Neapler *Paracentrotus*-Eiern analoge Pigmentballen gesehen hat. In einem Falle war das Ei befruchtet und furchte sich regelmässig ab. Im Viererstadium kam der kompakte Pigmentkörper in eine, etwas höher gewölbte Zelle zu liegen. Diese Zelle teilte sich sodann im gleichen Tempo wie die übrigen pigmentlosen Blastomere und in einem späteren Stadium war der Farbstoff in zwei mittleren Zellkränzen zu sehen, wo er mehrere nebeneinander liegende Blastomere auffällig tingierte.

Es kann übrigens das Pigment in diesen Eiern auch künstlich, durch gesteigerte Salinität des Mediums in ähnlicher Weise lokalisiert werden.

Die regulatorischen Vorgänge im Ooplasma, welche auf die Ein-

leitung einer normalen Embryogenese hinauslaufen, können manchmal auch in spontaner Ausbildung von Strahlensystemen ihren Ausdruck finden. Ein derartiger Fall ist in Fig. 2 dargestellt. Die betreffende Eizelle ist von der Narkose ergriffen worden, als sie sich zur ersten Reifungsteilung vorbereitete. Nach der Narkose konnte das Keimbläschen weder eine karyokinetische Phase ausbilden, noch sich als Kern restituieren; man sieht nämlich, dass die Wand des Keimbläschens nur teilweise zum Schwunde gebracht wurde. Vom Kerne nicht unterstützt, hat nun das Ooplasma die Errichtung von 2 Teilungszentren versucht. Dass eine entsprechend gerichtete Traktion tatsächlich aktiviert wurde, erweist sich aus dem Verhalten einer grossen, zufällig in der präsumptiven Teilungsebene befindlichen, rötlich gefärbten Vakuole, die unter der Wirkung der beiden Zentren in 2 Tröpfchen zerrissen wurde; nach einiger Zeit waren die Strahlungen spurlos verschwunden. Der geschilderte Fall ist am 22. August beobachtet und von Zeugen gesehen worden.

Eiteilungen, die durch chromatinlose Spindeln im Ooplasma hervorgerufen wurden, werden fast immer rückgängig gemacht, vielleicht weil sie fast immer dem Plateau'schen Gesetze der kleinsten Flächen widersprechen und weil die neugebildeten Elemente kernlos sind.

Bei entgegengesetzten Verhältnissen, wo das Ooplasma stärker als der Kern affiziert wurde, kommen Kernteilungen ohne Plasmateilung zur Auslösung. Es kann hierbei zweierlei stattfinden. Entweder werden Eizerschnürungen eingeleitet, worauf die Zellfurchen — häufig unter vorheriger, mehrfacher Brechung und Knickung — rasch und spurlos verstreichen, wie es bei dem in Fig. 5 abgebildeten Keime der Fall gewesen, oder es setzt die Plasmafurchung überhaupt erst nach mehrfacher Kernteilung ein. Erfolgt dies ziemlich früh, so zerfällt das Ei in Simultandreier oder gar in Simultanfünfer; bleibt die plasmatische Teilung längere Zeit aus, dann kommt es zur Knospenfurchung, welche gewöhnlich mit Sterroblastulation endigt.

Als ein besonders interessanter Fall ist ein Keim zu erwähnen, bei welchem zunächst ein aus drei hintereinander gelegenen, also wohl nicht koätanen Zellen bestehendes Dreierstadium zu sehen war, sodann zerfiel die mittlere Zelle in zwei Blastomere dritter Generation; die Zellteilung war aber stets nur zur Hälfte durchgeführt und die Zellgrenzen lediglich durch tiefe Furchen angedeutet (Fig. 6).

Die stärker affizierte und sich nur träge aufteilende linke Eihälfte übte auch offenbar auf das Plasma der anderen Hälfte mit normal tätigen Kernen einen hemmenden Einfluss aus. Auch diese, ein Polkörperchen tragende Eizelle hat sich nach Isolierung zu einer regelrechten Gastrula entwickelt.

20. Zweimal hat der Verfasser Gelegenheit gehabt, die Zweiteilung einer unreifen Oocyte mit intaktem Keimbläschen zu beobachten. Der Vorgang verdient wegen seiner theoretischen Tragweite mit besonderem Nachdruck hervorgehoben zu werden. Das eine Mal trat eine inaequale Plasmadurchschnürung auf, die das Keimbläschen bei unverminderter, intravesiculärer Pression förmlich einklemmte (Fig. 12); das andere Mal hat die Teilungswand, bei zentraler Lage des Keimbläschens, das Ei genau halbiert, um nach einiger Zeit zu verstreichen. Die erstere Oocyte ist in der dargestellten Form mit stark in die Länge gezogenem Keimbläschen abgestorben.

Die strahlungslose Zellzerschnürung bei intaktem Kerne beweist direkt und auf das deutlichste die wichtige, aktive Rolle des Zellplasmas beim Teilungsprozesse, eine Rolle, die auf Grund der vorher geschilderten und bei sonstigen Embryogenesen oft beobachteten Erscheinungen nur mittelbar gefolgert werden konnte. Ein Zentrenapparat ist auch in Zellen, wo er regelmässig auftritt, zur Durchführung des Teilungsprozesses des Cytoplasmas, als ein Zugmechanismus nicht erforderlich.

21. Der Verlauf der Furchung parthenogenetischer Asterideneier und ihre sich in weitesten Grenzen bewegende Mannigfaltigkeit eröffnen einen tiefen Einblick in das Wesen des Entwickelungsprozesses und verhelfen zu einer richtigen Bewertung der einzelnen morphogenetischen Vorgänge.

Das Problem der qualitativen Determinierung der Furchungselemente braucht nicht mehr diskutiert zu werden. Wenn man das Ergebnis von Druck-Versuchen mit Unterdrückung normaler Furchungsebenen und völligem Derangement der Blastomere dahin zu deuten trachtet, dass die unterdrückten Furchen nachgeholt werden und die derangierten Zellen den Weg zur normalen Position wiederfinden, so wird hier ein solcher Erklärungsversuch schon deshalb gegenstandslos, weil hier in jedem Falle überhapt neue Zelleinheiten geschaffen werden — es sei nur auf Ganzfurchung und Knospenfurchung hingewiesen — die jede Vergleichung, als inkom-

mensurable Grössen, unmöglich machen. Das eine ist ihnen allen gemeinsam, dass sie prospektiv gleichwertig sind und auch gleiche prospektive Bedeutung haben können. Was sie von einander unterscheidet, ist von Grösse und Form abgesehen lediglich ihr innerer, physiologischer Zustand, der es ihnen verwehrt, sich als homodyname energetische Systeme zu gebahren.

Die Furchung wird als „Sukzession aufeinander folgender Zellteilungen“ aufgefasst, „von denen eine jede in ihrem Charakter durch die Konstellation im Keim, Protoplasma und Nahrungsdotter bestimmt wird, wie sie sich aus dem Verlauf der vorangegangenen Teilung ergeben hat“. Es lässt sich nicht leugnen, dass jedes Blastomer die Ursachen für die Lage der Furchungsebene und für die Verteilung seiner Stoffe an die Deszendenten in sich selbst enthält, als auch dass die Ursache, warum ein Blastomer einen gewissen Entwickelungsweg verfolgt, für dasselbe zu einer äusseren Bedingung wird, während sie zu inneren Bedingungen des ganzen Keimes gehört. Dasjenige aber, was die Blastomere zu einem geordneten Zusammenspiel veranlasst, ist — wie sich der Verfasser in seinen „Morphogenetischen Studien“ ausgedrückt hat — ihre Vergangenheit. Nur sie verleiht ihnen eine Variationsmöglichkeit von verschiedenster Breite und gestaltet das Zusammensein sich selbständig entwickelnder Aktionszentren zu einem bestimmt gerichteten Regulationsprozesse.

Durch jene gemeinsame und gemeinsam variierte Vergangenheit wird die allgemeine Polarität der Embryogenese bedingt, die auch bei homolecithaler Eiarchitektur existiert und existieren muss. Die Aequipotenz der Zellen zeigt, dass diese Polarität keinen fixierenden, aber einen determinierenden Wert besitzt und im einzelnen von äusseren Bedingungen abhängt, wie vom postnarkotischen Zustande der Eiteile u. dgl., wonach sie über die jedesmalige absolute Polarität entscheidet. Es unterliegt gar keinem Zweifel, dass sie in einer und derselben Ontogenese die absolute, definitive Polarität des Keimes im Bedarfsfalle noch während der Furchung je nach den sich einstellenden Hindernissen mehrfach zu wechseln vermag. Nur so findet sich eine Erklärung für die scheinbare Zufälligkeit und Beziehungslosigkeit der Reifungs- und Furchungsebenen zu der Polachse des Embryos. Nur so wird auch ein normaler Ausgang der

Embryogenese verständlich, trotzdem die verschiedenartig individualisierten und physiologisch affizierten Blastomere den Rythmus und das Tempo der Aufteilung in verschiedenen Regionen des Keimes wechseln, hier vorauseilen, dort zurückbleiben. Denn auch bei extremen Abweichungen wird jede einzelne Zelle nur im Rahmen ihrer immanenten Fähigkeiten variieren, welche ihr in dem spezifischen Zellgefüge (mit spezifisch bestimmter Richtung morphogenetischer Vorgänge), dem die Zelle angehört, angestammt sind. Deshalb erscheint auch der Satz des Verfassers berechtigt und einzig zulässig, dass die Eifurchung keine blosse Zellenspaltung bedeutet, weil Furchung ohne gleichzeitige Differenzierung sowohl physiologisch als phylogenetisch undenkbar ist.

22. Diese theoretischen Ergebnisse parthenogenetischer Furchungsstudien decken sich nicht mit dem Standpunkte der Neo-Epigenetiker.

Wären die nacheinander folgenden Furchungsstadien lediglich durch die Konstellation des früheren Furchungsbildes bedingt und wäre der Ablauf der Furchungsteilungen einfach dem blinden (wenn auch bei normalem Geschehen stets demselben) Zusammenspiel äusserer Faktoren und nachträglich geschaffener Komplikationen überlassen, dann wäre ein normaler Ausgang einer so atypisch und abnorm einsetzenden Morphogenie, wie dies oben an einer Reihe von Fällen dargestellt wurde, nicht nur unwahrscheinlich, sondern unbedingt ausgeschlossen.

(*Sonstige Beobachtungen*).

23. Obgleich die weiteren Schicksale der Blastulen in den Plan dieser Untersuchungen nicht mehr gehören, so sei dem Verfasser mit Rücksicht auf das sub 21. und 22. Angeführte die Bemerkung gestattet, dass die Regulationsprozesse aberranter, pathologischer Larven hauptsächlich auf zweierlei Vorgängen beruhen.

Einerseits handelt es sich um Aufarbeitung des massiven Plasmamateriales, welches die nur superfizial abgefurchten Keime nach Knospungsfurchung ausfüllt. Solche Sterroblastulae besitzen gewöhnlich eine sehr unregelmässige, höckerige, oft birnförmig-höckerige Gestalt, wenn das Ei bei den ersten Zerklüftungsversuchen die erlangte monströse Form bei rein superfizialer Blastomerenbildung

nicht mehr abzuändern vermochte. Auch das Blastoderm ist in der Regel aus sehr ungleichen Zellen zusammengesetzt und stellenweise dünn, stellenweise sehr dick oder gar mehrschichtig. Das ungefurchte Ooplasma wird partienweise einem körnigen Zerfall unterworfen, auch einzelne zelligen Elemente können auf diese Weise rückgebildet werden, bis eine Leibeshöhle geschaffen und dem Blastoderm plastische Umbildung ermöglicht wird.

Andererseits werden bei abnormen Larven sehr oft einzelne Zellen aus dem Epithelialverbande losgelöst und nach aussen ausgeschieden. Zuweilen ist dann die Blastula mit den abgerundeten Zellen nach Art einer Maulbeere bedeckt. Meistens gehen solche Exemplare zu Grunde. Nur bei einigen wenigen Stücken, bei denen der Ausscheidungsprozess erst begonnen hat, gelang es bei sorgfältiger, lange dauernder Isolierzucht in beträchtlichen Wassermengen lebensfähige Larven zu erhalten.

24. Es wurden auch Versuche mit Merotomie angestellt. Der Verfasser hat entweder den Keimen einen Teil der Blastomere direkt weggeschnitten, oder wie das in Fig. 11 abgebildete, etwa 90-zellige Stadium — durch Zusatz von destilliertem Wasser zum Platzen gebracht. In normales Seewasser zurückversetzt, pflegen solche Keime eine beträchtliche Zahl von Zellen beim Schliessen der Wunde abzustossen. Die frei gewordenen Blastomere runden sich ab und können eine Zeit lang am Leben bleiben; solche die in der Teilung begriffen waren, sind imstande, den Prozess zu Ende zu bringen.

Merotomie gelingt noch bei Stadien von über 500 Zellen; ein neuerlicher Beweis des hohen Regulationsvermögens der Asteridenkeime.

25. Es wurde schliesslich Vitalfärbung der Eier und Keime mit Neutralrot versucht. Der Farbstoff wird leicht aufgenommen und übt auf den Fortgang der Entwickelung keinen nachteiligen Einfluss aus.

Methylenblau wird hingegen von *Asterias* sehr schlecht vertragen.

Zusammenfassend mögen einige der beobachteten Tatsachen noch kurz verzeichnet werden:

A) Die Narkose der Asterideneier mit CO_2 beugt dem Eintritte

der Chreozygie vor und wirkt bei $1^1/_2$-stündiger Dauer niemals deletär (4).

B) Zu postnarkotischen Erscheinungen gehören kleine Vorwölbungen und Plasmahöcker, wie sie durch Einwirkung eines hypotonischen Mediums hervorgerufen werden (19).

C) Die Oocyte von *Asterias* verhält sich wie eine anaxone Zelle (8).

D) Die Polkörperchen etablieren keine Polarität der Oocyte (12).

E) Der Ort der Ausstossung der Polkörperchen hängt nicht ab von der Schwerkraft (6).

F) Die Polkörperchen sind der Eizelle prospektiv, morphologisch und physiologisch gleichwertig; auch sie können durch CO_2-Narkose zur Furchung veranlasst werden (11, 17).

G) Die Reifungsteilungen sind nicht mit einer spezifisch qualitativen Reduktion des Idioplasmas der Eizelle verbunden (9).

H) Zwischen der Oocyte und dem Reifei besteht kein prinzipieller Gegensatz (9).

I) Parthenogenetische Eientwickelung hängt von dem ausbleibenden oder stattfindenden Reifungsprozesse gar nicht ab (7).

J) Das Ooplasma hat das Vermögen Centrosphären zu bilden und kernlose Blastomere abzuschnüren (19).

K) Der Zellleib vermag ohne Strahlungsapparate und ohne Beteiligung des Kernes aktiv echte Teilungsprozesse auszulösen (20).

L) Die Richtung der ersten Furchungsebene wird nicht durch die Schwerkraft beeinflusst (16).

M) Die erste Furchungsebene macht die Eizelle weder monaxon noch heteropol (14, 16).

N) Im 8-zelligen und 16-zelligen Stadium sind die Blastomere noch nicht polar (als animale und vegetative) determiniert (18).

O) Weder verschiedene Grösse schwesterlicher Blastomere noch ihre Verlagerung noch Unterschiede in ihrem Furchungstempo beeinflussen den Ausgang der Embryogenese (18).

P) Ein bis über 500-zelliges Stadium besteht aus prospektiv aequipotenten Blastomeren (24).

Q) Bilateralsymmetrie kann erst nach beendeter Blastulation etabliert werden (14, 24).

Über das Verhalten der Kerne, insbesondere des Chromatins, und über innere Zellvorgänge soll in einer späteren Mitteilung berichtet werden.

57. M. T. ESTREICHER. **O punktach topliwości tlenu i azotu.** *(Über die Schmelzpunkte von Sauerstoff und Stickstoff). (Sur les points de fusion de l'oxygène et de l'azote).* Mémoire présenté par M. A. Witkowski m. t.

I. Als ich im Jahre 1895 die Dampfdrucke des Sauerstoffs bestimmte [1]), war der niedrigste von mir bei dieser Gelegenheit erzielte Druck 7·5 mm und die entsprechende Temperatur 61·7° abs. = — 211·3°; der Sauerstoff verblieb dabei flüssig. Bei nachherigen Versuchen wurde der Dampfdruck sogar bis auf 2 mm erniedrigt, — wobei leider die Temperatur nicht genau gemessen werden konnte — ohne jedoch eine Erstarrung der Flüssigkeit herbeizuführen [2]); es hat sich bloss gezeigt, dass die Temperatur dabei — 220° nicht erreicht. Es würde kaum möglich sein, eine weitere Temperaturerniedrigung mit Hilfe der Dampfdruckerniedrigung zu erzielen; infolgedessen konnte der Erstarrungspunkt des Sauerstoffs nicht gemessen werden.

Erst nachdem es gelungen war, den Wasserstoff mit Leichtigkeit zu verflussigen, ist es möglich geworden, Sauerstoff zur Erstarrung zu bringen und die entsprechenden Druck- und Temperaturumstände zu bestimmen. Es hat sich gezeigt, dass Sauerstoff in der Temperatur des siedenden Wasserstoffs einen festen Körper bildet [3]), dessen Dampfspannung verschwindend klein ist, was übrigens zu erwarten war. Um die Dampfspannung bei dem Schmelzpunkte zu bestimmen, bediente ich mich des in der nebenstehenden Figur 1 schematisch abgebildeten Apparates.

Das Gas, welches aus chemisch reinem Kaliumchlorat dargestellt wurde, passierte zuerst eine weite Glasröhre von ca. 30 cm Länge, die mit Glaswolle gefüllt und mit einem Asbeststopfen versehen war; sie diente zum Zurückhalten des mitgerissenen Kaliumchlorat- und -chloridstaubes. Darauf ging das Gas durch eine U-Röhre mit Glasperlen und Kalilauge, dann durch eine U-Röhre mit kleinen Stückchen Kaliumhydroxyd und gelangte schliesslich durch eine U-Röhre mit Phosphorpentoxyd und ein kleines mit Quecksilber gefülltes Gasometer zu einem Dreiweghahn, dessen andere Enden mit einer Luftpumpe, bezw. mit der Abzweigung *a*

[1]) Bull. Intern. 1895. p. 203. — Phil. Mag. **40**, 454, 1895.

[2]) Olszewski, Ein Versuch, das Helium zu verflüssigen. Bull. Intern. **1896**, p. 303. — Wied. Ann. **59**, 189, 1896.

[3]) Z. B. Dewar. Ann. chim. phys. **14**, 149, 1898.

des abgebildeten Apparates in Verbindung standen. Der Apparat bestand aus einem ca. 38 mm weiten Glasrohre *b*, welches als Reservoir diente; unten war es mit einem Röhrchen von kleiner lichter Weite (ca. 2 mm) verbunden, welches in einer Kugel *d* endete.

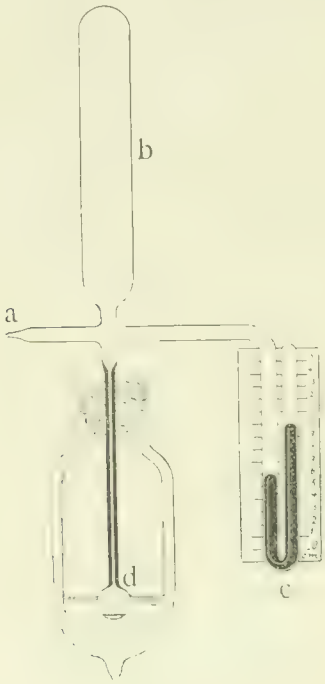


Fig. 1.

Den inneren Druck (wenn gehörig niedrig), zeigte das seitlich angebrachte Vakuummeter *c* an. Der Fassungsraum des ganzen Apparates betrug etwa 220 cm³.

Man liess den in einer Retorte aus schwer schmelzbarem Glase entwickelten Sauerstoff zuerst frei in die Atmosphäre entweichen, bis angenommen werden konnte, dass alle Luft, welche in den Reinigungsapparaten enthalten war, verdrängt wurde; das auf diese Weise gereinigte Gas war vollkommen geruchlos, enthielt also keine Chlorverbindungen, welche immer beim Zersetzen von Kaliumchlorat durch Erhitzen entstehen. Dieses reine Gas wurde darauf in den Erstarrungsapparat, welcher inzwischen leergepumpt wurde, geleitet; sodann wurde das Hineinlassen des Gases in den Apparat

unterbrochen; man liess dasselbe sich im Gasometer ansammeln, und evakuierte unterdessen durch entsprechende Umstellung des Dreiweghahnes den Erstarrungsapparat. Dieser Vorgang wurde einige Male wiederholt, bis man sicher sein konnte, dass der Apparat mit Sauerstoff gehörig ausgespült und nunmehr mit reinem Gas gefüllt war; darauf wurde der Apparat bei *a* abgeschmolzen.

Wasserstoff wurde in einem der von Prof. Olszewski konstruierten Apparate verflüssigt; es war derjenige, dessen Beschreibung sich im Maihefte dieses Bulletins befindet. Die Flüssigkeit war ganz klar und erlaubte die darin getauchten Gegenstände zu beobachten.

Um den Erstarrungsdruck des Sauerstoffs zu bestimmen, wurde zuerst das kapillare Röhrchen, welches die Kugel *d* trägt, mit Schafwolle umwickelt, damit diese eine Art Stopfen bildet. Darauf wurde ein Vakuumgefäss mit flüssigem Wasserstoff unter die Kugel *d* des in einer Klemme gehaltenen Apparates untergestellt. Nun wurde der Schafwollestopfen des Vakuumgefässes entfernt und die Kugel *d* in das Innere des Vakuumgefässes eingeführt, so dass die Mündung des Gefässes nunmehr durch die Wolle an dem Kugelhalse verstopft wurde. Diese Massregel ist bekanntlich unumgänglich nötig, da sonst Luft in das Vakuumgefäss förmlich hineinschneit, den flüssigen Wasserstoff undurchsichtig macht und ihn binnen weniger Minuten zum Verdampfen bringt. Die Kugel *d* brachte man in Berührung mit flüssigem Wasserstoff; nach wenigen Sekunden kühlte sie sich so weit ab, dass das Gas aus dem ganzen Apparate sich an dem Kugelboden im festen Zustande absetzte und das Quecksilber in den beiden Manometerschenkeln auf gleichem Niveau zu stehen kam: im Apparat war kein Druck vorhanden, es bestand darin ein vollkommenes Vakuum. Nun wurde das Vakuumgefäss so weit gesenkt, dass die Kugel *d* aus der Flüssigkeit herauskam und sich nunmehr nur im Wasserstoffdampfe befand; derselbe besass zwar eine niedrige Temperatur, konnte aber die Kugel nicht ganz vor Erwärmung schützen; infolgedessen stieg die Temperatur des festen Sauerstoffs, was sich durch Ansteigen des Druckes im Manometer offenbarte. Bald schmolz auch der erstarrte Sauerstoff und während des Schmelzens sah man die Quecksilbersäule im Manometer, welche bis nun langsam aber stetig stieg, auf kurze Zeit stehen bleiben. Gleichzeitig konnte man das

Schmelzen des Sauerstoffs im Inneren der Kugel mit dem Auge beobachten.

Der mittlere Druck, welcher bei sechs Bestimmungen erhalten wurde, beträgt 0·87 mm.

Wir können also den Schmelzdruck des Sauerstoffs zu **0·9** mm annehmen.

II. Um die Schmelztemperatur des Sauerstoffs zu bestimmen, war es nötig, mit grösseren Mengen dieses Körpers zu operieren, um in der festflüssigen Masse ein Heliumthermometer unterbrin-

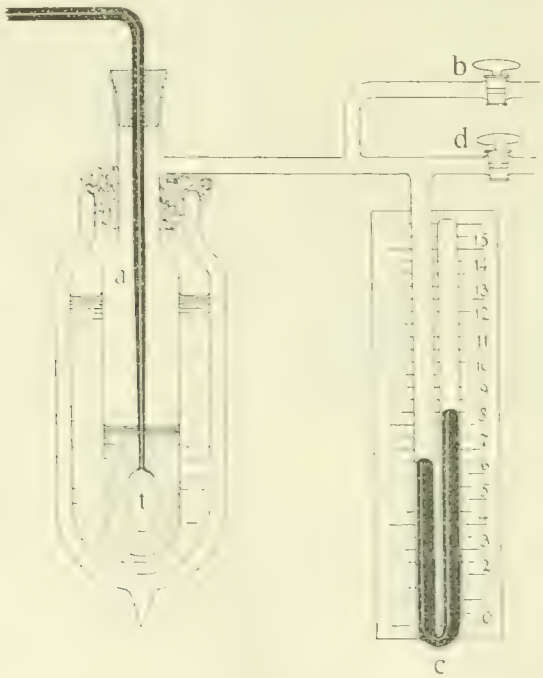


Fig. 2.

gen zu können. Zu diesem Zwecke wurde der nebenstehende Apparat angewendet (Fig. 2).

An den Hals des einwandigen Gefässes *a* war ein T-Rohr angelötet; dieses war durch die Abzweigung *b* mit dem Sauerstoffentwickelungsapparate (wie oben beschrieben), durch die andere Abzweigung mit einem Quecksilbermanometer *c* sowie einem Hahne *d* verbunden. Das Gefäss *a* besass etwa 50 cm³ Fassungsraum und

in seiner sich konisch erweiternden Mündung steckte ein Kautschukstopfen, durch dessen Bohrung das kapillare Röhrchen eines Heliumthermometers *t* ging. Dieses Thermometer war dasselbe, welches im hiesigen Laboratorium bereits zu wiederholten Malen behufs Temperaturmessung angewendet wurde, so z. B. von Prof. Olszewski zur Messung der Temperaturen in seiner Abhandlung über die kritische und die Siedetemperatur des Wasserstoffs und über den Versuch, das Helium zu verflüssigen [1]), und von mir bei der Messung der Dampfdrucke des Sauerstoffs und der Schmelz- und Siedepunkte der Halogenwasserstoffe [2]), mit dem Unterschiede, dass es nunmehr mit reinem Helium gefüllt war, welches von Ramsay in 1895 aus Cleveït dargestellt und jetzt durch Abkühlen mit flüssigem Wasserstoff von den schwereren Verunreinigungen befreit wurde. Das Gas befand sich im Thermometer unter einem Anfangsdrucke (bei 0°) von 1158·3 mm; das Volum der Thermometerkugel beträgt 1·5269 cm³.

Beim Ausführen des Versuches wurde Sauerstoff in dem oben beschriebenen Apparate entwickelt und gereinigt und darauf in das Gefäss *a* geleitet, welches sich in einem Vakuumgefäss mit flüssiger Luft befand. In der Temperatur der siedenden Luft verflüssigt sich Sauerstoff sehr leicht, ohne dass man es nötig hätte, das Bad durch Druckerniedrigung abzukühlen. Nachdem ein wenig Sauerstoff im Gefässe *a* bereits flüssig war, wurde der zum Gasentwickelungsapparate führende Hahn *b* geschlossen, der Hahn *d*, welcher das Innere des Gefässes mit der Atmosphäre verband, geöffnet und das Vakuumgefäss mit flüssiger Luft gesenkt. Auf diese Weise wurde der flüssige Sauerstoff zum Verdampfen gebracht und man konnte sicher sein, dass sich im Inneren keine Luft (kein Stickstoff) mehr befindet, umsomehr als dieser Vorgang noch zum zweiten Mal ausgeführt wurde. Nunmehr wurde der Hahn *d* definitiv geschlossen und mittels des Hahnes *b* regulierte man den Sauerstoffzufluss so, dass sich dieses Gas ungefähr so schnell verflüssigte, als es entwickelt wurde.

Dieses wurde so lange fortgesetzt, bis sich eine genügende Menge Flüssigkeit angesammelt hatte, um die ganze Thermometerkugel *t* zu bedecken, und um noch eine etwa 1—1·5 cm hohe

[1]) Bull. Intern. Crac., **1895**, 200; **1896**, 306.
[2]) Bull. Intern. Crac., **1895**, 207; **1896**, 325.

Schichte darüber zu bilden. Nun wurde auch der Hahn *b* geschlossen, der Sauerstoffentwickelungsapparat davon abgeschnitten und das Vakuumgefäss mit flüssiger Luft durch ein solches mit flüssigem Wasserstoff ersetzt. Bereits nach kurzer Zeit kühlte sich der Sauerstoff so weit ab, dass das Manometer *c* (welches in diesem Falle nicht zu genauen Messungen, sondern behufs Orientierung angewendet wurde) beinahe auf Null sank und auch der Druck des Gases im Thermometer sich bedeutend erniedrigte. Gleichzeitig konnte man das Erstarren des Sauerstoffs mit dem Auge verfolgen. Nachdem man gesehen hatte, dass sich die ganze Menge der Flüssigkeit in einen festen Körper umgewandelt, wurde das Vakuumgefäss gesenkt, so dass der erstarrte Sauerstoff sich erwärmte und zu schmelzen anfing. Parallel zur Erwärmung des Sauerstoffs ging selbstverständlich auch das Steigen des Quecksilbers im Thermometer; während des Schmelzens verlangsamte sich die Aufwärtsbewegung des Quecksilbers und dieses blieb kurze Zeit auf einer Höhe stehen, welche abgelesen und notiert wurde. Die Feststellung dieses Punktes war nicht ganz leicht, da er wegen der Unmöglichkeit, die festflüssige Masse zu rühren, nicht ganz scharf ausgeprägt war. Es wurde aber dieser Vorgang einige Male wiederholt, so dass man mehrere Ablesungen vornehmen und so den Schmelzpunkt innerhalb eines Grades feststellen konnte. Die Thermometerkugel war unter diesen Umständen an ihrem unteren Ende noch von erstarrtem Sauerstoff umgeben, während ihr grösster Teil in schmelzenden Sauerstoff tauchte; infolgedessen ist es nicht unmöglich, dass die beobachtete Temperatur ein wenig zu niedrig ausgefallen ist. Der Druck im Thermometer betrug im Mittel aus 7 Bestimmungen 205·2 mm, was nach Anbringung der nötigen Korrektionen und unter Zugrundenahme des von Travers und Jaquerod[1]) bestimmten Druckkoëfficienten für Helium gleich 0·00366255 und des von Travers, Senter und Jaquerod[2]) bestimmten Ausdehnungskoëffizienten für Glas 0·0000219 als Schmelzpunkt von Sauerstoff — 226·98° [46·05° [3]) abs.] oder nach Weglassung der Dezimalstellen 46° abs. = — 227° ergibt.

[1]) Phil. Trans., **200**, 133, 1902.

[2]) Ibid. S. 138.

[3]) Dem Druckkoëffizienten gemäss, ist der Eispunkt an der absoluten Skala mit Travers zu 273·03° angenommen.

Den Schmelzpunkt von Sauerstoff kann man zu 46° abs. und 0·9 mm Druck annehmen.

III. In ganz ähnlichen Apparaten wie der Fig. 1 abgebildete wurde auch der Schmelzdruck des Stickstoffs bestimmt, und zwar habe ich dabei sowohl den „chemischen" Stickstoff wie auch den „atmosphärischen" untersucht.

Der „chemische" Stickstoff wurde aus Natriumnitrit und Salmiak entwickelt, und zwar wurde eine Lösung von chemisch reinem Salmiak mit dem halben Gewichte Kaliumbichromat zum Kochen erhitzt und in die siedende Flüssigkeit eine Auflösung von chemisch reinem Natriumnitrit in einer gleichen Menge Wasser mittels eines Hahntrichters eingetröpfelt. Man erzielte auf diese Weise einen gleichmässigen Gasstrom, welcher zuerst durch eine Waschflasche mit Natriumhydroxydlösung ging, darauf durch einen langen Verbrennungsofen, dessen Röhre zur Hälfte ihrer Länge mit Kupfer, zur anderen Hälfte mit Kupferoxyd gefüllt war; der Ofen wurde zur Rotglut erhitzt. Vom Ofen gelangte das Gas in ein U-Rohr mit Kalistückchen und dann in ein solches mit Phosphorpentoxyd. Schliesslich wurde das Gas durch Vermittelung eines Dreiweghahnes in ein kleines Quecksilbergasometer von dem von Travers in seinem Werke „Study of Gases", S. 102. Fig. 70 abgebildeten Typus geleitet; mit Hilfe des erwähnten Dreiweghahnes konnte man es auch in die Atmosphäre, sei es aus dem Entwickelungsapparate, sei es aus dem Gasometer entweichen lassen.

Zuerst liess man es frei in die Luft entweichen; das ausströmende Gas war vollkommen geschmack- und geruchlos; eine zu wiederholten Malen ausgeführte Analyse desselben bewies, dass auch kein Sauerstoff und kein Kohlendioxyd vorhanden war, wenigstens in keiner nachweisbaren Menge. Nachdem man also sicher war, dass das Gas vollkommen rein ist, stellte man den Dreiweghahn und füllte mit Stickstoff etwa die Hälfte des über ein Viertel Liter fassenden Gasometers an. Dieses Gas liess man wieder durch Umstellen des Dreiweghahnes in die Luft entweichen und wiederholte diese Manipulation etwa sechsmal, so dass das Gasometer ganz vollkommen mit chemisch reinem Stickstoff ausgespült wurde. Schliesslich füllte man das Gasometer ganz mit Stickstoff aus, nahm es vom Stickstoffentwickelungsapparate ab und schritt zum Füllen des Schmelzdruckbestimmungsapparates.

Zu diesem Zwecke wurde ein T-Rohr einerseits an eine Töpler'sche Luftpumpe, andererseits an den Schmelzdruckbestimmungsapparat angelötet; der dritte Schenkel des T-Rohres wurde an den Hahn des Quecksilbergasometers mit Stickstoff angeschmolzen. Nachdem der Apparat vollkommen luftleer ausgepumpt wurde, schloss man den Hahn an der Luftpumpe und öffnete den am Gasometer; nachdem das Gas in den Apparat ganz hineingedrungen war, wurde die Verengung bei *a* mit einer Lötrohrflamme erhitzt und der Apparat von der Luftpumpe abgeschmolzen.

Darauf verfuhr ich mit dem Apparate in derselben Weise, wie es im § I über die Bestimmung des Schmelzdruckes von Sauerstoff geschildert wurde, und erzielte in zwei Versuchsreihen zu 8 bezw. zu 5 Ablesungen folgende Werte:

I. 93·4, 93·6, 93·5, 93·6, 93·5, 94·0, 93·5, 93·2 mm.
II. 93·6, 93·5, 93·3, 93·5, 93·6 mm.

Im Mittel also aus den obigen dreizehn Ablesungen haben wir 93·5 mm als den Schmelzdruck des chemisch reinen Stickstoffs. Der grösste Unterschied zwischen einzelnen Ablesungen beträgt 0·8 mm.

IV. Der atmosphärische Stickstoff wurde bereitet, indem man Luft aus einem Gasometer durch eine Waschflasche mit konzentrierter Schwefelsäure, durch einen Verbrennungsofen, in welchem sich rotglühendes Kupfer befand, und durch zwei U-Röhren streichen liess, welche Kaliumhydroxydstücke, bezw. Phosphorpentoxyd enthielten. Darauf wurde das resultierende Gas in dem oben beschriebenen Gasometer aufgefangen und in ganz analoger Weise wie oben, behandelt, um es in den Messapparat einzuschliessen. Das Gas befand sich unter einem niedrigeren Drucke als im vorigen Fall, wo der Druck dem atmosphärischen gleich war; hier betrug er bloss etwa 600 mm und diesem Umstande (d. i. der kleineren Gasmasse, welche sich im Apparate befand) ist es vielleicht zuzuschreiben, dass der Schmelzdruck nicht so leicht zu bestimmen war, da die Unterbrechung in der Aufwärtsbewegung des Quecksilbers nicht so scharf ausfiel. Die Ablesungen der beiden Versuchsserien unterschieden sich im Mittel um 0·6 mm. Es folgen hier die Ergebnisse der beiden Ablesungsserien:

I. 90·3, 90·3, 89·7, 89·4, 89·0, 89·4, 89·4 mm.
Im Mittel 89·6 mm.
II. 90·0, 90·2, 90·4, 90·2, 90·2 mm.
Im Mittel 90·2 mm.

Da die zweite Ablesungsserie unter günstigeren Umständen vorgenommen wurde und die Bestimmungen mit grösserer Genauigkeit ausgeführt werden konnten, lege ich der zweiten Serie ein grösseres Gewicht bei. Infolgedessen kann man als den Schmelzdruck des atmosphärischen Stickstoffs 90·2 mm annehmen.

V. Mit der Bestimmung des Schmelzpunktes des „chemischen" Stickstoffs haben sich bereits im vorigen Jahre Fischer und Alt befasst [1]). Diese beiden Forscher verflüssigten eine grössere Menge Stickstoff auf einmal (ca. 100 cm³ Flüssigkeit) und bestimmten sowohl die Dampfdrucke vom atmosphärischen Drucke abwärts wie auch die entsprechenden Temperaturen mittels eines Wasserstoffthermometers. Ihre Messungen sind also an grossen Flüssigkeitsmengen ausgeführt worden und verdienen infolgedessen die grösste Beachtung, umsomehr als sie auch in sonstigen Beziehungen mit grösster Sorgfalt ausgeführt waren. Die Verfasser heben jedoch hervor (S. 131), dass eine Verunreinigung des Stickstoffs durch Sauerstoff war, welcher mit derL uft in den Apparat etwa hineingelangen könnte, nicht ausgeschlossen war; auch die Analyse (S. 118) zeigte Spuren von einer Sauerstoffverunreinigung, welche allenfalls geringer war, als 0·2%. Die hier geschilderte Methode besitzt den Vorteil, dass der Stickstoff vor einer etwaigen Verunreinigung mit Sauerstoff geschützt war, da er nicht über Wasser aufgefangen wurde, und von der Atmosphäre durch Zuschmelzen des Apparates vollständig abgeschnitten war. In ihrer ersten Abhandlung geben sie keinen Schmelzdruck an, sondern nur den Erstarrungsdruck, welcher 86 ± 4 mm beträgt; in der zweiten geben sie sowohl den Erstarrungsdruck an, welcher 89·2 ± 0·6 mm beträgt, wie auch den Schmelzdruck — 90·9 ± 0·6 mm; im Mittel 90·0 ± 0·3 mm. Dieser mittlere Druck ist also um 3·5 mm niedriger als der von mir beobachtete; die Differenz des Schmelzdruckes selbst und meiner Bestimmungen ist bloss 2·6 mm. Dieser Unterschied fällt zu Gunsten der hier be-

[1]) Sitz.-Ber. d. math. phys. Klasse d. Münchener Akad., Bd. 32, S. 113 und in demselben Bd. S. 209, 1902.

schriebenen Methode aus, da ein höherer Druck einem reineren Körper entspricht. Der Druck von 90·0 mm ist noch niedriger als der Schmelzdruck des atmosphärischen Stickstoffs nach meinen Bestimmungen. Angesichts dessen aber, dass die Bestimmungen von Fischer und Alt unter anderen Umständen und nach einer ganz anderen Methode ausgeführt wurden als die meinigen, ist die Übereinstimmung der Resultate der beiden Untersuchungen als eine ganz zufriedenstellende anzusehen.

Die erste Bestimmung des Erstarrungspunktes des Stickstoffs und zwar des atmosphärischen, verdanken wir Olszewski, welcher im Jahre 1885 [1]) diesen Punkt zu — 214° und 60 mm angab. Diese Zahlen weichen von den von Fischer und Alt (— 210·52° und 90 mm) sowie von meinigen (93·5 mm bezw. 90·2 mm) beträchtlich ab; die wahrscheinliche Ursache dieser Abweichung wird weiter unten besprochen.

VI. Die trockene Luft besteht hauptsächlich aus drei Komponenten: Stickstoff, Sauerstoff und Argon; die übrigen treten in so winziger Menge auf, dass sie bei unseren Erwägungen vernachlässigt werden können. Nach den Bestimmungen von Kreusler enthält die Luft 20·91 Prozent Sauerstoff; der Rest, d. i. 79·09%, besteht aus 78·15% Stickstoff und 0·94% (genauer 0·937%, s. Travers Study of Gases, p. 116) Argon. Entfernen wir Sauerstoff aus der Luft, d. i. stellen wir atmosphärischen Stickstoff dar, dann erhalten wir ein Gemisch von 98·81 Volumprozenten Stickstoff mit 1·18 Volumprozenten Argon oder 100 Vol. Stickstoff und 1·199 Vol. Argon. Das Gewichtsverhältnis ist in diesem Falle: 98·33% Stickstoff und 1·67% Argon oder 100 Teile Stickstoff und 1·70 Teile Argon. Diese Zahlen werden uns erlauben, etwas näher in die Bedeutung des Unterschiedes der Zahlen für den chemisch reinen und den atmosphärischen Stickstoff einzugehen. Hätten wir nämlich ein Mittel, ausser den Schmelzdrucken noch die Schmelztemperaturen zu bestimmen, welche denselben entsprechen, dann würde es möglich sein, den Einfluss des Argons zahlenmässig auszudrücken.

Um dies zu erreichen, können wir uns der Methode von Ramsay und Young [2]) bedienen, welche erlaubt, aus zwei bekannten Pun-

[1]) C. R. **100**, 350.

[2]) Phil. Mag. (5), **21**, 33; 1886.

kten einer Dampfdruck-Kurve den ganzen Verlauf derselben zu berechnen. Man nimmt zu diesem Zwecke die Temperatur einer Flüssigkeit, deren Dampfspannungskurve genau bekannt ist, z. B. des Wassers, welche dem Dampfdrucke der untersuchten Substanz entspricht, und dividiert durch sie die Temperatur der Substanz; den erhaltenen Quotienten trägt man als Abszisse, die Temperatur des Wassers als Ordinate auf. Bestimmt man auf solche Weise mehrere Punkte, dann überzeugt man sich, dass sie alle auf einer Geraden liegen; eventuell kann mit Hilfe dieser Geraden die nicht ganz genau bestimmte Dampfdruckkurve korrigiert und ergänzt werden. Da die Linie eine Gerade ist, reichen zwei genau bestimmte Punkte aus, um alle anderen zu berechnen.

Für Stickstoff kennen wir in der Nähe des Erstarrungspunktes die Dampfdrucke, da sie ja von Fischer und Alt bestimmt worden sind. Ich bediente mich nur des Kurvenstückes, welches von diesen Verfassern in ihrer zweiten Abhandlung angegeben wurde, da sie diese Messungen für genauer und richtiger ansehen [1]). Aus diesen Zahlen erhalten wir die folgende Tabelle:

P_{mm}	T_{N_2} abs.	T_{aq} abs. [2])	$T_{N_2} : T_{aq}$
120	64·54°	328·44°	0·196505
110	63·85	326·63	0·195450
105	63·56	325·68	0·195161
100	63·22	324·69	0·194709
95	62·88	323·65	0·194284
89·2	62·40	322·39	$0·193802_5$

Trägt man die Zahlen in der dritten und in der vierten Rubrik als Ordinaten bezw. als Abszissen auf, dann bekommt man eine Reihe von Punkten, welche fast genau auf einer Geraden liegen; die kleine Abweichung kann leicht graphisch korrigiert werden.

Nun bestimmt man mittels der Tabelle der Dampfspannungen des Wassers, welche Temperaturen des Wassers den Drucken 90·2 mm, bezw. 93·5 mm entsprechen. Man erhält:

[1]) L. c. S. 213 und 214.

[2]) Nach Regnault's Messungen berechnet von Broch. Siehe Landolt und Börnstein, Phys. Chem. Tabellen, S. 53.

P		Temperatur
90·2 mm	entspricht	322·61° abs.
93·5 „	„	323·37° abs.

Es werden darauf auf der Geraden die Abszissen abgelesen, welche diesen Temperaturen als Ordinaten entsprechen; es sind dies die Zahlen:

$T_{aq.}$	$T_{N_2} : T_{aq.}$
322·61°	0·193915
323·37°	0·194197

Werden die einander entsprechenden Koordinaten mit einander multipliziert, dann erhält man die dazu gehörigen Temperaturen des Stickstoffs:

P	T_{N_2}
90·2 mm (atm.)	62·56° abs. = — 210·47°
93·5 mm (chem.)	62·79° abs. = — 210·24°

Der Unterschied also, welchen 1·70 g Argon in 100 g Stickstoff aufgelöst in dem Schmelzpunkte hervorbringt, beträgt 0·23°. Setzt man diesen Wert in die Formel:

$$E = \frac{\Delta T . g . M}{m . 100}$$

ein, wo ΔT die Temperaturerniedrigung, g die Menge des Stickstoffs, m die Menge und M das Molekulargewicht des Argons bedeutet, dann lässt sich die molekulare Gefrierpunktserniedrigung für Stickstoff berechnen. Von diesen Grössen sind alle direkt mit Sicherkeit bekannt, bis auf die Molekulargrösse des Argons im flüssigen bezw. gelösten Zustande; wir haben jedoch keinen Grund anzunehmen, dass sich dieses vollkommen inaktive Element im flüssigen Zustande polymerisiert; nach den vor einigen Jahren in diesem Laboratorium ausgeführten Versuchen zeigt das gasförmige Argon als thermometrische Substanz angewendet noch weit unterhalb des kritischen Punktes keine Abweichung von den einfachen Gasgesetzen. Es darf also mit grosser Sicherheit das Molekulargewicht des Argons zu 39·92 angenommen werden.

Aus den obigen Zahlen berechnet sich die molekulare Gefrierpunktserniedrigung des Stickstoffs zu 5·39. Es ist dieses eine sehr niedrige Konstante, die unter die kleinsten der bekannten Gefrierpunktserniedrigungen zu zählen ist; man muss aber bedenken, dass

diese Zahl für so tiefe Temperaturen nie gross sein kann, es sei denn, dass die Schmelzwärme des untersuchten Lösungmittels äusserst klein ist. Aus der van 't Hoffschen Formel:

$$E = \frac{0{\cdot}0198 \, . \, T^2}{C} \, .$$

wo T die Schmelztemperatur, C die Schmelzwärme bedeutet, berechnet sich mit Hilfe des oben gefundenen Wertes von E die Schmelzwärme zu 14·49 kal. = 60·44 Joule.

Werden die obigen Rechnungen unter Zugrundenahme des Wertes für den Schmelzdruck aus der I Versuchsserie im § IV durchgeführt, dann erhält man folgende Zahlen:

Schmelztemperatur = 62·53° = — 210·50°.
Unterschied vom chemischen Stickstoff = 0·26°.
E = 6·23.
C = 12·82 kal. = 53·47 Joule.

Es muss betont werden, dass die Zahlen, welche eben berechnet wurden, nicht als genau anzusehen sind, dass sie vielmehr nur einen annähernden Charakter besitzen, da ja eine Extrapolation solcher Art keinen streng richtigen Schmelzpunkt ergeben, wohl aber zur Orientierung dienen kann.

VII. Es erübrigt noch zu überlegen, was der Grund der Abweichung der Zahlen von Fischer und Alt sowie der von Olszewski von den bei dieser Untersuchung gefundenen ist. Allem Anschein nach ist er in der Verunreinigung des Stickstoffs durch Sauerstoff bezw. durch Argon zu suchen. Diese niedrigen Drucke, wenn sie durch Siedenlassen der Flüssigkeit unter vermindertem Drucke erzielt werden, erreicht man erst nach längerer Zeit, nachdem der grösste Teil der Flüssigkeit durch Wegkochen entfernt wurde und der rückständige Teil sich an den vorher in kleiner Menge vorhandenen Verunreinigungen stark angereichert hat. Der Stickstoff, dessen sich Fischer und Alt bedienten, enthielt anfangs nicht einmal 0·2% Sauerstoff; durch Abdestillieren des Stickstoffs stieg die Menge des Sauerstoffs so weit, dass der Schmelzpunkt der Lösung dem des atmosphärischen nach meiner Bestimmung ungefähr gleich kam; dieses beweist, dass die molekulare Menge des Sauerstoffs in diesem Falle ungefähr gleich war der molekularen Menge des Ar-

gons im atmosphärischen Stickstoff, d. i. dass das Volumprozent von Sauerstoff zu dieser Zeit ca. 1·2 betrug. Es wäre interessant gewesen, eine Analyse des Gases am Schluss des Experimentes auszuführen.

Olszewski, welcher seine Messungen zehn Jahre von der Entdeckung von Argon ausführte, wandte einen Stickstoff an, der von Haus aus verunreinigt war, und zwar, da er sich des atmosphärischen Stickstoffs bediente, mit 1·70 Gewichtsprozenten Argon. Das Gas wurde in einem Gasometer über Wasser aufbewahrt und dann mittels einer Nattererschen Kompressionspumpe in Stahlflaschen unter einem Drucke von etwa 60 Atmosphären hineingepumpt; es war bei dieser Arbeitsmethode auch eine Verunreinigung mit Luft, also mit Sauerstoff und mit Spuren von Argon, nicht ausgeschlossen. Die Menge dieser Verunreinigungen musste sich durch Abdestillieren von Stickstoff vergrössern, so dass Olszewski schliesslich beim Erstarrenlassen der Flüssigkeit die Temperatur 59° abs. und den Druck 60 mm erhielt. Da er in seiner Abhandlung die Dampfdrucke des Stickstoffs bestimmt hat, ist es möglich, mittels des Verfahrens von Ramsay und Young die Temperatur bis zur Dampfspannung 60 mm zu extrapolieren, und zwar auf Grund der von ihm angegebenen Zahlen. Die Gleichung der mittels der Temperaturen 77°, 80°, 84° und 87·5° (abs.)[1]) aufgestellten Extrapolationslinie ist:

$$y = 3348\,x - 321{\cdot}7,$$

wieder in Bezug auf die Dampfspannungen von Wasser nach Regnault und Broch. Die der Dampfspannung 60 mm entsprechende Temperatur ist für Wasser $+41{\cdot}7^0$ oder $314{\cdot}7^0$ abs. $= y$, woraus sich für x der Wert 0·1904 und die Temperatur des Stickstoffs zu $59{\cdot}85^0$ abs. oder $-213{\cdot}15^0$ ergibt; dieses bedeutet eine Differenz zwischen der extrapolierten und der gemessenen Temperatur von $0{\cdot}85^0$, was eine gute Übereinstimmung genannt werden darf, wenn man noch dazu bedenkt, mit welchen Schwierigkeiten man im Jahre 1885 bei Anstellung solcher Versuche zu kämpfen hatte.

[1]) Die Temperaturen sind der von Travers (Study of Gases, S. 242) berechneten Tabelle entnommen.

Krakau, I Chemisches Institut der Jagellonischen Universität.

Table par noms d'auteurs des matières

contenues dans le Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie.
(Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles).

Anneé 1903.

Balicka-Iwanowska (G.) Recherches sur la décomposition et la régénération des corps albuminoïdes dans les plantes 9.
Bruner (L.) *v.* Tołłoczko (St.).
Brzeziński (J.) Le chancre des arbres, et ses symptômes 95.

Cybulski (N.) Sur la théorie de l'origine des courants électriques dans les tissus des animaux et des plantes 622.

Dobrowolski (St.) La flore du vagin 82.
— Sur les cytotoxines placentaires 256.
Dziewoński (K.) Sur un nouveau hydrocarbure aromatique: le trinaphtylènebenzène ou décacyclène et sur un composé sulfuré rouge: le dinaphtylènethiophène 77.
— Sur un nouvel hydrocarbure aromatique: le décacyclène et sur un dérivé du thiophène de couleur rouge: le dinaphtylènethiophène 632.

Eisenberg (Ph.) Sur les lois quantitatives de la réaction entre les toxines et les antitoxines 260.
— Sur l'adaptation des microorganismes aux moyens de défense de l'organisme infecté 532.
Estreicher (T.) Sur les points de fusion de l'oxygène et de l'azote 831.

Friedberg (G.) Sur le bassin miocénique de Rzeszów 504.

Garbowski (T.) Sur le développement parthénogénétique des Astéries 810.
Gliński (K.) Les glandes à pepsine dans la partie supérieure de l'oesophage 740.
Godlewski (É.) père. Sur la formation des matières albuminoïdes dans les plantes 313.
Gorczyński (L.) Etudes sur la marche annuelle de l'insolation 465.
Gutwiński (R.) De algis, praecipue diatomaceis a Dre J. Holderer anno 1898 in Asia centrali atque in China collectis 201.

Heinrich (W.) Sur la fonction de la membrane du tympan 536.
Hetper (J.) *v.* Marchlewski (L.).

Janczewski (Éd.) Essai d'une disposition naturelle des espèces dans le genre Ribes L. 232.
— La sexualité des Groseillers (Ribes L.). 788.

Kowalewski (M.) Études helmintologiques, VII-me partie 517.
Kowalski (J.) *v.* Zdanowski (B.).

Kulczyński (Vl.) Aranearum et Opilionum species in insula Creta a Comite Dre Carolo Attems collectae 32.

Marchlewski (L.) Sur les causes de l'inactivité de l'acide antitartrique 7.
— Sur la phylloérytrine 638.
Marchlewski (L.) et **Hetper (J.)** Recherches sur la matière colorante du sang 795.
Maziarski (St.) Sur les rapports des muscles et de la cuticule chez les Crustacés 520.

Natanson (M.) Sur l'application des équations de Langrange dans la Théorie de la Viscosité 268.
— Sur l'approximation de certaines équations de la Théorie de la Viscosité 283.
— Remarques sur la théorie de la relaxation 767.

Olszewski (Ch.) Un appareil nouveau pour la liquéfaction de l'hydrogène 241.

Pawlewski (B.) Sur la réaction entre les oximes et le chlorure de thionyle et sur quelques constantes physiques du camphéronitryle 8.
— Sur une nouvelle synthèse directe du α-phénylbenzimidazole 227.
Pawlewski (Br.) et **Reutt (Ch.)** De la condensation des oximes avec les hydrazines et des propriétés des hydrazones 502.
Puzyna (J.) Snr les sommes d'un nombre infini de séries entières et sur le théorème de M. Mittag-Leffler 247.

Reutt (Ch.) *v.* Pawlewski (Br.).
Russjan (C.) Quelques propositions sur les Dèterminants 1.
— Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1e ordre. Première communication 425.
— Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1-er ordre 643.

Satke (L.) De l'état hygrométrique à Tarnopol 629.
Smoluchowski (M.) Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent 143.
— Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs 182.
Stekloff (W.) Sur la théorie des séries trigonométriques 713.

Tondera (F.) Contribution à la connaissance de la gaine d'amidon 512.
Tołłoczko (St.) et **Bruner (L.)** Sur la vitesse de dissolution des corps solides 555.

Wójcik (K.) La faune infraoligocène de Kruhel mały près de Przemyśl. (Couches de Clavulina Szabói). Les Foraminifères et les Mollusques 798.
Wrzosek (A.) Recherches sur les voies de passage des microbes du tube digestif dans les organes internes à l'état normal 759.

Załoziecki (R.) Sur la nitration des fractions du pétrole de la Galicie dont le point d'ébullition est peu élevé 228.

Zaremba (St.) Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité 85.

— Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité 380.

— Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène 403.

— Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation 594.

— Le principe des mouvements ralatifs et les équations de la mécanique physique (Réponse à M. Natanson) 614.

Zdanowski (B.) et **Kowalski (J.)** Nouvelle méthode pour la mesure des résistances électrolytiques liquides et plusieurs de ses applications 793.

Errata.

Page 391, formules (18), première équation, lisez:

$$p_i' - p = (\Pi - p)\, e^{-\frac{t'-t}{T_1}} + (p_i - \Pi)\, e^{-\frac{t'-t}{T}}$$

Page 391, formule (20), lisez:

$$\Pi' - p = (\Pi - p)\, e^{\frac{t'-t}{T_1}}$$

Page 408, formules (4); remplacez dans les valeurs des quantités p_{yz}, p_{zx} et p_{xy} la lettre λ par la lettre μ.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą
Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Leona Marchlewskiego.

Kraków, 1904. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

13 Stycznia 1904

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873 — 1902

Librairie de la Société anonyme polonaise
(Spółka wydawnicza polska)
à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 118 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Seances et travaux)*, in 8-vo, volumes II — XXXIII (vol. I épuisé). — 258 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III — XIII, XV — XLII, (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 276 k.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, vol. I—VI (115 planches, 1040 gravures dans le texte). — 77 k.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 27 k.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 10 vol. — 57 k.

Corpus antiquissimorum poëtarum Polóniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 4 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 4 k. Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 6 k. Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 3 c. — Petri Roysii carmina ed. B. Kruczkiewicz. 12 k.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI et XVII siècle)*, in 8-vo, 41 livr. 51 k. 80 h.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 162 k.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed Piekosiński. 20 k. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 32 k. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 30 k. — Vol. IV. Libri antiquissimi civitatis Cracov ed. Piekosiński et Szujski 10 k. Vol. V VII Cod diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 20 k. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed Prochaska. 20 k. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 10 k. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 10 k. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Iagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński. 10 k.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 11 (I—IV, VI—VIII, X, XI, XV, XVI, XVII) volumes. — 162 k.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 6 k. — Vol. II, Chronicorum Bernardi Varovii pars posterior ed. Szujski 6 k. Vol. III. Stephani Medekszа commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 6 k. — Vol VII, X, XIV, XVII Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed Chotlowski. 14 k. Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon 1587 ed A. Sokołowski 4 k. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 14 k. — Vol. XVI. Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 6 k.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 8 vol. — 48 k.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 156 k.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 10 k. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Ioannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 20 k. —

Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674 1683 ed. Waliszewski. 30 k. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 30 k. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 10 k. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 40 k. Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 10 c. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 6 k.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III — VI. — 102 k.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I, in 8-vo. — 15 k.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *Anciens monuments du droit polonais* in 4-to, vol. II—X. — 72 k.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 12 k. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 6 k. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507 -1531 ed. Bobrzyński. 6 k. — Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 12 k. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 16 k. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405 1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 6 k. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 2 k.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 8 k.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 170 k.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo. 41 vol. (319 planches). — 376 k.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 35 volumes (III. VI — XXXIII, 67 planches, vol. I. II. IV. V. épuisés). — 274 k. 50 h.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 12 livraisons (64 planches) (à suivre). — 114 k. 80 h.

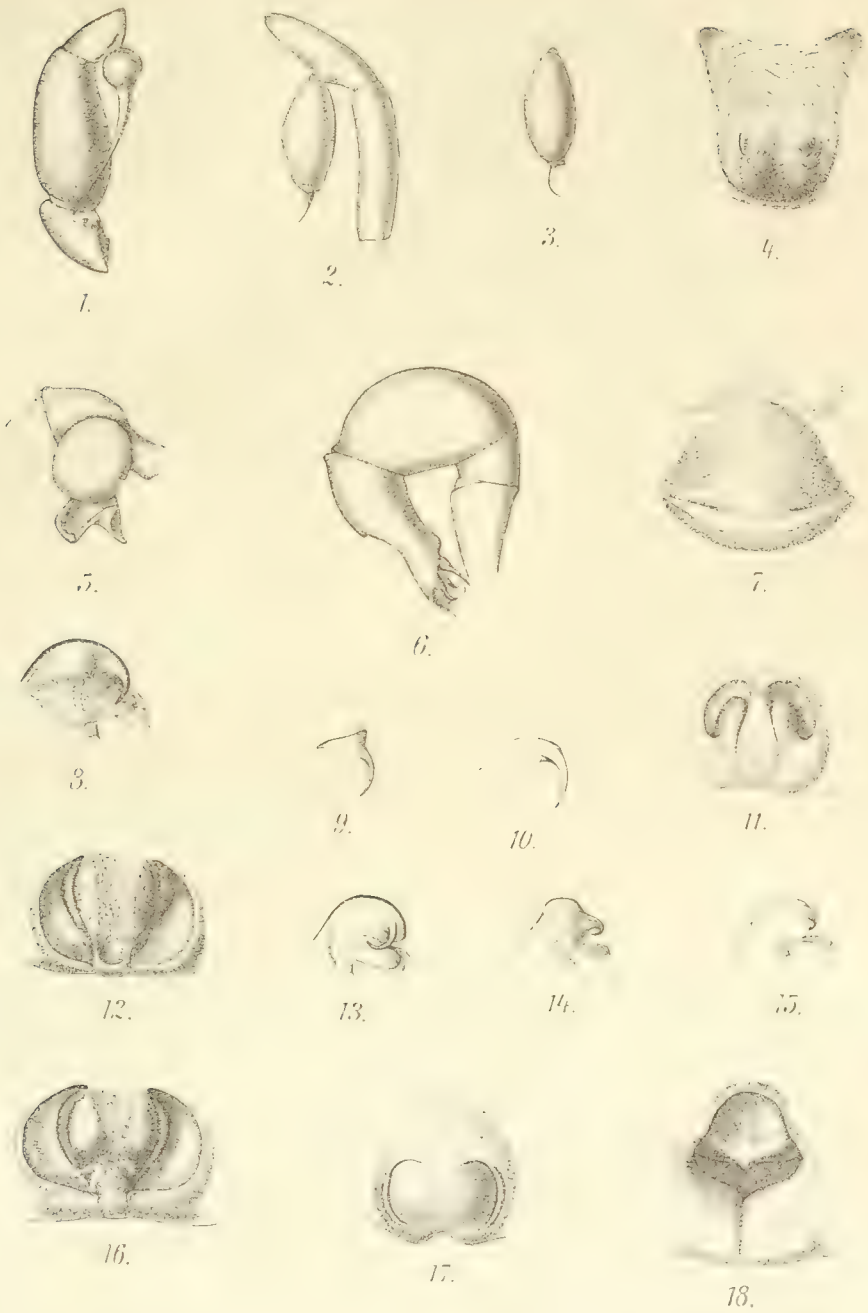
»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 125 k.

»Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Matériaux anthropologiques, archéologiques et ethnographiques*), in 8-vo, vol. I—V, (44 planches, 10 cartes et 106 gravures). — 32 k.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 8 k. Górski K., »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo. 1893. — 5 k. 20 h. »Historya jazdy polskiej« (*Histoire de la cavalerie polonaise*), in 8-vo, 1894. — 7 k. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Généalogie des Piasts*), in 4-to, 1896. — 20 k. Finkel L., »Bibliografia historyi polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*) in 8-vo, vol. I et II p. 1—2, 1891—6. — 15 k. 60 h. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sa vie et ses oeuvres*), lex. 8-vo, 1896. — 8 k. Federowski M., »Lud białoruski.« (*L'Ethnographie de la Russie Blanche*), in 8-vo, vol. I—II. 1897. 13. k.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1898 25 vol. 1873 épuisé) — 33 k. 60 h.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 4 k.



Vl. Kulczyński.

Druk. Univ. Jagell.

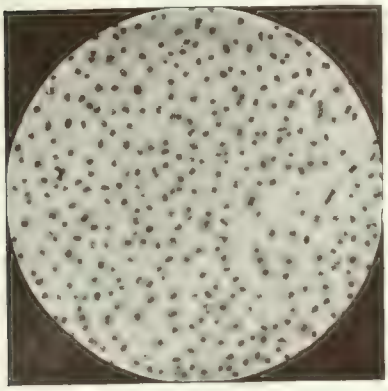


Fig. 1.

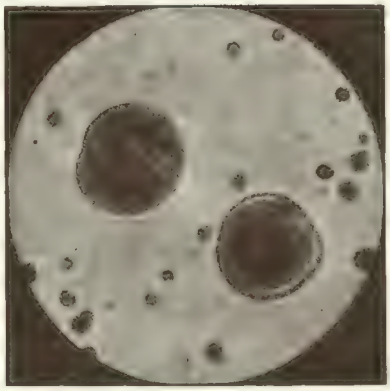


Fig. 2.

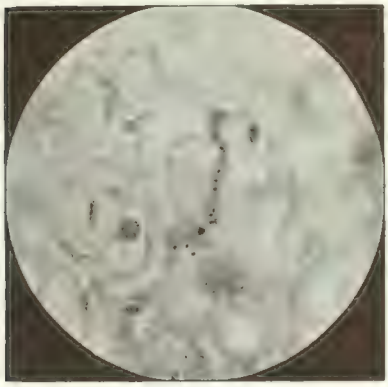


Fig. 3.

Fig. 4

Fig. 5.

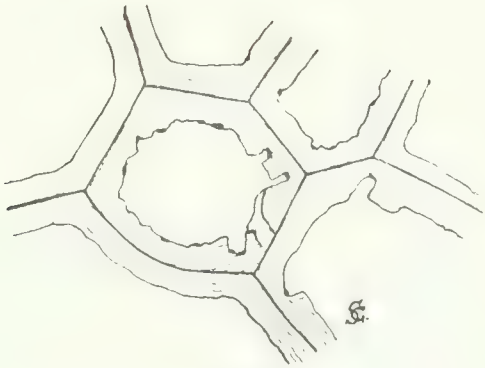


Fig. 6.

J. Brzeziński.

Druk. Uniw. Jagiell.

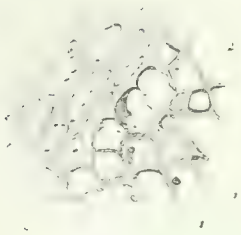


Fig. 7.

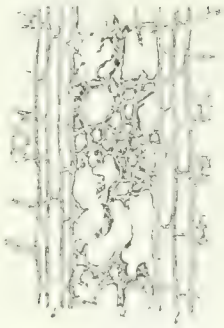


Fig. 8

Fig. 9

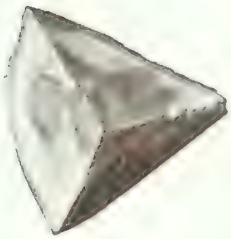


Fig. 11

Fig. 10.

J. Brzeziński.

Druk. Univ. Jag.

Fig. 12.

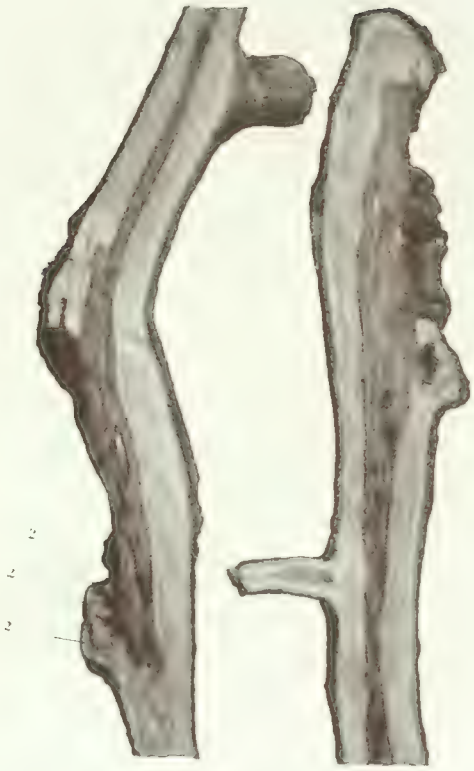


Fig. 13

Fig. 14.

Fig. 15

J. Brzeziński.

Druk. Univ.

Fig. 16.

Fig. 17.

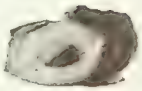


Fig. 20.

Fig. 23.

Fig. 22.

J. Brzeziński.

Druk. Uniw. Jagiel.

Fig. 18.

J. Brzeziński.

Druk. Uniw. Jagiell.

Fig. 19

J. Brzeziński.

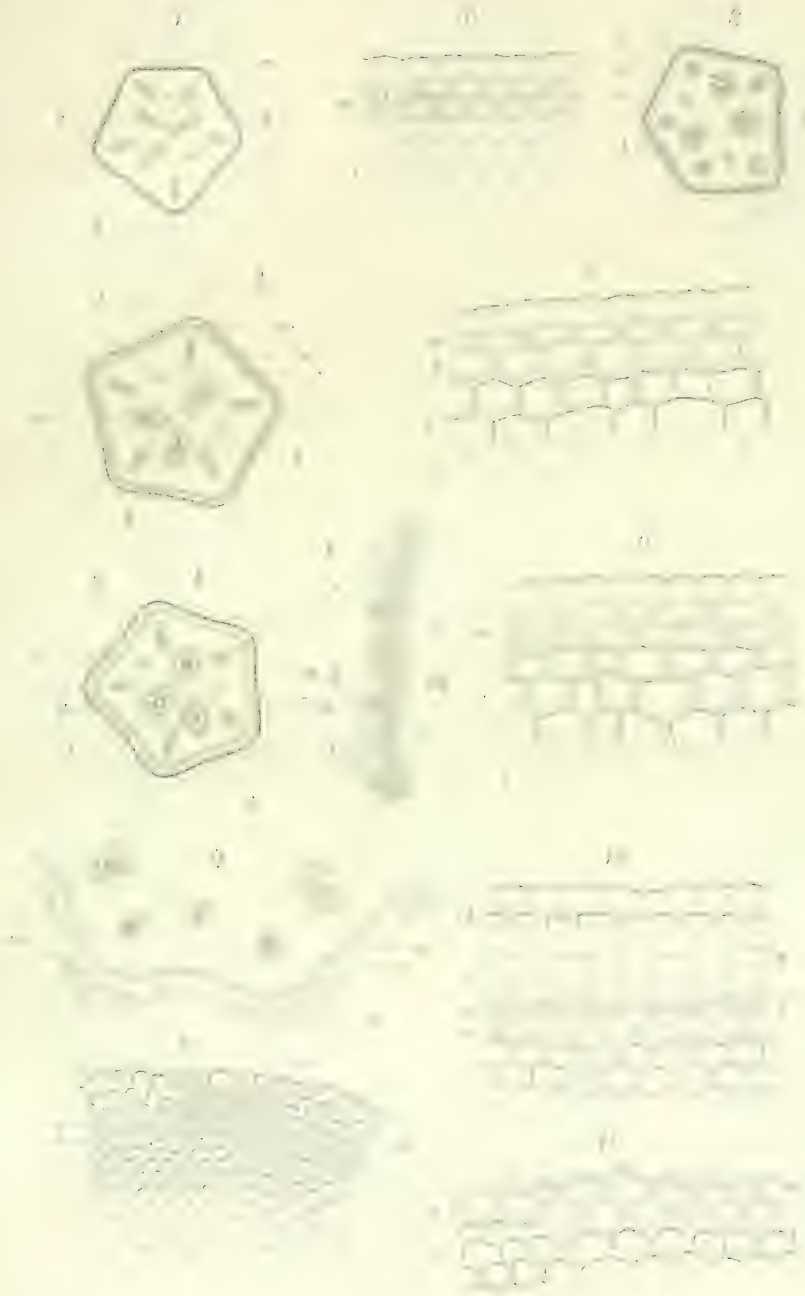
Druk. Univ. Jagiell.

Fig. 21.

J. Brzeziński.

Druk. Univ. Jagiell.

P. Gutwiński ad. nat. del.



Ad nat. del. F. Tondera

Lith. Kamthowski & Cerr.

Fig 1

Fig 3

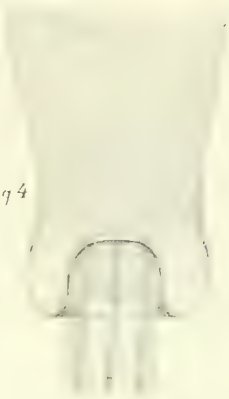


Fig 4

Fig 5

Fig 6

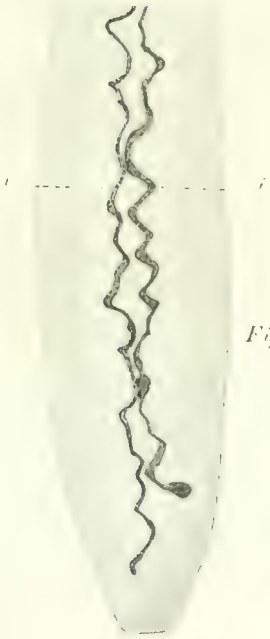


Fig 2

Fig 7

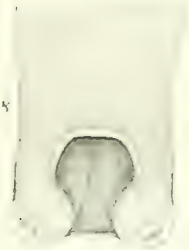


Fig 8

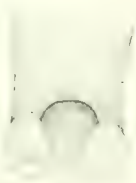


Fig 11

Fig 10

Fig 9

Rys. autor.

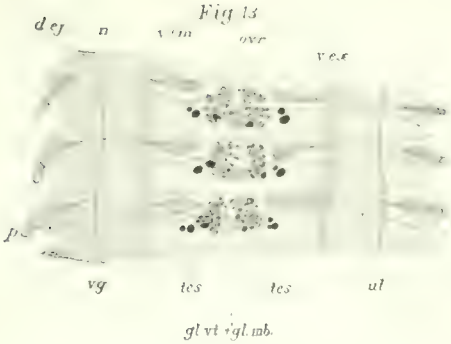
M. Kowalewski.

Fig. 12.

Fig 14.

Fig 15

Fig 13



M. Kowalewski.

Fig 16

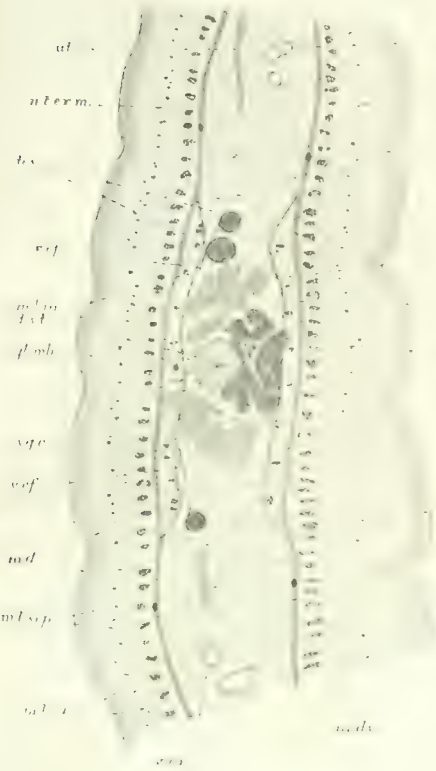


Fig 18

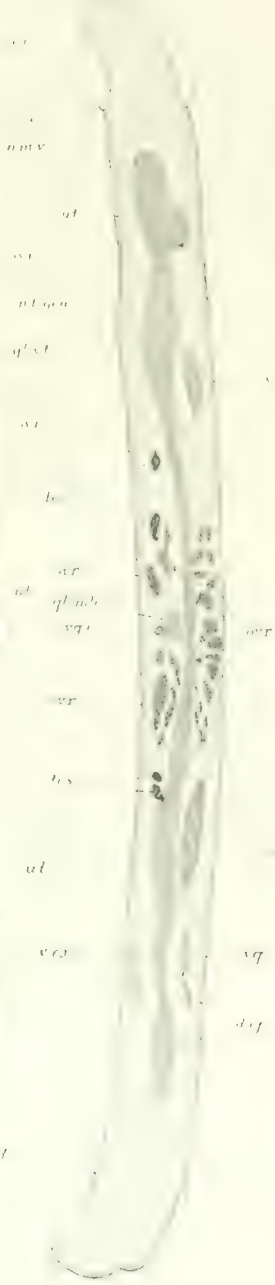


Fig 19

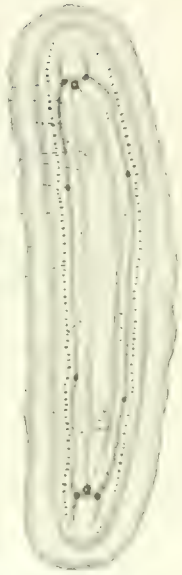
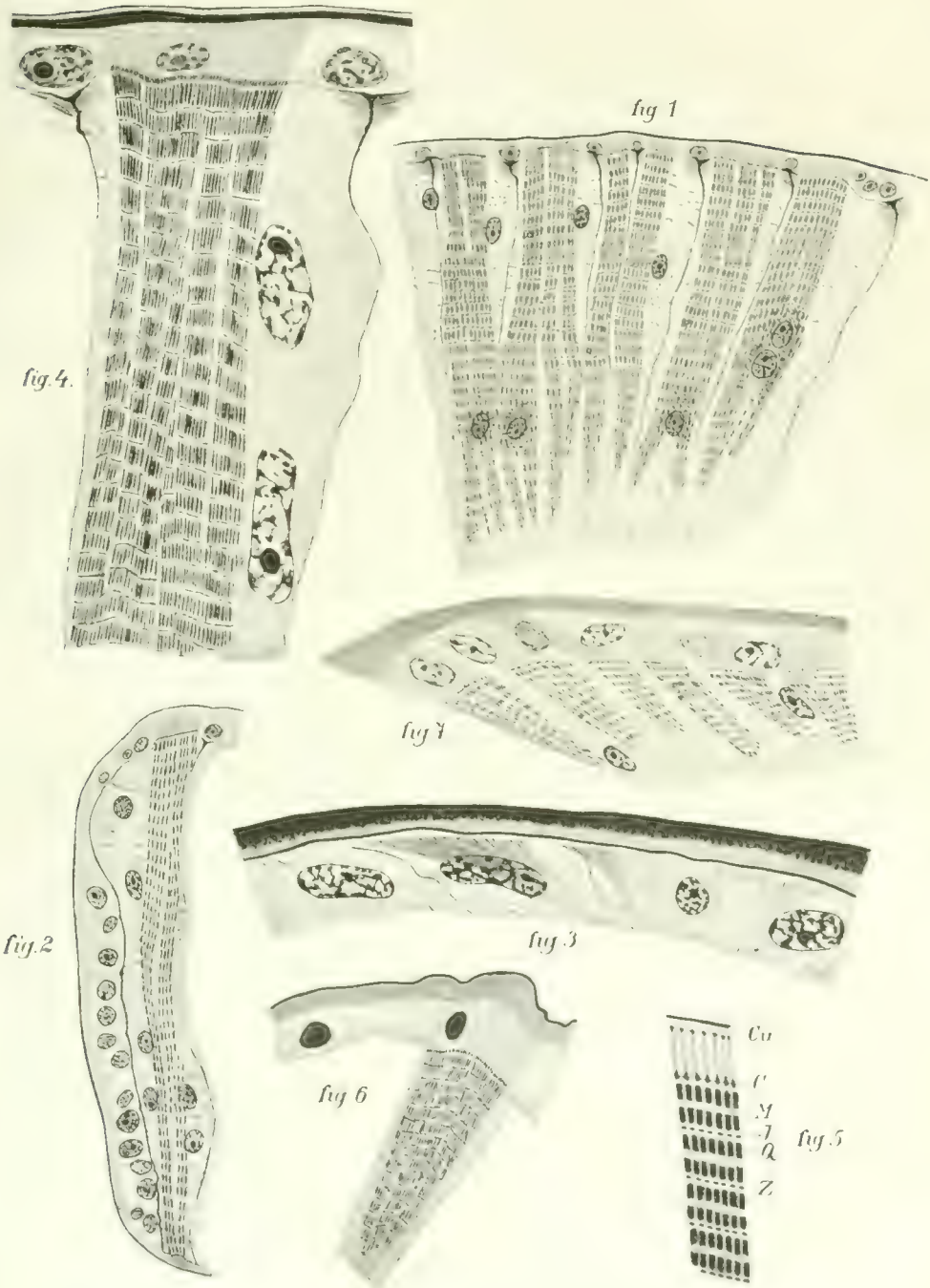


Fig 17

Fig 20

Rys autor.

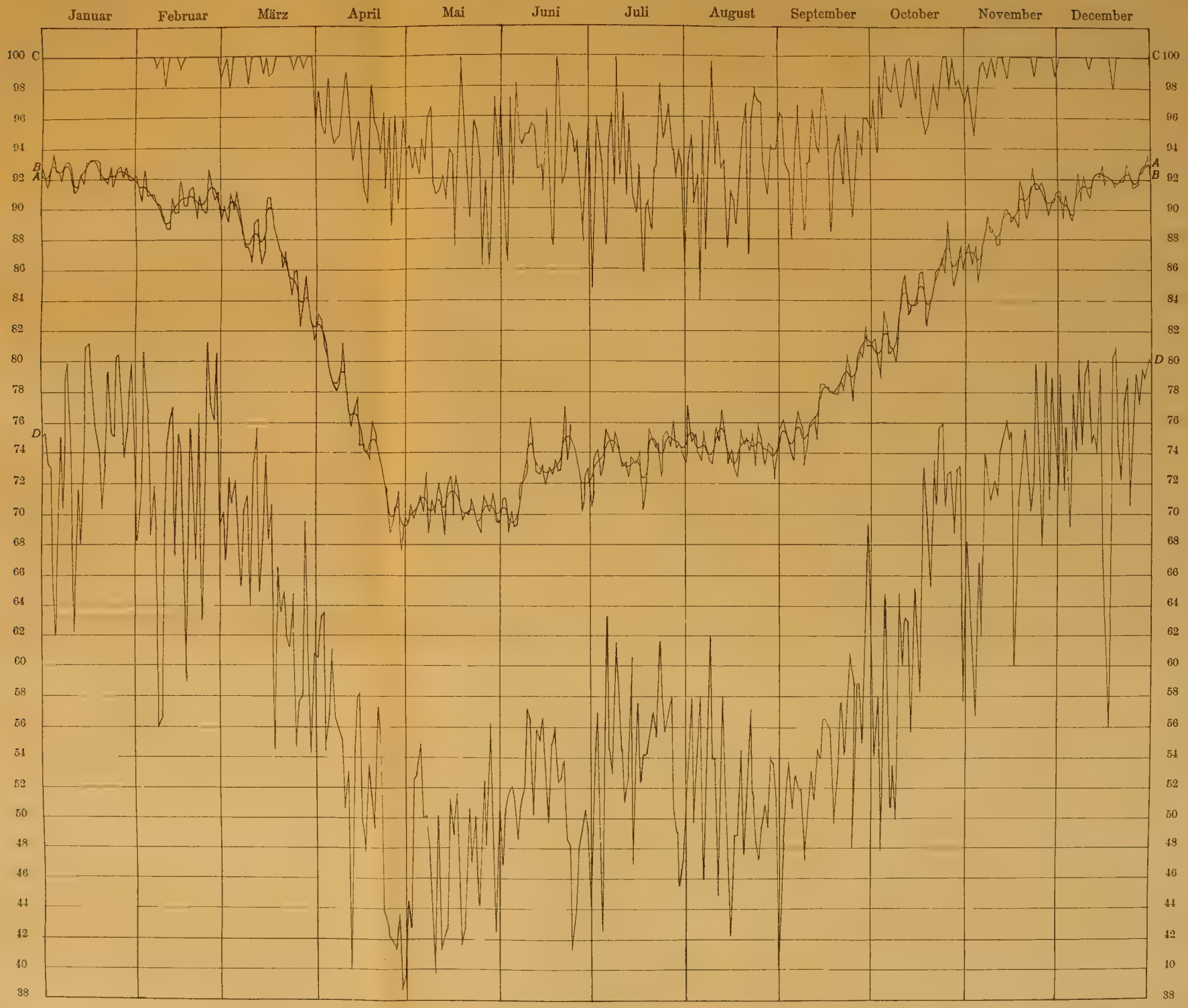
M. Kowalewski.



St. Maziarski del.

Der jährliche Gang der relativen Feuchtigkeit in Tarnopol.

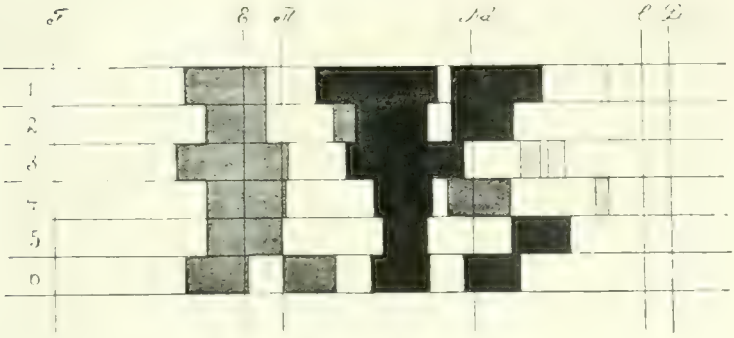
Bulletin de l' Ac. des Sc. de Cracovie. 1903.



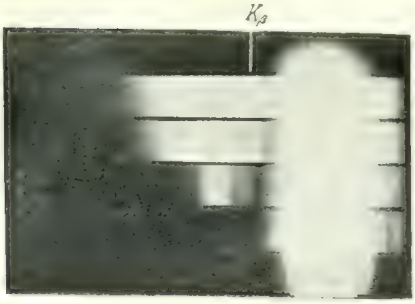
Wł. Satke del.

AA = ausgeglichene Mittel.
BB = normale Mittel.
CC = obere Grenze der Tagesmittel.
DD = untere Grenze der Tagesmittel.

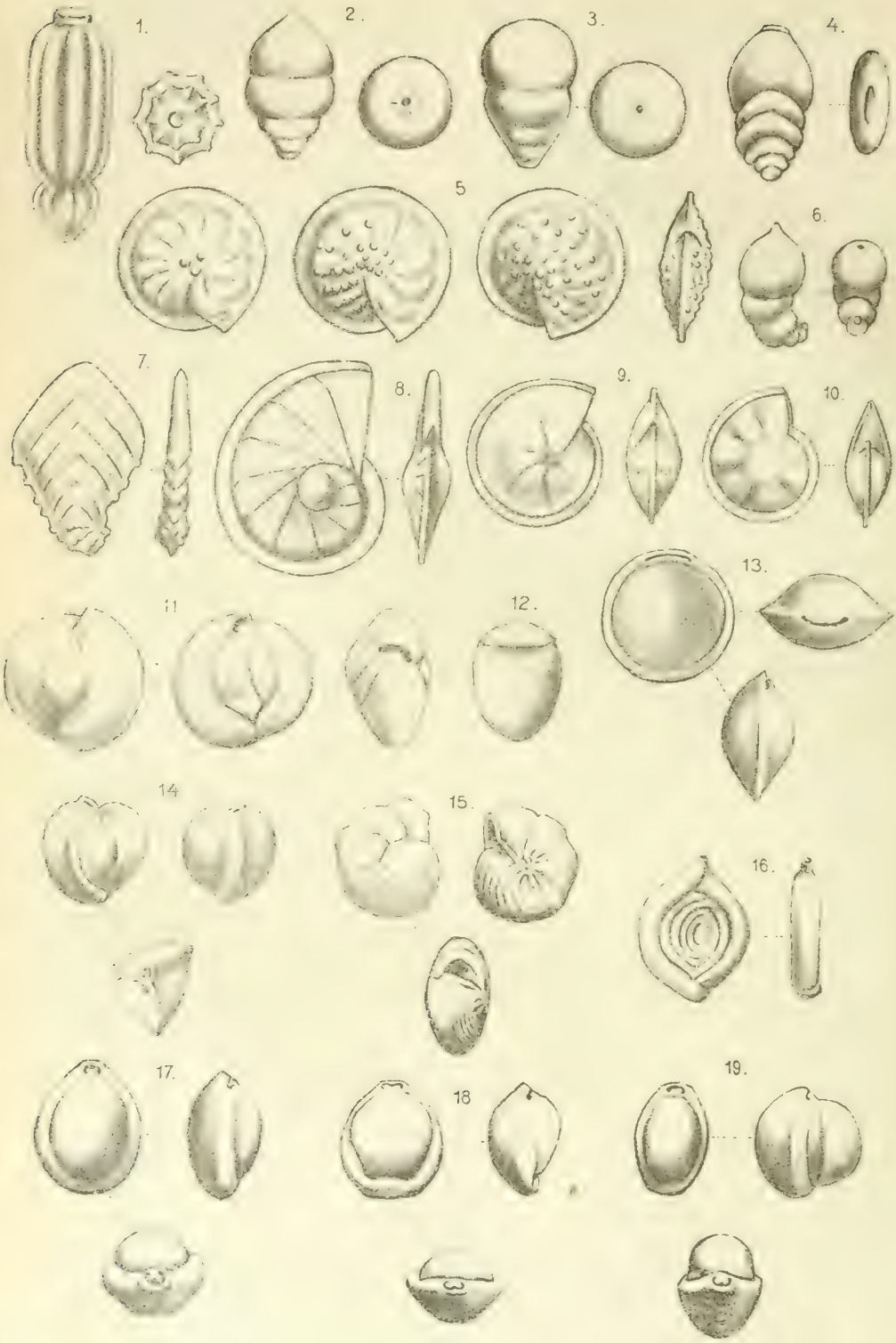
Lit. K. Kranikowski, Kraków.



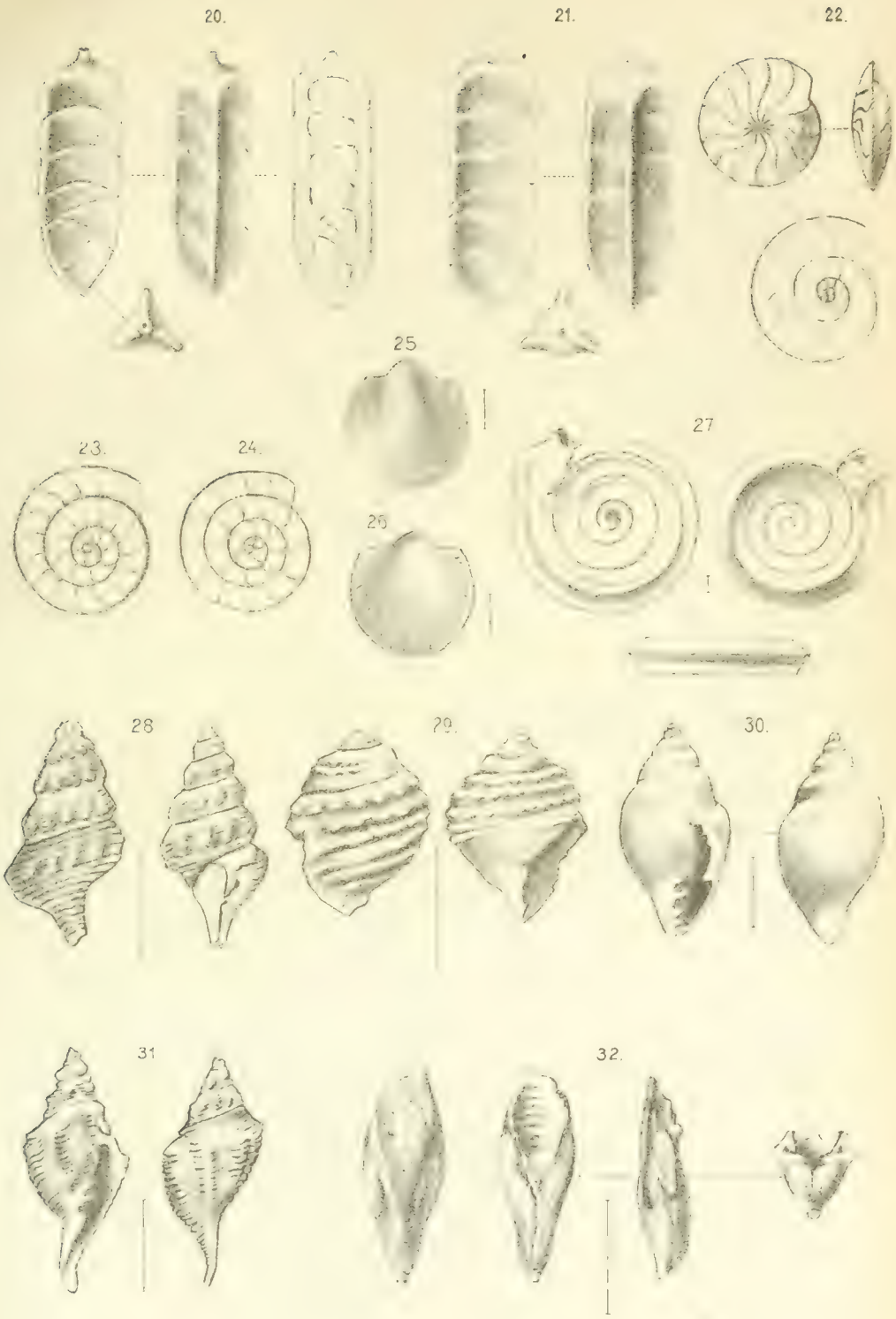
1. Phylloerythrine in acetic acid, conc. solution
2. " " " " dil. "
3. " " " " + H Cl
4. " " chloroform
5. " zinc salt
6. Scatocyanin



L. Marchlewski.



K. Wójcik.



Lith. A Pruszyński. Cracovie.

3 2044 106 273 733

Date Due

JAN 17 1955

JUL 8 1955